Du calcul de l'intérêt pour une période inférieure à un an.

Par S. Dumas, Berne.

Soit i l'intérêt d'un franc pendant un an et t le temps pendant lequel le capital est placé. Lorsque t est inférieur à une année, il y a trois manières de calculer l'intérêt.

1° L'intérêt est proportionnel au temps, un franc devient:

$$f_1(t) = 1 + i\,t. \tag{1}$$

On nomme quelquefois cette méthode la méthode commerciale.

2° On remarque que l'intérêt n'est payable qu'à la fin de l'année; pour le ramener à sa valeur au moment t, on doit en soustraire son propre intérêt; un franc devient:

$$f_2(t) = 1 + it - (1-t)\,t\,i^2. \tag{2}$$

3° Par la troisième méthode, dite méthode exponentielle, un franc devient:

$$f_3(t) = (1+i)^t. \tag{3}$$

Exemple: Soient fr. 1 000 000 placés au 3 % pendant 4 mois. L'intérêt calculé par la première méthode est:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{1}{3} = \text{Fr. } 10\,000,$$

par la seconde:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \left[0{,}03 \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \cdot 0{,}0009\right] = \text{Fr. } 9800,$$

par la troisième:

$$\text{Fr. } 1\,000\,000 \left[1{,}03^{\frac{1}{3}} - 1\right] = \text{Fr. } 9902.$$

Comme son nom l'indique, la méthode commerciale est en usage dans le commerce. C'est celle dont se sert par exemple Kaan [1]).

Nous ne connaissons aucun auteur qui emploie la seconde méthode.

Pour les travaux scientifiques, on préfère en général la méthode exponentielle. Jacques Bernoulli [2]) l'introduisit dans la science, sous une forme un peu différente de celle que nous donnons ici; Dormoy [1]), Sutton et King [2]) l'emploient dans leurs ouvrages; Zillmer [3]), en 1861, et Landré [4]) se prononcent catégoriquement en sa faveur. Elle a le grand avantage de ne pas distinguer le cas où t est entier de celui où il ne l'est pas.

L'équation (1) représente une droite, (2) une parabole, et (3) une courbe exponentielle; ces trois lignes passent par les deux points $[t=0,\ f(t)=1]$ et $[t=1,\ f(t)=(1+i)]$, c'est-à-dire que lorsque t est nul ou égal à un an, les trois méthodes donnent les mêmes résultats.

Ainsi que M. Moser [5]), développons l'exponentielle en série:

$$(1+i)^t = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{t(t-1)}{2!}i^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}i^3 + \ldots \tag{4}$$

La méthode commerciale est la même que la méthode exponentielle, si l'on néglige les termes de degré en i supérieur au premier; dans la seconde, nous tenons compte du terme en i^2, mais en doublant son coëfficient. Les termes de la série (4) sont alternativement positifs et négatifs lorsque t est compris entre 0 et 1; c'est donc la première méthode qui donne les résultats les plus forts, et la seconde les plus faibles.

Divisons le terme du second degré par celui du premier, le quotient $\frac{1}{2}(t-1)\,i$ est de l'ordre de grandeur de 0,01. Les résultats des trois méthodes ne diffèrent donc entre eux que de valeurs de l'ordre de leur centième.

De même, le terme en i^3 est de l'ordre du centième de celui en i^2; dans une première approximation nous pouvons le négliger ainsi que les suivants. Dans ces conditions, on peut admettre que le résultat de la méthode exponentielle est égal à la moyenne arithmé-

---

[1]) Die mathematischen Rechnungen bei Pensions-Instituten der Eisenbahnbeamten und deren Witwen (Vienne 1864). Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien (Vienne 1888).

[2]) Acta eruditorum (Mai 1690), [voir Maurice Cantor, Politische Arithmetik, 2e éd., Leipzig 1903].

---

[1]) Théorie mathématique des assurances sur la vie (Paris 1878).

[2]) The Institute of Actuaries' Text-Book (2e éd., Londres 1901). Traduction française par Amédée Bégault (Paris et Bruxelles 1894).

[3]) Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen (Berlin, 1re éd., 1861; 2e éd., 1887).

[4]) Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung (Jena 1895).

[5]) Cours du semestre d'été 1905 à l'université de Berne.

tique des résultats des deux autres. L'erreur commise ainsi est de l'ordre du centième des différences des trois méthodes entre elles, c'est-à-dire de l'ordre du dix-millième de l'intérêt ou du millionième du capital.

Etudions brièvement les variations de la différence des deux premières méthodes; c'est la plus simple des trois différences $f_1(t) - f_2(t)$, $f_1(t) - f_3(t)$ et $f_3(t) - f_2(t)$.

$$f_1(t) - f_2(t) = (1 - t)\, t\, i^2 \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) - f_2(t)\right] = (1 - 2t)\, i^2$$

Cette dérivée, positive quand t varie de 0 à $^1/_2$, s'annule pour t égal à $^1/_2$; elle est négative quand t varie de $^1/_2$ à 1. Quand t croît de 0 à $^1/_2$, la différence (5) croît de 0 à son maximum $^1/_4\, i^2$; quand t continue à croître, elle décroît et s'annule pour t égal à 1.

Des remarques que nous avons faites précédemment résulte que les deux différences $f_1(t) - f_3(t)$ et $f_3(t) - f_2(t)$ varient de la même façon; leurs maxima diffèrent peu de $^1/_8\, i^2$; ils sont atteints pour des valeurs de t voisines de $^1/_2$.

Recherchons à quel moment la différence entre les méthodes commerciale et exponentielle est maximum

$$f_1(t) - f_3(t) = (1 + i\,t) - (1 + i)^t$$

$$\frac{d}{dt}\left[f_1(t) - f_3(t)\right] = i - (1 + i)^t \operatorname{Log}(1 + i).$$

Nous avons un maximum lorsque

$$(1 + i)^t \operatorname{Log}(1 + i) = i.$$

Prenons les logarithmes des deux membres

$$t \operatorname{Log}(1 + i) + \operatorname{Log} \operatorname{Log}(1 + i) = \operatorname{Log} i.$$

$$t = \frac{\operatorname{Log} i - \operatorname{Log}\operatorname{Log}(1 + i)}{\operatorname{Log}(1 + i)}.$$

On trouverait de même que la valeur de t qui rend maximum la différence $f_3(t) - f_2(t)$, est la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation

$$(1 + i)^t \operatorname{Log}(1 + i) - i + (1 - 2t)\, i^2 = 0,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$t - \frac{\operatorname{Log}(1 - i + 2ti)}{\operatorname{Log}(1 + i)} - \frac{\operatorname{Log} i - \operatorname{Log}\operatorname{Log}(1 + i)}{\operatorname{Log}(1 + i)} = 0.$$

En résumé, nous voyons que les résultats auxquels conduisent les trois méthodes diffèrent trop peu pour qu'on puisse avoir des difficultés dans un règlement de comptes; des raisons d'opportunité décideront donc seules du choix de la méthode. Les commerçants emploieront probablement longtemps encore celle à laquelle ils sont accoutumés; elle ne conduit qu'à des calculs très simples.

La méthode exponentielle est un peu plus compliquée; elle nécessite l'usage des logarithmes; mais elle est bien préférable dans les travaux scientifiques; elle est beaucoup mieux fondée rationnellement et surtout elle reste la même lorsque t est fractionnaire que lorsqu'il est entier.

Maximum de $f_1(t) - f_2(t)$.

i	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$[f_1(t) - f_2(t)]$ maximum
0,02	1,010	1,009900	0,000100
0,03	1,015	1,014775	0,000225
0,04	1,020	1,019600	0,000400
0,05	1,025	1,024375	0,000625

Maximum de $f_1(t) - f_3(t)$.

i	t	$f_1(t)$	$f_3(t)$	$[f_1(t) - f_3(t)]$ maximum
0,02	0,50064	1,010013	1,009963	0,000050
0,03	0,50136	1,015041	1,014930	0,000111
0,04	0,50171	1,020068	1,019872	0,000196
0,05	0,50202	1,025101	1,024796	0,000305

Maximum de $f_3(t) - f_2(t)$.

i	t	$f_3(t)$	$f_2(t)$	$[f_3(t) - f_2(t)]$ maximum
0,02	0,4992	1,009934	1,009884	0,000050
0,03	0,4987	1,014850	1,014736	0,000114
0,04	0,4983	1,019736	1,019532	0,000204
0,05	0,4979	1,024590	1,024270	0,000320