

12. Éclaircissemens sur le Mémoire de Mr. de La Grange, inséré dans le V<sup>e</sup> volume de Mélanges de Turin, concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations &c. *N. A. Petr. t. 3.* 1785 (1788), pag. 289—297. [1777, déc. 1.] d'après N. von Fuss. A la page 289 du tome se trouve la remarque: „Présenté à l'Académie le 27 nov. 1777.“  
Le mémoire en question de de La Grange est inséré dans les „Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin pour les années 1770—1773“, tome 5, pag. 167—232, et porte le titre suivant: „Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations; dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; et où l'on résout différents problèmes relatifs à cette matière.“ Par Mr. de La Grange.
13. Solutio quarundam quaestionum difficiliorum in calculo probabilium. (Solution de quelques questions difficiles dans le calcul des probabilités.) *Op. anal. t. 2.* (1785), pag. 331—346. [1781, oct. 8.]
14. Vera aestimatio sortis in ludis. (Vraie estimation du hasard dans les jeux.) *Op. post. t. 1.* (1862), pag. 315—318.
15. Analyse d'un problème du calcul des probabilités. *Op. post. t. 1.* (1862), pag. 336—341.
- Pour les citations, on a fait usage, dans la liste ci-dessus, des abréviations suivantes:  
*Mém. de Berl.* — Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. (Tomes 1 à 25, années 1745—1769.)  
*Op. post.* — Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica, anno MDCCCXLIV detecta, quae Academiae Scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt Auctoris pronepotes *Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss.* (T. 1—2, Petropoli, 1862.)  
*Op. anal.* — Leonhardi Euleri opuscula analytica. Tomus primus: Petropoli MDCCLXXXIII; tomus secundus: Petropoli MDCCLXXXV.  
*A. Petr.* — Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. (6 années: 1777—1782; chaque année comprend deux volumes: I, II.)  
*N. A. Petr.* — Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. (Tomes 1 à 15, années 1783—1802.)

## Beiträge zur Theorie der Intensitätsfunktionen.

Von G. Liechti, Zürich.

### Einleitung.

Die in der Lebensversicherungsmathematik gebräuchlichsten Ausdrücke für die rechnerische Ermittlung der Barwerte von verschiedenartigen Versicherungsverpflichtungen sind im allgemeinen unter der Voraussetzung abgeleitet, dass das Absterben einer gleichaltrigen Gruppe von Lebenden innerhalb eines Jahres gleichmässig erfolge. Solange es sich um Versicherungsleistungen handelt, die am Ende eines Jahres fällig werden, ist die Annahme einer solchen Hypothese nicht erforderlich. Anders verhält es sich dagegen bei Barwerten von Kapitalversicherungen und Renten, welche in einem andern Zeitpunkte als am Ende des Jahres zahlbar sind. Die Hypothese des gleichmässigen Absterbens ist durchaus nicht wissenschaftlich; denn es ist nicht anzunehmen, dass die Intensität des Absterbens, der Grad der Verminderung einer Gruppe von Personen gleichen Alters sich für eine noch so kleine Altersstrecke auf gleicher Höhe halte. Der Prozess, welcher die stetige Abnahme einer beobachteten Anzahl von Lebenden bedingt, ist so kompliziert, dass es schwierig ist, denselben innerhalb kleiner Zeitinter-

valle zu verfolgen und ihn durch ein mathematisches Gesetz auszudrücken.

Die Sterblichkeitsstatistik liefert uns für die ganzzahligen Alter jeweilen die Zahl der Überlebenden, und aus dieser Überlebensordnung ergeben sich dann die in der Praxis gebräuchlichen Werte der Lebenswahrscheinlichkeit und als komplementäre Grösse zu der letzteren die Sterbenswahrscheinlichkeit. Es lassen sich dann mit Hülfe geeigneter Reihenentwicklungen die entsprechenden Zahlwerte auch für Zeitintervalle, welche kleiner als ein Jahr sind, ermitteln, so dass dadurch die Anzahl der Lebenden in einem beliebigen Zeitpunkte fixiert ist.

Zu richtigen Ergebnissen gelangt man allerdings nur dann, wenn das Gesetz, nach welchem das Absterben erfolgt, analytisch darstellbar ist, d. h. wenn die Anzahl der Lebenden explicite als Funktion des Alters berechnet werden kann. Wenn die analytische Struktur des Sterblichkeitsgesetzes bekannt ist, so lassen sich die verschiedenen Probleme der Lebensversicherungsmathematik in ganz eindeutiger Weise lösen; im andern Falle hat man es immer mit Näherungswerten

zu tun, welche allerdings für die Praxis hinreichend genaue Resultate ergeben.

Die Behandlung dieser Fragen ist eng verknüpft mit der Eulerschen Summenformel, welche von Woolhouse in die Theorie der Lebensversicherung eingeführt worden ist. In der vorliegenden Arbeit wollen wir versuchen, an Hand einer andern Reihenentwicklung einige einfache Barwerte von Versicherungsleistungen zu ermitteln, und zu zeigen, wie mit Hülfe der Intensitätsfunktionen solche Probleme in einfacher Weise gelöst werden können. Dieselbe hat neben der grossen Einfachheit den Vorteil, dass die rechnerische Ermittlung der in Frage kommenden Ausdrücke mit jeder wünschbaren Genauigkeit durchgeführt werden kann, und dass sie sich in übersichtlicher Weise nach den verschiedenen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit spezialisieren lässt.

Es sind nun namentlich die Intensitätsfunktionen, welche wesentlich zur Vertiefung solcher Probleme beitragen. Die richtige Erfassung des Begriffes „Intensität der Veränderung einer Funktion“ ist nicht leicht, und es bedarf dazu der konsequenten Auffassung des unendlich Kleinen. Die Notwendigkeit, bei den mathematischen Entwicklungen das Gebiet der höhern Analysis betreten zu müssen, ist aber kein Grund, den Intensitätsfunktionen nicht dasjenige Interesse entgegenzubringen, das sie in Wirklichkeit verdienen. Da wir bezüglich der Absterbeordnung ein analytisches Gesetz nicht als bekannt voraussetzen, so sind wir behufs Auswertung der vorkommenden bestimmten Integrale auf den Weg der mechanischen Quadratur gewiesen.

I. Kapitel.

Entwicklung von  $\int_a^{a+t} f(y) dy$  in eine Reihe.

Wir betrachten vorerst ein unbestimmtes Integral von der Form

$$\int F(y) dy$$

wobei wir voraussetzen, dass  $F(y)$  eine stetige differenzierbare Funktion sei, welche für sämtliche Argumentenwerte eines Intervalles  $o - t$  endliche Funktionswerte besitzt. Mit Hülfe sukzessiver partieller Integration gelangen wir zu folgender Reihe:

$$\int F(y) dy = y F(y) - \frac{y^2}{2!} F'(y) + \dots (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n!} F^{(n-1)}(y) + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \int F^{(n)}(y) y^n dy. \quad (1)$$

Setzen wir in dieser Reihe  $y = t$  und  $y = 0$ , so ergibt sich durch Subtraktion

$$\int_0^t F(y) dy = t F(t) - \frac{t^2}{2!} F'(t) \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n!} F^{(n-1)}(t) + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \int_0^t F^{(n)}(y) y^n dy. \quad (2)$$

Es sei nun

$$F(y) = f(a + t - y) \\ F'(y) = -f'(a + t - y) \\ \text{u. s. f.}$$

dann wird

$$\int_0^t f(a + t - y) dy = t f(a) + \frac{t^2}{2!} f'(a) \dots + \frac{1}{n!} \int_0^t f^{(n)}(a + t - y) y^n dy. \quad (3)$$

Machen wir die Substitution

$$a + t - y = y'$$

so wird

$$-\int_{a+t}^a f(a + t - y) dy = \int_a^{a+t} f(y) dy$$

und Gleichung (3) geht über in

$$\int_a^{a+t} f(y) dy = t \cdot f(a) + \frac{t^2}{2!} f'(a) + \dots + \frac{1}{n!} \int_a^{a+t} f^{(n)}(y) (a + t - y)^n \cdot dy. \quad (4)$$

Zu Gleichung (4) ist zu bemerken, dass sich aus derselben sehr leicht die Taylorsche Reihe ableiten lässt. Man braucht nur  $f(y)$  zu ersetzen durch  $f'(y)$  und dementsprechend  $f(a)$  durch  $f'(a)$  etc.

Das Restglied ist

$$R = \frac{1}{n!} \int_a^{a+t} f^{(n)}(y) (a + t - y)^n dy.$$

Die in Gleichung (2) und (4) gegebenen Entwicklungen sind die Darstellung bestimmter Integrale, welche nach der Methode der mechanischen Quadratur ausgewertet werden.

Dem Ausdruck für das Restglied  $R$  soll noch eine andere Form gegeben werden, welche für die Abschätzung wesentliche Erleichterungen gewährt. Es ist  $f^{(n)}(y)$  eine stetige Funktion im Intervall  $o - t$ . Der Ausdruck  $(a + t - y)^n$  variiert im Intervall  $a$  bis  $a + t$  von  $t^n$  bis  $o$ , hat also konstantes Vorzeichen. Wir können demzufolge den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden.

Bezeichnet  $f^{(n)}(\eta)$  einen Funktionswert, der zwischen dem grössten und kleinsten Werte liegt, welchen  $f^{(n)}(y)$  im betrachteten Intervall annimmt, so wird



Aus obigem Schema folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{+1}^I &= \Delta_0^{II} + \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} \\ \Delta_{+\frac{3}{2}}^{III} &= \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_1^{IV} = \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_0^{IV} + \Delta_{+\frac{1}{2}}^V \\ \Delta_{+2}^{IV} &= \Delta_0^{IV} + 2\Delta_{+\frac{1}{2}}^V + \Delta_0^{VI} + \Delta_{\frac{1}{2}}^{VII} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + \binom{t}{1} \Delta_{+\frac{1}{2}}^I + \binom{t}{2} \left\{ \Delta_0^{II} + \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} \right\} \\ &\quad + \binom{t}{3} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_0^{IV} + \Delta_{+\frac{1}{2}}^V \right\} \dots \\ &= f(x) + \binom{t}{1} \Delta_{+\frac{1}{2}}^I + \binom{t}{2} \Delta_0^{II} \\ &\quad + \left\{ \binom{t}{2} + \binom{t}{3} \right\} \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \left\{ \binom{t}{3} + \binom{t}{4} \right\} \Delta_0^{IV} \dots \\ f(x+t) &= f(x) + \binom{t}{1} \Delta_{+\frac{1}{2}}^I + \binom{t}{2} \Delta_0^{II} + \binom{t+1}{3} \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} \\ &\quad + \binom{t+1}{4} \Delta_0^{IV} \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \Delta_{+\frac{1}{2}}^I &= \Delta_{-\frac{1}{2}}^I + \Delta_0^{II} \\ \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} &= \Delta_{-\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_0^{IV} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + \binom{t}{1} \Delta_{-\frac{1}{2}}^I + \left\{ \binom{t}{1} + \binom{t}{2} \right\} \Delta_0^{II} \\ &\quad + \binom{t+1}{3} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{III} + \left\{ \binom{t+1}{3} + \binom{t+1}{4} \right\} \Delta_0^{IV} \dots \\ f(x+t) &= f(x) + \binom{t}{1} \Delta_{-\frac{1}{2}}^I + \binom{t+1}{2} \Delta_0^{II} \\ &\quad + \binom{t+1}{3} \Delta_{-\frac{1}{2}}^{III} + \binom{t+2}{4} \Delta_0^{IV} \dots \quad (11) \end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel aus (10) und (11) liefert die Form

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + \frac{1}{2} \binom{t}{1} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^I + \Delta_{-\frac{1}{2}}^I \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \binom{t}{2} + \binom{t+1}{2} \right\} \Delta_0^{II} + \frac{1}{2} \binom{t+1}{3} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_{-\frac{1}{2}}^{III} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \binom{t+1}{4} + \binom{t+2}{4} \right\} \Delta_0^{IV} \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^I + \Delta_{-\frac{1}{2}}^I \right\} = \delta_0^I$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^{III} + \Delta_{-\frac{1}{2}}^{III} \right\} = \delta_0^{III}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \Delta_{+\frac{1}{2}}^V + \Delta_{-\frac{1}{2}}^V \right\} = \delta_0^V$$

⋮

so erhalten wir nach Entwicklung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + t \delta_0^I + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \Delta_0^{II} + \frac{t(t^2-1^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \delta_0^{III} \\ &\quad + \frac{t^2(t^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta_0^{IV} + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \delta_0^V + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

Von dieser Reihe ausgehend gelangen wir nun leicht zu einem Werte für den ersten Differentialquotienten. Derselbe ist nämlich gegeben durch:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} &= f'(x) \\ &= \delta_0^I - \frac{1}{3!} \delta_0^{III} + \frac{2^2}{5!} \delta_0^V \dots \quad (13) \end{aligned}$$

Für die praktische Rechnung mag es genügen, die Reihe bei dem Gliede  $\frac{1}{3!} \delta_0^{III}$  abubrechen.

Somit wird angenähert

$$f'(x) = \delta_0^I - \frac{1}{6} \delta_0^{III} \quad (14)$$

Sind nun, wie wir voraussetzen, die Funktionswerte von  $f(x)$  in äquidistanten Punkten des Argumentes bekannt, so lassen sich die  $\delta_0^I$  und  $\delta_0^{III}$  leicht ausdrücken. Es wird nämlich

$$\delta_0^I = \frac{1}{2} \{f(x-1) - f(x+1)\}$$

$$\delta_0^{III} = f(x+1) - f(x-1) + \frac{1}{2} \{f(x-2) - f(x+2)\}$$

und daraus

$$f'(x) = \frac{8 \{f(x-1) - f(x+1)\} - \{f(x-2) - f(x+2)\}}{12} \quad (15)$$

ferner folgt

$$\begin{aligned} {}_0 v_{(x)} &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{8 \{f(x-1) - f(x+1)\} - \{f(x-2) - f(x+2)\}}{12 f(x)} \quad (16) \end{aligned}$$

Identifizieren wir  $f(x)$  mit den Lebenden einer Sterbetafel, so gibt uns Gleichung (16) den angenäherten Wert der Sterbeintensität für einen  $x$ jährigen<sup>1)</sup>.

Die Form, wie sie in Gleichung (16) gegeben ist, kann Anfang und am Ende des Intervalles nicht angewendet am werden, weil sie die Kenntnis symmetrischer Funktions-

<sup>1)</sup> Text-Book Kap. II, Gleichung (21).

werte voraussetzt. Es lässt sich aber, unter Anwendung der weniger konvergenten Entwicklung (10) auch diese Schwierigkeit beseitigen.

Die Ermittlung der Differentialquotienten höherer Ordnung geschieht am besten so, dass man die durch Gleichung (15) dargestellte Operation successive auf die Reihen der  $f'(x), f''(x) \dots$  anwendet.

Wir geben in der folgenden Tabelle die Werte von  $f(x), f'(x), f''(x)$  sowie der zugehörigen Intensitätsfunktionen unter der Annahme, dass  $f(x)$  die Anzahl der Lebenden nach der Sterbetafel  $RF$  bedeute. Die Werte für die Sterbeintensität  $\mu_{(x)}$ , die gemäss dem Gompertz-Makehamschen Gesetze berechnet sind, geben uns in ihrer Vergleichung mit den  ${}_0v_{(x)}$  einen Masstab für die Verwendbarkeit der Gleichung (16).

| Alter<br>$x$ | $f(x)$  | $f'(x)$     | $f''(x)$ | ${}_0v_{(x)} =$      | ${}_1v_{(x)} =$        | Sterbe-<br>intensität<br>$\mu_x$ | $u_x =$               |
|--------------|---------|-------------|----------|----------------------|------------------------|----------------------------------|-----------------------|
|              |         |             |          | $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ |                                  | $\frac{f''(x)}{f(x)}$ |
|              |         |             |          | $10^{-3}$            | $10^{-3}$              | $10^{-3}$                        | $10^{-5}$             |
| 30           | 771 681 | - 5 103.00  | + 41.89  | 6.6129               | 8.2089                 | 6.6129                           | 5.4284                |
| 35           | 745 508 | - 5 396.42  | + 78.71  | 7.2386               | 14.5856                | 7.2301                           | 10.5579               |
| 40           | 717 338 | - 5 916.75  | + 133.62 | 8.2482               | 22.5831                | 8.2482                           | 18.6272               |
| 45           | 685 784 | - 6 771.83  | + 213.49 | 9.8746               | 31.5262                | 9.8743                           | 31.1308               |
| 50           | 648 823 | - 8 106.67  | + 326.90 | 12.4944              | 40.3248                | 12.4946                          | 50.3835               |
| 55           | 603 634 | - 10 090.67 | + 472.24 | 16.7165              | 46.7997                | 16.7164                          | 78.2328               |
| 60           | 546 604 | - 12 856.00 | + 632.38 | 23.5198              | 49.1895                | 23.5194                          | 115.6925              |
| 65           | 473 851 | - 16 339.00 | + 743.06 | 34.4813              | 45.4777                | 34.4814                          | 156.8193              |
| 70           | 382 919 | - 19 967.83 | + 842.78 | 52.1464              | 42.2069                | 52.1450                          | 220.0940              |
| 80           | 166 162 | - 21 013.75 | + 853.74 | 126.4654             | 40.8277                | 126.4680                         | 513.7998              |

### III. Kapitel.

#### 1. Die Intensität der Verzinsung.

Ein Kapital 1 werde zu einem Zinsfusse  $i$  an Zins gelegt. Dasselbe wächst in der Zeit  $t$  an auf

$$(1+i)^t = f(t).$$

Die Intensität der Zunahme des Kapitals bei kontinuierlicher Verzinsung ist dargestellt durch

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = Lg(1+i) = \delta. \quad (1)$$

Die Intensität der Verzinsung ist somit konstant für jeden effektiven Zinsfuss  $i$ .

Es sei nun  $\varphi(x+t)$  der Wert eines Kapitals im Zeitpunkt  $(x+t)$ , dann ist der Zinsertrag für das Zeitintervall  $0-1$  dargestellt durch

$$\int_0^1 \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt$$

und bezogen auf das Kapital 1

$$\frac{\int_0^1 \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt}{\varphi(x)} \quad (2)$$

Dieser Ausdruck ist nichts anderes als der Wert des effektiven Zinsfusses  $i$ . Zu Gleichung (2) wollen wir noch bemerken, dass  $\delta_{x+t}$  als konstant anzusehen ist. Wir wollen aber obige Form bestehen lassen, weil sie in Übereinstimmung steht mit gewissen Ausdrücken, welche in der Lebensversicherungsmathematik eine grosse Rolle spielen. Identifizieren wir nämlich  $\varphi(x+t)$  mit der Anzahl der Lebenden des Alters  $x+t$ ,  $\delta_{x+t}$  mit der Sterbeintensität, so gibt uns Gleichung (2) die Abnahme der Gesamtheit der Lebenden infolge der Sterblichkeit in der Altersstrecke  $x$  bis  $(x+1)$ , bezogen auf einen Lebenden, oder mit andern Worten, die Sterbenswahrscheinlichkeit des  $x$ jährigen.

Setzen wir in Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= (1+i)^t \\ \varphi(x) &= 1 \end{aligned}$$

so erhalten wir zwischen den Grenzen 0 und 1

$$\int_0^1 (1+i)^t \delta_t dt = \delta \int_0^1 (1+i)^t dt.$$

Dies muss gleich dem effektiven Zinsfusse  $i$  sein. Das Integral können wir geschlossen auswerten. Wenn wir aber die durch Gleichung (8), Kap. I, gegebene Formel anwenden, so gelangen wir, unter Berücksichtigung, dass

$${}_0v_{(0)} = {}_1v_{(0)} = \dots = {}_n v_{(0)} = \delta$$

zu folgender Reihe

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 (1+i)^t dt &= \delta \left\{ 1 + \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{3!} + \dots \text{in inf.} \right\} = e^\delta - 1 \\ e^\delta &= e^{Lg(1+i)} = (1+i). \end{aligned}$$

Somit

$$\delta \int_0^1 (1+i)^t dt = i \quad \text{q. e. d.} \quad (3)$$

Das Kapital 1 am Anfang des Jahres ist bis ans Ende des Jahres angewachsen auf

$$\int_0^1 (1+i)^t dt = \frac{i}{\delta} \quad (4)$$

und folglich ist der Zinsertrag bei kontinuierlicher Verzinsung

$$\left( \frac{i}{\delta} - 1 \right)$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass der Zins  $m$  Mal im Jahre entrichtet, aber nicht kapitalisiert werde.

Der Zinsertrag in einem Zeitabschnitt  $\frac{1}{m}$  ist dargestellt durch

$$\int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt$$

und für die Zeit eines Jahres somit

$$m \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt.$$

Der Ausdruck

$$\frac{m \int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt}{\varphi(x)} \quad (5)$$

gibt uns den sogenannten nominellen Zinsfuß, welcher also der  $m$  maligen Verzinsung im Laufe eines Jahres entspricht.

Die gebräuchliche Bezeichnung dafür ist  $j^{(m)}$ . In der Grenze, d. h. für  $m = \infty$  wird

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta$$

Wenn  $\varphi(x)$  die Anzahl der Lebenden,  $\delta_{x+t}$  die Sterbeintensität bedeutet, so gibt uns

$$\frac{\int_0^{\frac{1}{m}} \varphi(x+t) \delta_{x+t} dt}{\varphi(x)}$$

die Wahrscheinlichkeit für einen  $x$ jährigen, im Zeitabschnitt  $0 - \frac{1}{m}$  zu sterben, oder die Sterblichkeitsrate für die Altersstrecke  $0 - \frac{1}{m}$ .

Setzen wir wiederum  $\varphi(x+t) = (1+i)^t$ , so wird

$$\begin{aligned} m \int_0^{\frac{1}{m}} (1+i)^t \delta_t dt &= m \delta \left\{ \frac{1}{m} + \frac{\delta}{2!} \left(\frac{1}{m}\right)^2 + \dots \text{in inf.} \right\} \\ &= m \left\{ e^{\frac{1}{m} \delta} - 1 \right\} = m \left\{ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\} \end{aligned}$$

somit

$$j^{(m)} = m \left\{ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\} \quad (6)$$

woraus

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{j^{(m)}}{m}$$

und

$$i = \left( 1 + \frac{j^{(m)}}{m} \right)^m - 1. \quad (7)$$

Die Gleichungen (6) und (7) geben uns den bekannten Zusammenhang zwischen dem effektiven und nominellen Zinsfuß.

## 2. Zeitrenten.

Der Barwert der kontinuierlich während  $n$  Jahren zahlbaren Zeitrente 1 ist dargestellt durch

$$\bar{a}_{n|} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 v^{\lambda+t} dt \quad (8)$$

wobei  $v = \frac{1}{1+i}$ .

Wie man sich leicht überzeugen kann, werden die Intensitätsfunktionen von  $v^{\lambda+t}$  und den Ableitungen konstant, nämlich  $Lg v$ .

Legt man wiederum Gleichung (8) in Kap. I zugrunde, so folgt

$$\bar{a}_{n|} = \sum_{\lambda=0}^{(n-1)} v^\lambda \left\{ 1 + \frac{1}{2!} Lg v + \frac{1}{3!} (Lg v)^2 + \dots \text{in inf.} \right\}$$

Die Klammer unter den Summenzeichen ist aber

$$\frac{e^{Lg v} - 1}{Lg v} = \frac{1-v}{\delta}$$

weil bekanntlich  $Lg v = -\delta$ , somit wird

$$\bar{a}_{n|} = \frac{1-v}{\delta} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^\lambda = \frac{1-v}{\delta v} a_{n|}$$

Dabei ist  $a_{n|} = v + v^2 + \dots + v^n$  der Barwert der jährlich nachschussweise zahlbaren Zeitrente 1.

Da

$$\frac{1-v}{\delta v} = \frac{i}{\delta}$$

so wird schliesslich

$$\bar{a}_{n|} = \frac{i}{\delta} a_{n|} \quad (9)$$

Lassen wir in der letzten Gleichung  $n = \infty$  werden, so gelangen wir zum Barwert der ewigen (perpetuellen) kontinuierlichen Zeitrente.

Da

$$a_\infty = \frac{1}{i}$$

so wird

$$\bar{a}_\infty = \frac{1}{\delta}. \quad (10)$$

Ist die Zeitrente  $m$ mal jährlich zahlbar, je im Betrage von  $\frac{1}{m}$ , so wird ihr Barwert

$$a_{n|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left\{ v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{m}{m}} \right\} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^\lambda$$

Der Ausdruck vor dem Summenzeichen ist aber unter Berücksichtigung von Gleichung (6)

$$v \cdot \frac{i}{m \left\{ (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right\}} = v \cdot \frac{i}{j^{(m)}}$$

folglich

$$a_{n|}^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} \sum_{\lambda=0}^{n-1} v^{\lambda+1} = \frac{i}{j^{(m)}} \cdot a_{n|} \quad (11)$$

für  $n = \infty$  wird

$$a_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} \quad (12)$$

#### IV. Kapitel.

### Die Sterbeintensität und ihre Anwendungen.

#### 1. Die Sterbeintensität und ihre Abhängigkeit von den verschiedenen Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit innerhalb eines Jahres.

Es sei  $l_x$  die Anzahl der Lebenden vom Alter  $x$ . Die Sterbeintensität wird dann bekanntlich definiert durch den Ausdruck

$$\mu_x = - \frac{1}{l_x} \frac{d l_x}{d x}$$

Wenn  $l_x$  als analytische Funktion des Alters  $x$  bekannt ist, so wird die Ermittlung von  $\mu_x$  keine weiteren Schwierigkeiten bieten. Ist aber das Sterblichkeitsgesetz, auf welchem die Tafel aufgebaut ist, nicht bekannt, so sind wir zur Bestimmung von  $\mu_x$  auf ein Näherungsverfahren angewiesen. Die Gleichung (16) des Kap. II ist die gebräuchlichste Form, welche zur numerischen Berechnung der Sterbeintensität dient. Die Daten einer Sterbetafel gestatten uns aber die Bestimmung der  $\mu_x$  nur für ganze Altersjahre, so dass man oft genötigt ist, über den Verlauf innerhalb von Zeitabschnitten kleiner als ein Jahr gewisse Voraussetzungen zu machen.

a) Nehmen wir vorerst an, dass man  $\mu_x$  während der Dauer eines Jahres als konstant ansehen könne. Die Zahl der Lebenden in einem beliebigen Zeitpunkte innerhalb eines Jahres ergibt sich dann durch Lösung der Differentialgleichung

$$\mu_{x+t} = - \frac{1}{l_{x+t}} \frac{d l_{x+t}}{d t}$$

Dabei ist  $\mu_{x+t} = \mu_x$  konstant.

Integrieren wir über das Intervall  $0 - t$ , so folgt

$$l_{x+t} = l_x e^{-\mu_x t} \quad (1)$$

Der Verlauf der Lebenden ist also durch eine Exponentialkurve dargestellt.

b)  $\mu_{x+t}$  verlaufe innerhalb eines Jahres linear, so dass also

$$\mu_{x+t} = \mu_x - t(\mu_x - \mu_{x+1}) = \mu_x - t A \mu_x$$

Es wird dann die Anzahl der Lebenden im Zeitpunkte  $x + t$  gegeben durch

$$l_{x+t} = l_x \cdot e^{-\mu_x t + \frac{t^2}{2} \cdot A \mu_x} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$l_{x+t} = e^{\frac{t^2}{2} A \mu_x} \cdot l_{x+t} \quad (3)$$

Diese letzte Gleichung gibt uns ein Mass für die Abweichung, wenn wir die eine oder die andere Voraussetzung über den Verlauf der Sterbeintensität machen.

c) Untersuchen wir zum Schlusse noch die in der Praxis gebräuchliche Annahme, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilen. In diesem Falle ist die Änderung der Anzahl der Lebenden in der Zeitstrecke  $d_x$  dargestellt durch

$$- d l_x = (l_x - l_{x+1}) d x$$

woraus

$$\mu_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = q_x \quad (4)$$

Es wird also die Sterbeintensität gleich der Sterbenswahrscheinlichkeit. Wenn man aber die zahlenmässige Vergleichung zwischen  $\mu_x$  und  $q_x$  macht, so zeigt sich, dass diese Übereinstimmung eine sehr rohe ist, und daraus können wir rückwärts schliessen, wie wenig die Annahme des gleichmässigen Absterbens innerhalb eines Jahres gerechtfertigt ist. Wenn wir diese letztere Voraussetzung machen, so heisst das nichts anderes, als dass man das Absterben einer gleichaltrigen Gruppe von Lebenden während eines Jahres der Moivreschen Hypothese unterwirft.

#### 2. Die mittlere Lebensdauer.

Die strenge Form derselben ist

$$\bar{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt \quad (5)$$

Das Integral unter dem Summenzeichen ist der Ausdruck für die Zeit, welche von  $l_{x+\lambda}$  am Anfange des Jahres vorhandenen Lebenden im folgenden Jahre durchlebt wird.

Nach den Ausführungen des I. Kapitels ist aber

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt = l_{x+\lambda} + \frac{1}{2!} l'_{x+\lambda} + \frac{1}{3!} l''_{x+\lambda} \dots$$

Nun besteht die Relation

$$l'_{x+\lambda} = - l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}$$

Setzen wir

$$l''_{x+\lambda} = l_{x+\lambda} u_{x+\lambda}$$

so folgt

$$u_{x+\lambda} = \frac{l'_{x+\lambda}}{l_{x+\lambda}} = - \frac{1}{l_{x+\lambda}} \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d x + \lambda}$$

Da die Kurve der Lebenden im allgemeinen zwei Wendepunkte aufweist, so hat  $l''_{x+\lambda}$  im Verlaufe der Sterbetafel nicht überall gleiches Vorzeichen. Eine Summation über einen Ausdruck, welcher  $u_{x+\lambda}$  enthält, wird also positiv oder negativ einzuführen sein, je nach dem Alter, von dem ab der Summationsindex läuft. Wir setzen deshalb vor jeden Ausdruck, der  $u_{x+\lambda}$  enthält, den Buchstaben  $\varepsilon_x$  wobei  $\varepsilon_x = +1$  oder  $-1$  ist, je nach dem Werte von  $x$ .

Ferner ist

$$u_{x+\lambda} = -\frac{1}{l_{x+\lambda}} \left\{ l_{x+\lambda} \frac{d \mu_{x+\lambda}}{d x+\lambda} + \mu_{x+\lambda} \frac{d l_{x+\lambda}}{d x+\lambda} \right\} \\ = -\left\{ \frac{d \mu_{x+\lambda}}{d x+\lambda} - \mu_{x+\lambda}^2 \right\}$$

Als Intensitätsfunktion zweiter Ordnung<sup>1)</sup> für die Sterblichkeit werde bezeichnet:

$$\frac{1}{\mu_{x+\lambda}} \frac{d \mu_{x+\lambda}}{d x+\lambda} = \mu_{x+\lambda}^{II}$$

Es wird somit

$$u_{x+\lambda} = \mu_{x+\lambda} \left\{ \mu_{x+\lambda} - \mu_{x+\lambda}^{II} \right\}$$

und folglich

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt = l_{x+\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{2!} \mu_{x+\lambda} + \frac{1}{3!} \varepsilon_{x+\lambda} u_{x+\lambda} \right\}$$

$u_{x+\lambda}$  kann auch folgendermassen geschrieben werden

$$u_{x+\lambda} = \frac{l'_{x+\lambda}}{l_{x+\lambda}} \cdot \frac{l''_{x+\lambda}}{l'_{x+\lambda}}$$

Dies ist aber nichts anderes als das Produkt der Intensitätsfunktionen der ursprünglichen Funktion  $l_{x+\lambda}$  und ihres ersten Differentialquotienten.

Wir wollen die Reihe ihrer starken Konvergenz wegen mit dem dritten Gliede abbrechen; denn aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die folgenden Glieder keinen grossen Einfluss mehr ausüben.

Es wird also schliesslich

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \mu_{x+\lambda} \right\} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{l_x} \varepsilon_x \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda}. \quad (6)$$

Begnügen wir uns mit einer weniger starken Annäherung, so können wir setzen

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \mu_{x+\lambda} \right\}. \quad (7)$$

Aus Gleichung (7) folgt

$$l_x \overset{\circ}{e}_x - l_{x+1} e_{x+1} = l_x - \frac{1}{2} l_x \mu_x$$

woraus

$$e_x = \left( 1 - \frac{1}{2} \mu_x \right) + p_x \overset{\circ}{e}_{x+1}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Prof. Dr. Chr. Moser: Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktionen. Heft 1 der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker.

Diese Rekursionsformel gestattet uns die Berechnung der vollständigen mittleren Lebensdauer aus den Reihen der  $p_x$  und  $\mu_x$ .

Setzen wir in Gleichung (6)  $\mu_x = q_x$ , d. h. legen wir ein gleichmässiges Absterben zugrunde, so wird

$$u_{x+\lambda} = 0$$

und da

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} q_{x+\lambda} = l_x$$

so wird

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda} - \frac{1}{2} l_x \quad (9)$$

oder

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda+1} = \frac{1}{2} + \frac{L_{x+1}}{l_x} \quad (10)$$

wobei

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} l_{x+\lambda+1} = l_{x+1} + l_{x+2} + \dots = L_{x+1}$$

Auf ähnlichem Wege kann man zu der Anzahl von Jahren gelangen, welche  $l_x$  Personen durchschnittlich in den nächsten  $n$  Jahren durchleben.

Dieser Wert ist dargestellt durch

$$|_n \overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt$$

oder

$$|_n \overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x} \left\{ L_x - L_{x+n} - \frac{1}{2!} \sum_{\lambda=0}^{n-1} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} \right. \\ \left. - \frac{1}{3!} \varepsilon_x \sum_{\lambda=0}^{n-1} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda} \right\} \quad (11)$$

Man wird oft vor die Frage gestellt, namentlich bei der Behandlung der vollständigen Renten, die Zeit zu ermitteln, welche die in einem gewissen Zeitintervall Gestorbenen durchschnittlich innerhalb demselben noch durchlebt haben.

Nehmen wir als Zeitabschnitt  $n$  Jahre.

Die von den Gestorbenen des ersten Jahres durchlebte Zeit ist

$$\int_0^1 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt.$$

Für die im zweiten Jahre Gestorbenen ergibt sich als durchlebte Zeit

$$(l_{x+1} - l_{x+2}) + \int_0^1 t l_{x+1+t} \mu_{x+1+t} dt$$

u. s. f.

Für das  $n^{\text{te}}$  Jahr folgt

$$(n-1)(l_{x+n-1} - l_{x+n}) + \int_0^1 t l_{x+n-1+t} \mu_{x+n-1+t} dt.$$

Es wird also von den innerhalb  $n$  Jahren Gestorbenen eine Zeit durchlebt von

$$(l_x - l_{x+n}) ({}_1n \ddot{e}_x) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \lambda (l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1}) + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 t l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt.$$

Es ist aber

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} \lambda (l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1}) = L_{x+1} - L_{x+n} - (n-1) l_{x+n}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \int_0^1 t l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt = \sum_{\lambda=0}^{n-1} -l_{x+\lambda+1} + \int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt$$

$$= -L_{x+1} + L_{x+n+1} + l_x {}_1n \ddot{e}_x,$$

folglich

$$({}_1n \ddot{e}_x) = \frac{l_x {}_1n \ddot{e}_x - n \cdot l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}} \quad (12)$$

Der Zähler ist offenbar die von sämtlichen zu Beginn des Intervalles vorhandenen  $l_x$  Lebenden im Zeitraum von  $n$  Jahren durchlebte Zeit, vermindert um die von den  $l_{x+n}$  Überlebenden durchlebte Zeit. Das durchschnittliche Alter beim Tode innerhalb der nächsten  $n$  Jahre ist somit

$$x + ({}_1n \ddot{e}_x).$$

Wir haben in diesem Abschnitt die Fragen, welche an die mittlere Lebensdauer anknüpfen, behandelt, ohne irgendwelche Voraussetzungen über den Verlauf des Absterbens zu machen.

Für den Spezialfall, dass sich die Sterbefälle gleichmässig über das Jahr verteilen, ist in den gefundenen Ausdrücken überall

$$u_{x+\lambda} = 0$$

und

$$\mu_{x+\lambda} = q_{x+\lambda}$$

zu setzen.

### 3. Die Sterbenswahrscheinlichkeit als Funktion der Sterbeintensität.

Die Anzahl der von  $l_x$  Personen im Laufe des folgenden Jahres Gestorbenen ist

$$d_x = \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt.$$

Es kann somit die Sterbenswahrscheinlichkeit  $q_x$  dargestellt werden durch

$$q_x = \frac{\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt}{l_x}$$

Es ist aber

$$\int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt = l_x \mu_x + \frac{1}{2!} \frac{d l_x \mu_x}{d_x} + \dots$$

$$= l_x \left\{ \mu_x - \frac{1}{2} \varepsilon_x u_x \right\}.$$

Daraus folgt

$$q_x = \mu_x - \frac{1}{2} \varepsilon_x u_x = \mu_x - \frac{1}{2} \varepsilon_x (\mu_x^2 - \mu_x \mu_x^{II})$$

oder

$$q_x = \mu_x \left\{ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_x (\mu_x - \mu_x^{II}) \right\}. \quad (13)$$

(Über den Zusammenhang zwischen  $q_x$  und  $\mu_x$  siehe auch *C. Landré*, Mathematisch-technisches Kapitel zur Lebensversicherung, Abschnitt 41.)

### 4. Kapitalversicherungen auf den Todesfall.

#### a) Barwert der Kapitalversicherung 1, zahlbar am Ende des Jahres, in welchem der Versicherte stirbt.

Der Barwert der Kapitalversicherung 1, zahlbar am Ende des Sterbejahres, ist darstellbar durch

$$A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt. \quad (14)$$

Durch die Substitution

$$\mu_{x+\lambda+t} = - \frac{1}{l_{x+\lambda+t}} \frac{d l_{x+\lambda+t}}{dt}$$

kann der obige Ausdruck umgeformt werden in

$$A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \{ l_{x+\lambda} - l_{x+\lambda+1} \} = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} d_{x+\lambda}. \quad (15)$$

Nach früherem können wir aber auch mit grosser Annäherung setzen

$$\int_0^1 l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt = l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} + \frac{1}{2!} \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d_x}$$

$$= l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} - \frac{1}{2} \varepsilon_{x+\lambda} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda}$$

folglich wird

$$A_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} - \frac{1}{2!} \varepsilon_x U_x \quad (16)$$

Dabei ist

$$U_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda}.$$

#### b) Barwert der Todesfallversicherung 1, zahlbar am Ende des Sterbeabschnittes $\frac{1}{m}$ .

Wir denken uns das Jahr in  $m$  gleiche Zeitabschnitte von der Länge  $\frac{1}{m}$  eingeteilt.

Der Barwert der Sterbesummen für die im ersten Intervall Gestorbenen ist

$$v^{\frac{1}{m}} \int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt = v^{\frac{1}{m}} l_{x+\lambda} \left\{ \frac{1}{m} \mu_{x+\lambda} - \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{2} u_{x+\lambda} \right\}$$

für den zweiten Zeitabschnitt finden wir

$$\begin{aligned} v^{\frac{2}{m}} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt &= v^{\frac{2}{m}} \left\{ \int_0^{\frac{2}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}} \right\} \\ &= v^{\frac{2}{m}} l_{x+\lambda} \left\{ \frac{1}{m} \mu_{x+\lambda} - \frac{\left(\frac{2}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{m}\right)^2}{2} u_{x+\lambda} \right\} \end{aligned}$$

u. s. f.

Analog gestalten sich die Überlegungen für jedes folgende Intervall, so dass, wenn wir vorerst nur das erste Jahr berücksichtigen, der gesuchte Barwert folgende Form annimmt

$$l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} - l_{x+\lambda} u_{x+\lambda} \sum_{k=1}^m \frac{2k-1}{2m^2} v^{\frac{k}{m}} \quad (17)$$

Die Summe  $\sum_{k=1}^m \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}}$  gibt, wie man sich leicht

überzeugen kann,  $\frac{i v}{j^{(m)}}$ , wobei  $j^{(m)}$  den in Gleichung (6), Kapitel III, ermittelten Wert bedeutet. Gleichung (17) geht dann über in

$$\begin{aligned} \frac{i}{j^m} \left\{ v l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} + \frac{1}{2m} v l_{x+\lambda} u_{x+\lambda} \right\} \\ - \frac{1}{m^2} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda} \sum_{K=1}^m k v^{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\frac{1}{m^2} \sum_{K=1}^m k v^{\frac{k}{m}} = \frac{i v}{(j^{(m)})^2} \left( 1 + \frac{j^{(m)}}{m} \right) - \frac{v}{j^{(m)}}.$$

Summieren wir von  $\lambda = 0$  bis  $\infty$ , unter Berücksichtigung der Diskontierung und unter Zuhilfenahme von Gleichung (16), so wird

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x + \frac{i}{j^{(m)}} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{m-1}{2m} - \frac{1}{j^{(m)}} \right\} \varepsilon_x U_x \quad (18)$$

Es ist aber

$$\frac{1}{i} = a_\infty; \quad \frac{1}{j^{(m)}} = a_\infty^{(m)},$$

folglich können wir auch setzen

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x + \frac{i}{j^{(m)}} \left\{ a_\infty - a_\infty^{(m)} + \frac{m-1}{2m} \right\} \varepsilon_x U_x. \quad (19)$$

Wenn wir ein gleichmässiges Absterben innerhalb eines Jahres voraussetzen, so wird

$$U_x = 0,$$

weil dann  $l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}$  als konstant anzusehen ist.

Unter dieser Annahme würde dann

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x. \quad (20)$$

(Text-Book Kap. IX, Gl. 10.)

### c) Barwert der Todesfallversicherung 1, zahlbar im Momente des Todes.

Der allgemeine Ausdruck für den gesuchten Barwert ist offenbar

$$\bar{A}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt. \quad (21)$$

Durch die Substitution  $l_{x+t} \mu_{x+t} = -dl_{x+t}$  wird obiger Summenausdruck übergeführt in

$$\begin{aligned} l_x \bar{A}_x &= \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^\lambda \{ l_{x+\lambda} - v l_{x+\lambda+1} \} \\ &+ Lg v \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} dt. \end{aligned}$$

Die erste Summe ist

$$l_x \{ a_x - a_x \} = l_x$$

die zweite

$$Lg v l_x \bar{a}_x = -\delta l_x \bar{a}_x$$

und somit

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x. \quad (22)$$

Wenn wir in den Gleichungen (18) und (19) des vorigen Abschnittes  $m = \infty$  setzen, so gelangen wir zu einem angenäherten Werte von  $\bar{A}_x$ .

Da

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta$$

so wird

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \right\} \varepsilon_x U_x \quad (23)$$

oder

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta} \left\{ a_\infty + \frac{1}{2} - \bar{a}_\infty \right\} \varepsilon_x U_x. \quad (24)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilen, wird  $U_x = 0$  und folglich

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x. \quad (25)$$

Für den Barwert von  $\bar{A}_x$  wollen wir noch eine Reihe herleiten, welche ihrer Einfachheit wegen einiges Interesse bietet.

Betrachten wir vorerst das Integral

$$\int_0^1 v^t \varphi(t) dt = \int_0^1 F(t) dt.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, wird

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= \varphi(0) \\ F^{(1)} &= \varphi'(0) - \delta \varphi(0) \\ F^{(2)} &= \varphi''(0) - 2 \delta \varphi'(0) + \delta^2 \varphi(0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz für die Differentialquotienten an der untern Grenze des Intervalles ist leicht ersichtlich.

Nun haben wir gefunden, dass

$$\int_0^1 F(t) dt = F(0) + \frac{1}{2!} F^{(1)} + \frac{1}{3!} F^{(2)} \dots$$

Unter Berücksichtigung des vorhergehenden Gleichungssystems wird dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^t \varphi(t) dt &= \int_0^1 F(t) dt = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{\delta}{2!} + \frac{\delta^2}{3!} - \dots \right\} \\ &+ \varphi'(0) \left\{ \frac{1}{2!} - \delta \frac{\binom{2}{1}}{3!} + \delta^2 \frac{\binom{3}{2}}{4!} \dots \right\} \\ &+ \varphi''(0) \left\{ \frac{1}{3!} - \delta \frac{\binom{3}{1}}{4!} + \delta^2 \frac{\binom{4}{2}}{5!} \dots \right\} \end{aligned}$$

Der Koeffizient von  $\varphi(0)$  kann gesetzt werden

$$\frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} = \frac{i v}{\delta}$$

Zur Ermittlung der zweiten Summe setzen wir die Reihe an

$$R = \frac{\delta}{2!} - \frac{\delta^2}{3!} + \frac{\delta^3}{4!} \dots$$

Es ist dann offenbar der Koeffizient von  $\varphi'(0)$  dargestellt durch  $\frac{dR}{d\delta}$ .

Nun ist

$$R = \frac{e^{-\delta} - 1 + \delta}{\delta}$$

woraus folgt

$$\frac{dR}{d\delta} = \frac{i v}{\delta^2} - \frac{v}{\delta}$$

Identifizieren wir nun  $\varphi(0)$  mit  $l_x \mu_x$ ,  $\varphi'(0)$  mit  $\frac{d l_x \mu_x}{d x} = -l_x u_x$ , so wird

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} - \frac{1}{\delta} \varepsilon_x U_x \right\} + \frac{1}{\delta} \varepsilon_x U_x.$$

Unter Verwendung von Gleichung (16) ergibt sich schliesslich

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x + \frac{i}{\delta} \left\{ \frac{1}{i} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\delta} \right\} \varepsilon_x U_x.$$

Diese Form ist mit Gleichung (23) identisch.

### 5. Barwert der lebenslänglich zahlbaren Leibrente 1.

#### a) Barwert der jährlich zahlbaren Leibrente 1.

Von  $l_x$  zu Anfang des Jahres vorhandenen Personen leben am Ende des Jahres noch

$$l_x - \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt.$$

Der Barwert der an sie auszurichtenden Renten ist offenbar

$$v \left\{ l_x - \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} dt \right\}.$$

Führen wir diesen Gedankengang für sämtliche folgenden Jahre durch, so kann der gesuchte Barwert in folgender Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} l_x a_x &= \{ v l_x + v^2 l_{x+1} + \dots \} \\ &- \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt. \end{aligned} \quad (26)$$

Die hier auftretende Summe ist aber nichts anderes als  $l_x A_x$ .

Ferner ist

$$v l_x + v^2 l_{x+1} + \dots = v (a_x + 1).$$

Es wird somit

$$a_x = v (a_x + 1) - A_x,$$

woraus

$$a_x = \frac{v - A_x}{1 - v} \quad (27)$$

oder

$$a_x = \frac{1 - (1+i) A_x}{i}. \quad (28)$$

#### b) Barwert der Leibrente 1, zahlbar in $m$ Raten.

Die Anzahl der Lebenden im Alter  $x + \frac{1}{m}$  ist ausgedrückt durch

$$l_x - \int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+t} \mu_{x+t} dt,$$

somit der Barwert der an sie auszurichtenden Rentenraten

$$\frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \left\{ l_x - \int_0^{\frac{1}{m}} l_{x+t} \mu_{x+t} dt \right\}.$$

Für den zweiten Zeitabschnitt finden wir analog

$$\frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} \left\{ l_x - \int_0^{\frac{2}{m}} l_{x+t} \mu_{x+t} dt \right\}.$$

$$\vdots$$

Für das erste Jahr ergibt sich somit ein Barwert von

$$l_x \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} \int_0^{\frac{k}{m}} l_{x+t} \mu_{x+t} dt.$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} = \frac{i v}{j^{(m)}}.$$

Ferner wird

$$\int_0^{\frac{k}{m}} l_{x+t} \mu_{x+t} dt = \frac{k}{m} l_x \mu_x + \frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2}{2} \frac{d l_x \mu_x}{d x},$$

folglich der zweite Summenausdruck

$$l_x \mu_x \sum_{k=1}^m \frac{k}{m^2} v^{\frac{k}{m}} + \frac{1}{2} \frac{d l_x \mu_x}{d x} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^2 v^{\frac{k}{m}}.$$

Die nur vom Abzinsungsfaktor  $v$  abhängigen Summen lassen sich ermitteln zu

$$\sum_{k=1}^m \frac{k}{m^2} v^{\frac{k}{m}} = \frac{i v}{(j^{(m)})^2} \left\{ 1 + \frac{j^{(m)}}{m} \right\} - \frac{v}{j^{(m)}},$$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m}\right)^2 \frac{1}{m} =$$

$$\frac{i v}{(j^{(m)})^2} \left\{ 1 + \frac{j^{(m)}}{m} \right\} \left\{ \frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{2m} - \frac{1}{i} \right\} - \frac{v}{2j}.$$

Wenn wir nun die Summation über sämtliche Altersjahre durchführen und die Gleichungen (18), (27) und (28) berücksichtigen, so kann nach geeigneter Anordnung gesetzt werden:

$$a_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} v (a_x + 1) - \frac{1}{j^{(m)}} \left( 1 + \frac{j^{(m)}}{m} \right) A_x^{(m)} + \frac{1}{j} A_x.$$

Dieser Ausdruck kann aber auch geschrieben werden zu

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} - \left( \frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m} \right) A_x^{(m)} \quad (29)$$

Es ist dabei  $A_x^{(m)}$  nach Gleichung (18) berechnet.

Diese Form für  $a_x^{(m)}$  stimmt überein mit derjenigen, welche sich unter der Voraussetzung gleichmässigen Absterbens ergibt (Text-Book, Kap. IX, Gl. 11), nur ist zu berücksichtigen, dass die zugehörigen Werte von  $A_x^{(m)}$  nicht als identisch anzusehen sind. Gleichung (29) ist streng.

Stützen wir uns auf die Hypothese der gleichmässigen Verteilung der Sterbefälle über das Jahr, so wird, da nach Gleichung (20)

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{j^{(m)}} A_x,$$

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{j^{(m)}} \left\{ 1 - i A_x \left( \frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m} \right) \right\}. \quad (30)$$

Zu den gefundenen Gleichungen für  $a_x^{(m)}$  wollen wir noch bemerken, dass  $\frac{1}{j^{(m)}} + \frac{1}{m}$  den Barwert der ewig vorschussweise in Raten von  $\frac{1}{m}$  zahlbaren Zeitrente 1 bedeutet.

### c) Barwert der kontinuierlich zahlbaren Leibrente 1.

Der Barwert der kontinuierlich zahlbaren Leibrente 1 ist gegeben durch

$$\bar{a}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} dt. \quad (31)$$

Setzen wir in Gleichung (29) des vorigen Abschnittes  $m = \infty$ , so wird, da

$$\lim_{m=\infty} j^{(m)} = \delta,$$

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} (1 - \bar{A}_x) \quad (32)$$

woraus auch folgt

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x. \quad (33)$$

Diese letzten Gleichungen stellen uns den mathematisch genauen Zusammenhang zwischen  $\bar{A}_x$  und  $\bar{a}_x$  dar (Text-Book, Kap. X, Art. 16).

Setzen wir gleichmässiges Absterben voraus, so wird nach früherem

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

und folglich

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta^2} A_x. \quad (34)$$

Für das Integral

$$\int_0^1 v^t l_{x+t} dt$$

können wir eine Reihenentwicklung herleiten, welche uns gestattet, den Barwert  $\bar{a}_x$  auf anderem Wege zu ermitteln.

Substituiert man

$$l_{x+t} = l_x - \int_0^t l_{x+t} \mu_{x+t} dt = l_x - t l_x \mu_x - \frac{t^2}{2!} \frac{d l_x \mu_x}{d x} \dots$$

so wird

$$\int_0^1 v^t l_{x+t} dt = l_x \int_0^1 v^t dt - l_x \mu_x \int_0^1 t v^t dt + l_x \varepsilon_x u_x \int_0^1 t^2 v^t dt$$

Die hier auftretenden Integrale lassen sich leicht auswerten. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_0^1 v^t dt &= \frac{iv}{\delta} \\ \int_0^1 t v^t dt &= -\frac{v}{\delta} + \frac{iv}{\delta^2} \\ \int_0^1 t^2 v^t dt &= -\frac{v}{\delta} + \frac{2}{\delta} \left\{ -\frac{v}{\delta} + \frac{iv}{\delta^2} \right\} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Nach durchgeführter Summation über alle Altersjahre erhält man für  $\bar{a}_x$  den angenäherten Wert

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta^2} A_x + \frac{1}{\delta^2} \left[ \frac{i}{\delta} - \left( 1 + \frac{i}{2} \right) \right] \varepsilon_x U_x. \quad (35)$$

### 6. Die vollständigen Renten.

a) Die pro rata der im Todesjahre durchlebten Zeit zahlbare Schlussrente sei am Ende desselben zahlbar.

Da bei den vollständigen Renten für die im Sterbejahre durchlebte Zeit noch eine Rate gewährt wird, so ist offenbar für das erste Jahr der Barwert der fällig werdenden Renten

$$v \left\{ l_{x+1} + \int_0^1 t l_{x+t} \mu_{x+t} dt \right\} = v \int_0^1 l_{x+t} dt.$$

$\int_0^1 l_{x+t} dt$  gibt uns die Zeit, welche von  $l_x$  am Anfang des Jahres vorhandenen Lebenden im folgenden Jahre durchlebt wird, und der gesuchte Rentenbarwert ist offenbar proportional dieser Zeit.

Es wird somit

$$l_x \bar{a}_x = \sum_{\lambda=0}^{\infty} v^{\lambda+1} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt. \quad (36)$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} \int_0^1 l_{x+\lambda+t} dt &= l_{x+\lambda} - \frac{1}{2!} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} \\ &\quad - \frac{1}{3!} l_{x+\lambda} u_{x+\lambda}, \end{aligned}$$

so folgt

$$l_x \bar{a}_x = l_x (a_x + 1) v - \frac{1}{2} l_x A_x - \frac{5}{12} \varepsilon_x l_x U_x$$

oder

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} A_x - \frac{5}{12} \varepsilon_x U_x. \quad (37)$$

Im Falle gleichmässigen Ablebens wird das letzte Glied 0 und somit

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{2} A_x. \quad (38)$$

b) Die Schlussrente sei zahlbar im Momente des Todes.

Die im vorigen Abschnitt gemachte Annahme, dass die für die Gestorbenen noch auszurichtenden Rentenraten am Ende des Jahres zahlbar seien, ist in der Praxis nicht gebräuchlich, und wir wollen deshalb noch den Fall untersuchen, wenn die Raten im Zeitpunkte des Todes zahlbar sind.

Der Barwert der im ersten Jahre fällig werdenden Renten ist

$$\begin{aligned} v l_{x+1} + \int_0^1 t v^t l_{x+t} \mu_{x+t} dt \\ = \int_0^1 v^t l_{x+t} dt - \delta \int_0^1 t v^t l_{x+t} dt. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für  $\bar{a}_x$  setzt sich in diesem Falle aus zwei Rentenbarwerten zusammen, nämlich aus dem Barwerte für eine kontinuierlich zahlbare Leibrente und demjenigen für eine steigende kontinuierliche Rente, letztere multipliziert mit dem negativen Betrage der Verzinsungsintensität. Die zweite Rente hat die Eigenschaft, dass sie zu Anfang eines jeden Jahres mit 0 beginnt und dann proportional der Zeit wächst.

Allgemein ist

$$l_x \bar{a}_x = l_x a_x + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 t v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt.$$

Zur Berechnung des Integrals schlagen wir folgenden Weg ein:

Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 t v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt \\ = -\frac{1}{\delta} \int_0^1 d(t v^{\lambda+t}) l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} \\ + \frac{1}{\delta} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} \mu_{x+\lambda+t} dt. \end{aligned}$$

Das erste Integral kann gesetzt werden

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\delta} \int_0^1 d(t v^{\lambda+t}) \left\{ l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} + t \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \dots \right\} \\ = -\frac{1}{\delta} l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} \int_0^1 d(t v^t) - \frac{1}{\delta} \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \int_0^1 t d(t v^t) \\ = -\frac{1}{\delta} \left\{ v l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda} + v \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \right\} \\ + \frac{v}{\delta} \frac{d l_{x+\lambda} \mu_{x+\lambda}}{d_{x+\lambda}} \left( -\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta^2} \right). \end{aligned}$$

Summieren wir über sämtliche Altersjahre, so wird unser erstes Integral

$$-\frac{1}{\delta} l_x A_x + \left( \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2} - \frac{i}{\delta^3} \right) l_x e_x U_x.$$

Im fernern ist nach durchgeführter Summation

$$\frac{1}{\delta} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \int_0^1 v^{\lambda+t} l_{x+\lambda+t} u_{x+\lambda+t} dt = \frac{1}{\delta} \bar{A}_x l_x,$$

somit wird schliesslich

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{\delta} \{ \bar{A}_x - A_x \} + \left( \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{\delta^2} - \frac{i}{\delta^3} \right) e_x U_x. \quad (39)$$

Unter der Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Sterbefälle wird

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{1}{\delta} \{ \bar{A}_x - A_x \} \quad (40)$$

oder, da dann

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x,$$

$$\bar{a}_x = a_x + \frac{i - \delta}{\delta^2} A_x. \quad (41)$$

Substituiert man in (40)

$$\bar{A}_x = 1 - \delta \bar{a}_x,$$

so wird auch

$$\bar{a}_x = \frac{1}{\delta} (1 - A_x) - (\bar{a}_x - a_x). \quad (42)$$

### Schlussbemerkungen.

Durch die Anwendung der im 1. Kapitel entwickelten Methode auf einige einfache Probleme der Lebensversicherungsmathematik glauben wir gezeigt zu haben, wie auf kontinuierlichem Wege sich die verschiedenen Fragen in übersichtlicher Form lösen lassen. Die Eulersche Summenformel, die bei der Behandlung solcher Aufgaben gewöhnlich in Anwendung kommt, setzt voraus, dass sich die Funktion  $f(x)$  in der Umgebung eines Punktes  $x$  in die Form bringen lasse

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

also durch eine beständig konvergierende Potenzreihe darstellbar sei. Das ist aber, funktionentheoretisch ge-

sprochen, nichts anderes, als dass  $f(x)$  transcendente ganze Funktion ist. In unseren Entwicklungen haben wir über die analytische Struktur von  $f(x)$  absolut keine Voraussetzungen gemacht, und es ist deshalb die in dieser Arbeit niedergelegte Methode als eine ganz allgemeine zu betrachten. Sie bietet auch den Vorteil, dass die Auswertung der verschiedenen vorkommenden Integrale auf mannigfache Weise vorgenommen werden kann, und wir haben mit Absicht nicht überall nach dem gleichen System die mechanische Quadratur vorgenommen.

Die Korrektionsglieder bei Barwerten von Versicherungsleistungen, die zu einem beliebig andern Zeitpunkte als am Ende des Jahres fällig werden, müssen streng genommen eine Summe darstellen, die sich über die ganze Sterbetafel erstreckt. Bei der gewählten Bezeichnungsweise wären die  $u_x$  und  $U_x$  als Korrekturen anzusehen. Ihre numerische Bestimmung erfordert keinen so grossen Arbeitsaufwand, als dass er sich nicht rechtfertigen liesse.

Gewöhnlich werden die Korrektionsglieder so ermittelt, dass man für die verschiedenen Zeitintervalle von  $\frac{1}{m}$  die Gewinne oder Verluste für den Zins und die Sterblichkeit getrennt aufstellt und durch Grenzübergänge zu den kontinuierlichen Barwerten zu gelangen sucht. Diese Betrachtungen sind gewiss sehr instruktiv, aber im allgemeinen etwas schwerfällig und nicht immer einwandfrei.

Die in der vorliegenden Arbeit niedergelegte Methode, welche eigentlich auf nichts anderem beruht als auf der Entwicklung eines bestimmten Integrales an der untern Grenze des Integrationsweges, ist eine ganz allgemeine. Sie enthebt uns auch der Notwendigkeit, über den Verlauf der Funktion zwischen ganzzahligen Argumentenwerten irgendwelche Annahmen zu machen.

Die in der Lebensversicherung vorkommenden Funktionen haben die angenehme Eigenschaft, dass die Differentialquotienten erster und höherer Ordnung eine rasche Abnahme zeigen, so dass die durchgeführten Reihenentwicklungen sehr konvergent sind. Es ist uns dadurch ein Mittel an die Hand gegeben, diese rein kontinuierliche Methode so weit zur Anwendung zu bringen, dass sie auch in der Praxis den Vergleich mit den bisher angewandten Prinzipien aushalten kann.