Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion.

Von Prof. Dr. Chr. Moser, Bern.

I.

Mit gefälligem Schreiben vom 15. Mai 1906 fragte der Sekretär der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-Mathematiker den Verfasser der vorliegenden Darstellung an, ob die Vereinigung auf eine Arbeit für das erste Heft der Veröffentlichungen rechnen könne. Gerne erklärte sich der Verfasser bereit, über die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion einige Bemerkungen zur Verfügung zu stellen. Der Verfasser konnte sich zu diesem Thema auch um so eher entschliessen, als die Untersuchungen, die sich an den Begriff der Intensität der Sterblichkeit knüpfen, stetsfort noch ein erneutes Interesse darbieten und ohne Zweifel im Laufe der Zeit schon viel zur Vertiefung der Lebensversicherungsrechnung beigetragen haben [1]).

Man darf sogar noch weiter gehen und sagen, dass sich nicht nur bei der Darstellung der Überlebensordnung und nicht nur speziell bei der Lebensversicherung, sondern auch auf andern Gebieten der Versicherungs-Mathematik das Bedürfnis geltend macht, eine Funktion einzuführen, die aus einer andern, sagen wir ursprünglichen Funktion, in gleicher Weise abgeleitet wird, wie die Intensität der Sterblichkeit aus der Überlebensordnung. Im besondern sei darauf hingewiesen, dass auch die Theorie der Krankenversicherung den Begriff der Intensität der Entkrankung mit Vorteil gebrauchen kann.

[1]) Über die Intensität der Sterblichkeit seien folgende in schweizerischen Veröffentlichungen erschienene Arbeiten erwähnt:

Dr. *G. Schaertlin,* Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77 bis 1880/81. Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrgang 1888, S. 294—299.

Dr. *G. Schaertlin,* Absterbeordnung. Artikel im Handwörterbuch der schweizerischen Volkswirtschaft, Sozialpolitik und Verwaltung. Herausgegeben von Prof. Dr. N. Reichesberg. Band I, S. 8 und 9.

Dr. *A. Bohren,* Die Intensität der Sterblichkeit, bestimmt auf Grund der zwei ersten schweizerischen Sterbetafeln. Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrgang 1903, II. Band, S. 66—68.

Im übrigen sei in erster Linie auf das *Text Book* verwiesen: Institute of Actuaries' Text Book of the Principles of Interest, Life Annuities, and Assurances, and their practical Application. Part II. By *George King.* London, Charles & Edwin Layton.

II.

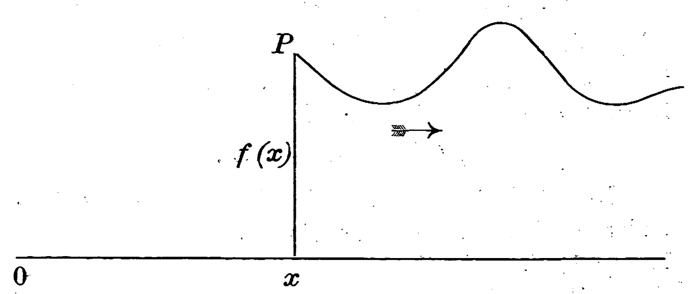
Zunächst möge man einige elementare Betrachtungen gestatten. Wir setzen dabei irgend eine messbare Grösse voraus, die als Funktion der Zeit angesehen werden kann. Indem wir die Grösse messend verfolgen, werden wir gewahr, dass sie in einem bestimmten Zeitintervalle entweder *abgenommen* hat, *gleich* geblieben ist oder eine *Zunahme* aufweist.

Bezeichnen wir nun die Zeit, von einem gewissen Zeitpunkte an, mit x. Die Grösse, die wir betrachten, habe in dem x entsprechenden Zeitpunkte den Wert

$$f(x).$$

Es gibt sehr viele Grössen in der Erscheinungswelt, die wir messend verfolgen können. Als $f(x)$ möge z. B. der Luftdruck an einem gewissen Orte zur Zeit x angesehen werden, oder es stelle $f(x)$ den Wasserstand eines Flusses, sagen wir der Aare bei Bern, dar etc.

Kommen in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme dem Punkte P die Koordinaten x und $f(x)$



zu, so wird der Punkt P mit wachsendem x eine gewisse Kurve beschreiben.

Stellt etwa $f(x)$ das Gewicht eines Steins dar, der der Verwitterung ausgesetzt ist, so wird $f(x)$ abnehmen und schliesslich, wenn der Stein ganz verwittert ist, gleich 0 werden.

Wir können auch Grössen heranziehen, die nicht nur der sogenannten leblosen Welt, sondern namentlich auch solche, die dem *sozialen Leben* angehören. Da ist allerdings die Messung und Beobachtung sehr oft schwieriger, aber dafür nicht weniger interessant.

Man tut da manchmal gut, die Resultate der Messung in geeigneter Weise zu *gruppieren*.

Nehmen wir z. B. als x die Zeit an, die seit der Geburt einer Person verflossen ist. Dann stellt x das *Alter* der Person dar. Sei nun $f(x)$ eine Gesamtheit von gleichaltrigen Personen, so wird, wie beim Gewicht des der Verwitterung ausgesetzten Steins, $f(x)$ mit wachsendem x allmählich abnehmen, um schliesslich 0 zu werden. (Andere Gesamtheiten: Aktive, Witwen, Invalide etc.)

Oder es sei x die Zeit vom Beginne der Krankheit an, also die *Krankheitsdauer*. Stellt $f(x)$ eine Gesamtheit von Personen dar, die alle während einer gleichen gewissen Zeit x krank waren, so wird auch $f(x)$ allmählich abnehmen bis zu 0.

Der *Grad* der Abnahme — oder wenn man lieber will, die *Dichtigkeit* der Abnahme oder die *Stärke* der Abnahme, oder die *Intensität* der Abnahme — ist zu verschiedenen Zeiten im allgemeinen auch verschieden. Aber auf das *stärkere oder schwächere Abnehmen* kommt es — und gerade bei den Grössen, die im Versicherungswesen in Betracht fallen — meistens sehr viel an. Wir wollen uns, im Anschluss an eine grössere Zahl anderer Autoren, des Ausdruckes „*Intensität*" der Abnahme bedienen. Dabei geben wir gerne zu, dass vielleicht „Grad" oder „Dichtigkeit" der Abnahme ebenso gute Bezeichnungen wären [1]). In Übereinstimmung mit dem Ausdruck Intensität sprechen wir auch von der „*Intensitätsfunktion*".

Die Intensitätsfunktion stellt für irgend eine Grösse und für irgend einen Zeitpunkt die Abnahme, bezogen auf den Grössenbetrag 1 und die Zeit 1, dar.

In der Tat. Der ganze Grössenbetrag zur Zeit x sei $f(x)$. Nach Verfluss des Zeitintervalles $\triangle x$ ist der Grössenbetrag noch $f(x+\triangle x)$. Die Abnahme im Zeitintervalle $\triangle x$ ist demnach

$$f(x) - f(x+\triangle x).$$

Das ist die Abnahme, die der Grössenbetrag $f(x)$ erleidet. Beziehen wir nun die Abnahme auf den Grössenbetrag 1, d. h. bestimmen wir, welches der Proportionalteil der Abnahme sei, der durchschnittlich auf den Grössenbetrag 1 fällt, so haben wir den $f(x)$ten Teil der gesamten, in das Zeitintervall $\triangle x$ fallenden Abnahme zu berechnen. Also: Durchschnittliche Abnahme des Grössenbetrages im Zeitintervall $\triangle x$:

$$\frac{f(x) - f(x+\triangle x)}{f(x)}.$$

Wir haben die Abnahme auch noch auf die Zeit 1 zu beziehen, d. h. zu bestimmen, welcher Proportionalbetrag auf die Zeit 1 entfallen würde. Dieser Proportionalbetrag wird erhalten, indem der oben angegebene Betrag so oftmal gezählt wird, wie die Zeit $\triangle x$ in der Zeit 1 enthalten ist, also $\frac{1}{\triangle x}$mal. Die Abnahme, bezogen auf den Grössenbetrag 1 und die Zeit 1, wird daher:

$$\frac{f(x) - f(x+\triangle x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\triangle x}.$$

Dieser Abnahmebetrag ist abgeleitet aus der Abnahme im Zeitintervalle $\triangle x$. Er entspricht mithin noch nicht dem Betrage, den die Intensitätsfunktion nach der oben gegebenen Definition darstellen soll. Dort sprachen wir nicht von einer längeren Zeit, als welche $\triangle x$ aufgefasst werden kann, sondern gingen von der für einen *Zeitpunkt* sich ergebenden Abnahme aus. Wir hätten vielleicht im vorliegenden Falle ebenso gut getan, weniger streng von einem *Zeitmomente* zu sprechen. Wir bemerken übrigens, dass eine Definition mit Hülfe einer Gleichung, wie z. B. in nachstehender Gleichung (1), Definitionen durch Worte an Klarheit und Strenge stets weit übertrifft. Lassen wir, auf Grund der oben gemachten Bemerkungen, $\triangle x$ unendlich klein, gleich dx werden, so finden wir als Intensitätsfunktion $\mu(x)$ den *Grenzwert:*

$$\mu(x) = \mathrm{Lim}\, \frac{f(x) - f(x+\triangle x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\triangle x},$$
$$= \frac{f(x) - f(x+dx)}{f(x) \cdot dx},$$

oder, indem wir uns der üblichen Bezeichnungsweise anschliessen, wonach gesetzt wird:

$$df(x) = f(x+dx) - f(x)$$

und

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

folgt:

$$\mu(x) = \frac{-df(x)}{f(x)\,dx},$$

und daher:

$$\mu(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

Bis jetzt gingen wir stets von der Vorstellung aus, dass die Variable x eine gewisse, von einem Zeitpunkte 0 an gerechnete *Zeit* darstelle. Wir sind aber *nicht an diese Voraussetzung gebunden,* sondern können *allgemein,* nach Massgabe von Gleichung (1), uns dahin aussprechen:

Die Intensitätsfunktion $\mu(x)$ für irgend eine Funktion $f(x)$ ist gleich dem negativen Werte des Quotienten aus der ersten Ableitung $f'(x)$ und der Funktion $f(x)$ selbst.

[1]) Vgl. *Corneille L. Landré,* Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung, III. Auflage, S. 44.

Wir könnten in der *Verallgemeinerung* noch *weiter gehen* und den Ausdruck

$$\varepsilon \frac{f'(x)}{f(x)}$$

zur Definition heranziehen. ε ist dabei eine Konstante, die vom Vorzeichen abhängt. $\varepsilon = +1$ würde dann bedeuten, dass wir es mit der Intensität der *Zunahme* der Funktion $f(x)$ zu tun haben. Es kann in der Tat auffallen, dass wir in unsern Betrachtungen von der *Abnahme* der Funktion $f(x)$ ausgegangen sind und nicht von der Zunahme. Aber der Grund ist ein einfacher. Bei den Ordnungen, die in der Versicherungs-Mathematik vorkommen, haben wir es im allgemeinen mit Gesamtheiten zu tun, die mit der Zeit, d. h. mit höherem Alter, gewöhnlich kleiner werden, haben es also mit Abnahmen zu tun. Da scheint es bequemer und entspricht dem Gebrauche, für den Betrag der *Abnahme,* z. B. für die *Zahl der Sterbenden* oder für die *Zahl der sonstwie aus einer Gesamtheit Ausscheidenden* einen *positiven Betrag* zu erhalten. Setzt man $\varepsilon = -1$, so hat man daher den Vorteil, dass die Intensitätsfunktion der Überlebensordnung ohne weiteres die Intensität der Sterblichkeit darstellt, und dass, wie wir noch sehen werden, die Intensitätsfunktion des Diskontierungsfaktors $(f(x) = v^x)$ die Intensität der Abzinsung angibt. Wir lassen es also bei der Gleichung (1), bei der $\varepsilon = -1$ ist, bewenden und fügen lediglich bei, dass wohl bei manchen Untersuchungen die Einführung von $\varepsilon = +1$ eine besondere Berechtigung hätte.

Eine Bemerkung in einer andern Richtung sei uns hier weiter gestattet. Erleidet nämlich eine Gesamtheit *verschieden geartete Abnahmen oder Zunahmen,* so lässt sich die *Intensität der einzelnen Abnahmen oder Zunahmen* auch *einzeln* darstellen [1]). So wird z. B. die Intensität der Unfallsterblichkeit einzeln dargestellt werden können, indem man bei der Gesamtheit der in Frage stehenden Lebenden ebenfalls auch nur einzeln die Abnahme infolge Unfalltodes in dem unendlich kleinen Momente, der zwischen den Altern x und $x + dx$ liegt, in Rechnung zieht. Dabei wird allerdings vorauszusetzen sein, dass die Gesamtheit der in Frage stehenden Lebenden in jenem unendlich kleinen Momente durch die andern Abnahmen oder Zunahmen nicht um einen endlichen Teil der Gesamtheit selbst verändert werde.

Ferner bemerken wir der Vollständigkeit halber, dass bekanntlich die rechte Seite der Gleichung (1) durch die Ableitung eines *Logarithmus* dargestellt werden kann:

$$\mu(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{Log} \frac{1}{f(x)}.$$

Hier bedeutet $\operatorname{Log} \frac{1}{f(x)} = -\operatorname{Log} f(x)$ den natürlichen Logarithmus der reziproken Funktion $f(x)$. Bezeichnen wir $f(x)$ als ursprüngliche Funktion, so haben wir daher:

Die Intensitätsfunktion $\mu(x)$ ist gleich dem ersten Differentialquotienten des Logarithmus der reziproken ursprünglichen Funktion.

Fügen wir noch einige Beispiele der Definitionsgleichung (1) bei:

a) Für

$$f(x) = \frac{1}{e^x},$$

wo e die bekannte Transzendente bedeutet, wird

$$\mu(x) = 1.$$

Die Intensitätsfunktion der reziproken Exponentialfunktion $\frac{1}{e^x}$ ist konstant $= +1$.

b) Für

$$f(x) = \alpha e^{-h^2 x^2}$$

wird

$$\mu(x) = 2 h^2 x.$$

Die Intensität der Abnahme der Gauss'schen Fehlerfunktion ist proportional der Grösse der Fehler.

c) Für

$$f(x) = \cos x$$

wird

$$\mu(x) = \operatorname{tg} x.$$

Die Intensitätsfunktion von $\cos x$ ist $\operatorname{tg} x$.

d) Für

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

wird

$$\mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Die Intensitätsfunktion von $\frac{1}{x}$ kehrt in die ursprüngliche Funktion zurück.

e) Es sei v der Wert, der mit seinen Zinsen in einem Jahre zu 1 anwächst, so dass

$$v = \frac{1}{1+i} \text{ ist,}$$

wo i den Zins des Kapitals 1 in einem Jahre darstellt. v^x wird als Diskontierungsfaktor bezeichnet.

Für

$$f(x) = v^x$$

wird

$$\mu(x) = \operatorname{Log} \frac{1}{v},$$

also

$$\mu(x) = \operatorname{Log}(1+i).$$

---

[1]) Vgl. hierzu das Gutachten von Prof. *J. Karup:* Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener-Witwen-Societät am 31. Dezember 1890. Dresden 1893.

Die Intensitätsfunktion des Diskontierungsfaktors ist unabhängig von der Zeit.

f) Für

$$f(x) = k\, s^x\, g^{c^x}$$

wird

$$\mu(x) = \text{Log}\,\frac{1}{s} + \text{Log}\,\frac{1}{g}\cdot\text{Log}\,c\cdot c^x \text{ oder}$$

$$\mu(x) = A + B\,c^x,$$

wo

$$A = \text{Log}\,\frac{1}{s}$$

und

$$B = \text{Log}\,\frac{1}{g}\,\text{Log}\,c.$$

Die Intensitätsfunktion der Makeham'schen Funktion besteht aus einer Konstanten und einer Exponentialfunktion.

g) Nach den Erfahrungen der Krankenkasse für den Kanton Bern kann die Entkrankungsordnung näherungsweise durch den Ausdruck

$$f(x) = k\, s^x\, g^{\frac{1}{c+x}}$$

dargestellt werden, wo k, s, g und c Konstante sind und x die Krankheitsdauer bezeichnet [1]).

Die Intensitätsfunktion wird in diesem Falle:

$$\mu(x) = \text{Log}\,\frac{1}{s} + \frac{\text{Log}\,g}{(c+x)^2} \text{ oder}$$

$$\mu(x) = a + \frac{b}{(c+x)^2},$$

wo

$$a = \text{Log}\,\frac{1}{s}$$

und

$$b = \text{Log}\,g.$$

Die Grösse $c + x$ bedeutet die um c vermehrte Krankheitsdauer, kann also als eine Zeitdauer aufgefasst werden.

Die Intensitätsfunktion der Entkrankungsordnung besteht nach Massgabe der erwähnten Erfahrungen aus einer konstanten und einer variabeln Komponente. Die variable Komponente ist umgekehrt proportional dem Quadrate einer Zeitdauer.

III.

Während die Variable x um dx zunimmt, ist der Betrag der Abnahme der Funktion $f(x)$

$$f(x)\cdot\mu(x)\,dx.$$

Schreiten wir in gleichen Differentialen dx vorwärts, so ist die Abnahme von $f(x)$ offenbar proportional der Funktion

$$T(x) = C\cdot f(x)\cdot\mu(x)\,.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(2),$$

wo C eine Konstante bedeutet. Die Abnahme wird ein Maximum oder ein Minimum, wenn

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0$$

ist, wenn also

$$f'\mu + f\mu' = 0 \text{ wird }\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(3).$$

Wir haben hier, der einfachern Bezeichnung wegen, bei den Funktionen f und μ, sowie bei ihren ersten Ableitungen, f' und μ', die Variable x nicht besonders hingesetzt.

Aus (3) ergibt sich durch Division mit $f\mu$:

$$\frac{f'}{f} + \frac{\mu'}{\mu} = 0\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(4),$$

demnach

$$\frac{f'}{f} : \frac{\mu'}{\mu} = -1\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(5).$$

Die Abnahme der ursprünglichen Funktion f wird zu einem Maximum oder Minimum, wenn das Doppelverhältnis $\frac{f'}{f} : \frac{\mu'}{\mu}$ *gleich — 1 ist.*

Wir enthalten uns hier, die Beziehung zu den aus der synthetischen Geometrie bekannten *harmonischen Gebilden* weiter auszuführen.

Handelt es sich bei der Funktion $f(x)$ speziell um die Überlebensordnung, so ist die Abnahme der ursprünglichen Funktion gleich der Zahl der Sterbenden. Diese ist, wie bekannt [1]), ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\frac{\mu'(x)}{\mu^2(x)} = 1\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(6)$$

wird, ein Resultat, das sich aus (5) ohne weiteres ergibt. Setzen wir nämlich in (5) an Stelle von $\frac{f'}{f}$ nach Massgabe von (1) die negative Intensitätsfunktion $-\mu(x)$, so sieht man sofort die Richtigkeit von (6) ein. Aus Gleichung (6) schliessen wir weiter:

$$-\frac{\mu'(x)}{\mu^2(x)} + 1 = 0, \text{ also}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu(x)} + x\right) = 0$$

und wenn

$$U(x) = \frac{1}{\mu(x)} + x\;\;.\;\;.\;\;(7),$$

gesetzt wird:

$$\frac{d\,U(x)}{dx} = 0\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(8).$$

Die beiden Funktionen T(x) und U(x) passieren also, bei veränderlichem x, gleichzeitig extreme Werte, und zwar wird, wie wir sofort sehen werden, $T(x)$

[1]) Vgl. Troisième Congrès international d'Actuaires. Paris 1900. Verhandlungen, S. 664, 1054 und 1055.

[1]) Vgl. im besondern: *A. Quiquet,* Aperçu historique sur les formules d'interpolation, Paris, L. Warnier & Cie., und die in dieser Arbeit angegebene Literatur.

ein Maximum, wenn $U(x)$ ein Minimum ist, und umgekehrt.

Die zweite Ableitung von $T(x)$ ist nämlich:

$$T'' = C(f''\mu + 2f'\mu' + f\mu'') \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei wir die Variable x bei den Funktionszeichen überall weggelassen haben.

Für unsern Spezialfall, $T' = 0$, reduziert sich (9) wie folgt:

Es ist, nach (2) und (1):

$$T = -Cf',$$

somit

$$T' = -Cf''.$$

Da C eine Konstante ist, so verlangt die Bedingung $T' = 0$, dass auch $f'' = 0$ sei. Ersetzen wir ferner in (9) die erste Ableitung f' durch $-f\mu$, so wird für unsern Spezialfall

$$T'' = Cf(-2\mu\mu' + \mu'') \quad . \quad . \quad . \quad (9a).$$

Anderseits erhält man als zweite Ableitung von $U(x)$:

$$U'' = \frac{1}{\mu^2}\left(2\frac{(\mu')^2}{\mu} - \mu''\right) \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wo wir ebenfalls, der Einfachheit wegen, die Variable x überall weggelassen haben.

Für unsern Spezialfall ist, nach Gleichung (6):

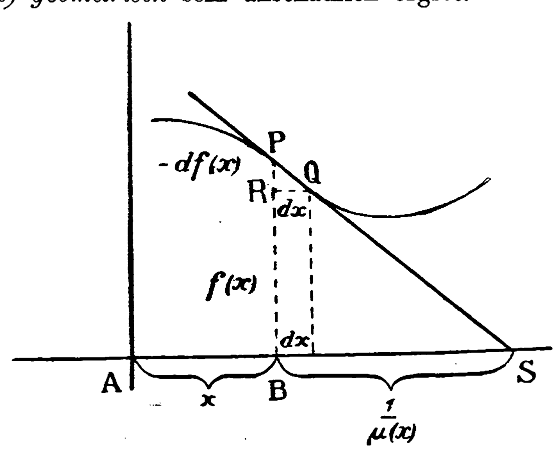
$$\frac{\mu'}{\mu} = \mu,$$

also geht (10) über in

$$U'' = \frac{1}{\mu^2}(2\mu\mu' - \mu'') \quad . \quad . \quad . \quad (10a).$$

Aus der Vergleichung von (9a) und (10a) ersieht man, dass in allen Fällen, in denen Cf und $\frac{1}{\mu^2}$ das gleiche Vorzeichen haben, die zweiten Ableitungen, T'' und U'', entgegengesetzt sind, weil in (9a) der Faktor $-2\mu\mu' + \mu''$ und in (10a) der Faktor $2\mu\mu' - \mu''$ vorkommt.

Wir wollen nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass sich der Zusammenhang der Funktionen $T(x)$ und $U(x)$ *geometrisch* sehr anschaulich ergibt.



Die Subtangente BS stellt, wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PQR und PSB, den Betrag

$$\frac{f(x) \cdot dx}{-df(x)},$$

also

$$\frac{1}{\mu(x)} \text{ dar.}$$

Mithin repräsentiert der Abschnitt AS auf der Abszissenaxe die Funktion $U(x)$. Diese wird ein Minimum, wenn der Berührungspunkt der Tangente PS ein Wendepunkt ist, wenn also

$$T(x) = C \cdot \frac{-df(x)}{dx}$$

ein Maximum erreicht.

IV.

In ähnlicher Weise, wie die Funktion $\mu(x)$ aus der ursprünglichen Funktion $f(x)$ abgeleitet wurde, kann auch eine neue Funktion $\mu_2(x)$ aus $\mu(x)$ abgeleitet werden. Wenn wir der Funktion $\mu(x)$ den Zeiger 1 geben, so haben wir nacheinander folgende Intensitätsfunktionen:

$$\mu_1(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$\mu_2(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\mu_n(x) = -\frac{\mu'_{n-1}(x)}{\mu_{n-1}(x)} \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Wir können die durch Gleichung (11) dargestellten Funktionen, je nachdem $n = 1, 2, 3 \ldots$ ist, als *Intensitätsfunktionen erster, zweiter, dritter etc. Ordnung* bezeichnen. Die ursprüngliche Funktion $f(x)$ wird dabei als *Intensitätsfunktion nullter Ordnung* betrachtet werden können.

Die Intensitätsfunktion $n$ter Ordnung lässt sich, wenn wir den natürlichen Logarithmus einführen, auch durch die Gleichung

$$\mu_n(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{Log}\frac{1}{\mu_{n-1}(x)} \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

definieren. Gehen wir zurück bis auf die ursprüngliche Funktion $f(x)$, so erhalten wir folgende kettenbruchähnliche Darstellung:

$$\mu_n(x) = \frac{d}{dx}\operatorname{Log}\cfrac{1}{\frac{d}{dx}\operatorname{Log}\cfrac{1}{\frac{d}{dx}\operatorname{Log} \cdots\cdots \frac{d}{dx}\operatorname{Log}\cfrac{1}{\frac{d}{dx}\operatorname{Log}\cfrac{1}{f(x)}}}}.$$

Zur Berechnung der Intensitätsfunktionen erster und höherer Ordnung mögen die folgenden Beispiele gegeben werden:

a) Wenn die Überlebensordnung das Gesetz von *Makeham* befolgt, so wird die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit

$$p(x) = \frac{k s^{x+1} g^{c^{x+1}}}{k s^x g^{c^x}},$$
$$= s g^{c^x (c-1)},$$
$$= s G^{c^x},$$

wo $G = g^{c-1}$ ist.

Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist also durch den nach *Gompertz* benannten Ausdruck darstellbar.

Für

$$f(x) = p(x) = s G^{c^x}$$

wird

$$\mu_1(x) = c^x \operatorname{Log} c \operatorname{Log} \frac{1}{G},$$
$$\mu_2(x) = \operatorname{Log} \frac{1}{c}$$

und

$$\mu_3(x) = 0.$$

Die Intensitätsfunktion dritter Ordnung der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit ist daher, bei Zugrundelegung des Makeham'schen Gesetzes, gleich null.

b) Für

$$f(x) = v^x,$$

wo v die bekannte Bedeutung habe (vgl. Beispiel *e)* im zweiten Abschnitte), folgt:

$$\mu_1(x) = \operatorname{Log}(1+i),$$
$$\mu_2(x) = 0.$$

Die Intensitätsfunktion zweiter Ordnung des Diskontierungsfaktors ist gleich null.

c) Für

$$f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\sin x}$$

wird

$$\mu_1(x) = \cos x,$$
$$\mu_2(x) = tg\, x,$$
$$\mu_3(x) = \frac{2}{-\sin 2x},$$
$$\mu_4(x) = 2 \cot g\, 2x$$

etc.

d) Für

$$f(x) = \alpha e^{-h^2 x^2}$$

folgt

$$\mu_1(x) = 2h^2 x,$$
$$\mu_2(x) = -\frac{1}{x},$$
$$\mu_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Die Intensitätsfunktionen dritter und höherer Ordnung der Gauss'schen Fehlerfunktion $\alpha e^{-h^2 x^2}$ sind unter sich gleich.

Die Abnahme der ursprünglichen Funktion $f(x)$ wird, nach Massgabe von Gleichung (4), ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\mu_1(x) + \mu_2(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

ist.

Wir erhalten deshalb hier, durch Einführung von Intensitätsfunktionen erster und zweiter Ordnung, eine einfache Darstellung. Man kann, wie wohl ohne weiteres ersichtlich ist, die Bedingungsgleichung (4a):

$$\mu_1(x) = -\mu_2(x)$$

auch verallgemeinern und, statt 1 und 2, beliebige zwei aufeinander folgende Ordnungszahlen, n und $n+1$, wählen. Nimmt daher für denselben Wert der Variabeln x die Intensitätsfunktion $n$ter Ordnung den Wert A und die Intensitätsfunktion $(n+1)$ter Ordnung den Wert $-A$ an, und bezeichnen wir A und $-A$ als einander entgegengesetzte Werte, so haben wir den Satz:

Die Abnahme der Intensitätsfunktion $(n-1)$ter Ordnung wird ein Maximum oder Minimum, wenn die Intensitätsfunktionen der $n$ten und $(n+1)$ten Ordnung einander entgegengesetzte Werte annehmen.

Bern, den 6. Juni 1906.