Zur praktischen Auswertung des technischen Zufallrisikos und zur Bewertung der Zufallschwankung in der Praxis privater Versicherungsanstalten.

Von Dr. R. Rothauge, Düsseldorf.

Landré hat in seinen „Mathematisch-technischen Kapiteln zur Lebensversicherung“[1]) als wichtigsten Grundsatz für die Prämienberechnung gefordert: „Bei der Aufstellung eines Tarifs muss man es dem Versicherten unmöglich machen, sich aus seiner Versicherung zurückzuziehen, um gleich darauf für eine geringere Prämie eine Versicherung für dieselbe Auszahlung abschliessen zu können“. Rein technisch betrachtet, stellt dieser Satz die Forderung auf, dass man „eine Prämienzahlung vermeiden muss, wo der Versicherte nachträglich für ein Risiko zahlen muss, das die Gesellschaft schon vorher ganz oder teilweise trug“. Diese Forderung ist das auf die Prämienberechnung angewandte Grundaxiom der Versicherungstechnik, das in der allgemeinsten Form lautet:

Dem Versicherer müssen in jeder Versicherungsperiode die dem wahrscheinlichen Verlauf entsprechenden Risikoprämien zur Verfügung stehen.

In letzter Linie resultiert dieses Axiom aus dem Wesen der statistischen Masszahlen, die, bezogen auf das einzelne Element einer statistischen Gesamtheit, infolge ihres Durchschnittscharakters sich derart verhalten, dass man technisch die Versicherung nur als ein sehr verfeinertes „vorgängiges Umlageverfahren“ ansehen kann, obwohl man auch berechtigt ist, in gewissen Grenzen im Rahmen dieser Gesamtheit jeden Versicherten als Träger einer mathematischen Wahrscheinlichkeit anzusehen.

Wenn man jedoch die wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesetze auf versicherungstechnische Verhältnisse anwendet, und dadurch der einzelnen Versicherung den Charakter eines reinen Glückspiels beilegt, so darf man bei dieser Anwendung die Grundsätze der Versicherungstechnik nicht vernachlässigen. Die Beachtung obigen wichtigsten Grundsatzes hat in der Zufallrisikotheorie zu einer Bewertung der Zufallschwankung geführt, die mit dem Namen „technisches Zufallrisiko“ bezeichnet ist[1]), und zwar im Hinblick darauf, dass für die Technik eine derartige, die tatsächlichen Betriebsverhältnisse berücksichtigende Bewertung nur allein Gültigkeit besitzen kann.

Die Grundlage dazu bildet das wahrscheinlichkeitstheoretische Problem, die Zufallsabweichung zu bestimmen von einer Anzahl von Spielen, von denen jedes in einzelne Phasen zerfällt, die ihrerseits nur mit einer ihnen eigentümlichen Wahrscheinlichkeit entriert werden, ein Problem, das überall dort, wo es sich um Zufallsbewertungen für Versicherungen über die Zeit von einer Versicherungsperiode hinaus handelt, Anwendung gefunden hat.

Der *wesentliche* Zusatz besteht jedoch in der durch obigen Grundsatz scharf charakterisierten Eigenart der Versicherung, derzufolge die Schäden sofort — bei der Annahme, dass diese am Schlusse der Versicherungsperiode eintreten, technisch selbstverständlich erst zu diesem Zeitpunkte — gezahlt werden, und zwar gezahlt werden von den eingezogenen Risikoprämien, deren Summe gerade ausreicht, wenn die Schäden dem wahrscheinlichen Verlauf entsprechend eintreten, deren momentane Unzulänglichkeit das momentane Zufallrisiko des Versicherers bildet, das momentane, nicht das tatsächliche, denn der Versicherer hat erst am Schluss seiner Geschäftsperiode (in der Bilanz) Rechenschaft darüber abzulegen, ob er über die Summe aller eingezogenen Risikoprämien hinaus Mittel zur Schadendeckung benötigt hat. Für ihn kommen daher die momentanen Zufallschwankungen nicht in Betracht, wenigstens technisch nicht, sondern nur das Ergebnis aller während der Geschäftsperiode entrierten Spiele, die tatsächliche Zufallschwankung der ganzen Geschäftsperiode.

Wahrscheinlichkeitstheoretisch wird eigentlich in jedem Moment ein Spiel entriert zwischen dem Versicherer und dem Versicherten. Wenn, wie in der erwähnten Abhandlung betont ist, als grundlegende Zeiteinheit das Jahr festgelegt, oder m. a. W., wenn die Annahme gemacht ist, die Versicherung eines

[1]) Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, 3. Aufl. 1905, S. 157.
Ich verweise auf meine Darlegungen in der Diskussion zum Thema IV des VI. Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft in Wien, worin ich einige in dieser Abhandlung ausgeführten Gesichtspunkte berührt habe. cf. Bd. III, S. 197 ff.

[1]) Rothauge, Das technische Zufallrisiko, Abhandlung zu Thema IV des VI. Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft, Wien, Juni 1909. Bd. I, 1, S. 685.

Jahres als eine einheitliche Phase zu betrachten, so ist diese Annahme für die Ableitung des technischen Zufallrisikos gemacht, weil sie in Einklang steht mit den Annahmen der Versicherungstechnik; man darf aber natürlich nicht einseitig diese „einjährige“ Zeitperiode betonen, sondern muss sich von dieser nur auf Grund der bürgerlichen Zeiteinteilung entstandenen Periode, die für die Privatversicherung zwar von überwiegender Bedeutung ist, loslösen und als Grundlage die für den einzelnen Vertrag geltende Versicherungsperiode festlegen. Nur diese ist die massgebende Zeiteinheit für die Technik, die durch ihre Annahmen das Spiel während dieser Einheit nahezu zu einem einheitlichen macht, obwohl es, rein theoretisch betrachtet, zweifelhaft erscheint, ob man diese Annahme machen darf; jedenfalls mag, ehe nicht genaue Untersuchungen die Zulässigkeit dieser Annahme erwiesen haben, es dahingestellt bleiben, ob man das Spiel eines Jahres oder einer anderen Zeiteinheit als einheitliches Glückspiel ansehen darf, oder ob man als Zeiteinheit das Differential der Zeit wählen muss. Für die Versicherungstechnik wird es von geringer Bedeutung sein, in welcher Weise diese theoretische Frage entschieden wird, sie macht die Annahme, dass am Schluss der grundlegenden Versicherungsperiode die Schadenfälle eintreten, und macht dadurch das Spiel während dieser Periode spieltechnisch zu einem einheitlichen. Die grundlegende Versicherungsperiode kann schliesslich durch das riskierte Kapital selbst charakterisiert werden, denn so lange dieses seine Grösse, abgesehen von der Verzinsung und von zufälligen, sehr seltenen Ausnahmen, nicht ändert, ist der Zeitraum, wofür diese Konstanz besteht, die grundlegende Versicherungsperiode.

Dem Einzelspiel wird in *jeder* Phase die Risikoprämie als Einsatz, das riskierte Kapital als Preis zugrundegelegt. Auf diesem grundlegenden Gebaren der Versicherungstechnik baut sich das technische Zufallrisiko auf.

Unter der Annahme einer unendlichen Anzahl von Spielen ist schon Hattendorf[1]) zu demselben Resultat gelangt, wie wir auf Grund des Tschebyscheffschen Satzes für eine endliche Anzahl von Spielen. Die Formel für die Zusammensetzung der Risiken der einzelnen Versicherungsjahre zum Risiko einer längeren Versicherungsdauer, die von Bohlmann[2]) mit Hattendorfscher Satz bezeichnet ist, liegt schliesslich jeder Risikobewertung zugrunde, sobald sie über das Versicherungsjahr hinaus ausgedehnt wird; der wesentliche Unterschied liegt nur in der Auffassung der „effektiven Verluste“, in der Betonung, dass das Spiel jedes einzelnen Jahres (resp. jeder Versicherungsperiode) spieltechnisch ein Einzelspiel für sich ist, wozu Hattendorf und, unabhängig von diesem, auch Peek[1]) dadurch geführt sind, dass sie das einjährige Risiko als Basis von solchen Risikobewertungen für Versicherungsspiele wählten, die erst in mehr als einem Jahre, resp. in mehr als einer Versicherungsperiode ihren endgültigen Abschluss finden. Leider konnte in der erwähnten Abhandlung hierauf nicht hingewiesen werden, da diese beiden Arbeiten uns nicht zur Verfügung standen.

[1]) Hattendorf, Über die Berechnung der Reserven und des Risikos bei der Lebensversicherung. Rundschau der Versicherungen von Masius, Leipzig 1868.

[2]) Bohlmann, Die Theorie des mittleren Risikos, Abh. zum Thema IV des VI. internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft. Bd. I, 1. S. 609.

Das technische Zufallrisiko setzt das Äquivalenzprinzip von Leistung und Gegenleistung für die ganze Vertragsdauer, wie für jede grundlegende Versicherungsperiode voraus. Dies Äquivalenzprinzip, das in dem oben angeführten Grundsatz seinen technischen Ausdruck findet, scheint, flüchtig betrachtet, nur ein Grundsatz des privaten Versicherungswesens zu sein. Ich habe daher, angeregt durch die Worte Küttners in seinem Korreferat, auf dem VI. Internationalen Kongress für Versicherungswissenschaft in Wien in der nachfolgenden Diskussion den Unterschied der auf effektive Verluste aufgebauten Risikobewertung und des auf dem riskierten Kapital aufgebauten technischen Zufallrisikos durch den verschiedenen Standpunkt, der bei der Ableitung eingenommen ist, den des Sozialversicherers und den des Privatversicherers, erklärt. Es scheint auch, wenn man nur eine *einzelne* Versicherung betrachtet, das oben charakterisierte strenge Äquivalenzprinzip allein für die Privatversicherung Gültigkeit zu besitzen, für die Sozialversicherung nur dann, wenn man die ganze Dauer der Zugehörigkeit zur Gesamtheit betrachtet und selbst dann nur in den *seltensten* Fällen. Es zahlt in der Sozialversicherung ein Versicherter für ein Risiko, das er gelaufen ist, tatsächlich vielleicht erst Jahre später, ja sehr oft zahlt er Risikoprämien, wofür er nie in die Lage versetzt wird, ein Äquivalent zu erhalten, sodass die für die Risikotheorie unerlässliche Bedingung des „gerechten Spieles“ oft nicht vorhanden zu sein scheint. Infolgedessen ist die Risikobewertung scheinbar noch viel komplizierter, als die bislang abgeleiteten Formeln angenommen haben, ja ihre Anwendbarkeit scheint ganz unmöglich zu sein. Ich betone ausdrücklich: es scheint, denn tatsächlich liegen die Verhältnisse technisch doch viel einfacher.

Die Sozialversicherung ist auf dem Durchschnittsprinzip aufgebaut, das das Äquivalenzprinzip nur für

[1]) Peek, Tœpassing der Waarschejnlijkheids-Rekening or Levensverzekering en Sterfte-Statistik. Dissertationsschrift 1898.

die Gesamtheit als solche postuliert — Zuschüsse etc. selbstverständlich als Leistungen des Versicherten selbst betrachtet, da ja nur die Technik als solche ins Auge gefasst werden soll. — Die Gesamtheit der Schadenfälle wird in der Sozialversicherung von der Gesamtheit der Versicherten getragen, aber nicht in gerechter Verteilung wie bei der Privatversicherung, sondern in ganz irregulärer Weise, gestützt auf die Zwangskontinuität jeder einzelnen Versicherung. Es ist ja die gegenseitige Unterstützung, die Durchschnittsprämie, technisch gerade das Charakteristikon der Sozialversicherung.

Wenn man dies beachtet und dadurch voraussetzt, dass Teile der Risikoprämie des einzelnen Versicherten als Risikoprämienquote des anderen Verwendung finden, so ist innerhalb der Gesamtheit durch diese gegenseitige Übertragung ein gerechtes Spiel für jede einzelne Versicherung und zwar ein solches selbst für die grundlegende Versicherungsperiode hergestellt. Wenn die gegenseitige Ergänzung der Risikoprämien zum „gerechten Einsatz“ zufällig für eine Versicherungsperiode nicht durchgängig erfolgen kann — Fälle, die fast gar nicht vorkommen, die dann jedoch ihren technischen Ausdruck darin finden würden, dass die Gesamtreserve negativ wäre — ist dann nicht der Staat oder der Veranstalter der sozialen Versicherungseinrichtung genötigt, momentane Zuschüsse zu leisten, um die Äquivalenz der Leistung und Gegenleistung der Gesamtheit herzustellen, da doch die fälligen Schäden gezahlt resp. zurückgestellt werden müssen? Ein Risiko[1]), das dem Veranstalter jeder auf dem Prinzip der Durchschnittsprämie aufgebauten Versicherungsveranstaltung aus dem Durchschnittsprinzip erwächst, das die Privatversicherung durch den oben angeführten Grundsatz, das Äquivalenzprinzip für jede Versicherungsperiode, aber nicht läuft. Wenn man die einzelne Versicherung allein betrachtet, so entstehen in allen den Fällen, wo eine Übertragung von Risikoprämienteilen stattfindet, negative Einzelreserven, die ja besagen, dass zwischen Leistung und Gegenleistung eine momentane Disharmonie besteht, die erst mit Hülfe der Mitversicherten beseitigt wird. Der gegenseitige, sozusagen buchtechnische Ausgleich selbst erfolgt durch die negative Einzelreserve, wodurch auch in der Sozialversicherung das Äquivalenzprinzip selbst für die grundlegende Versicherungsperiode hergestellt ist. Spieltechnisch liegen hier daher genau dieselben Verhältnisse vor, wie sie die Privatversicherung zeigt, sobald man nur aus den für die Prämienberechnung geforderten Durchnittsverfahren die Konsequenzen für die Risikoprämienverteilung zieht.

Die Formeln für das technische Zufallrisiko sind mithin für die Sozial- wie für die Privatversicherung gültig, denn hier wie dort müssen die Schäden sofort gezahlt resp. zurückgestellt werden, hier wie dort werden hierzu Prämienteile, die Risikoprämien, verbraucht und kommen infolgedessen für die späteren Versicherungsspiele nicht in Betracht, hier wie dort ist das riskierte Kapital der Preis jedes einzelnen Versicherungsspieles.

Wenn man die Frage aufwirft, welche Massnahmen in der Sozialversicherung zu treffen sind gegen die zufälligen Schwankungen, so muss man für diesen Zweig der Versicherung betonen, dass hier beim Fehlen von Geschäftsperioden und mithin von Bilanzen die Möglichkeit vorhanden ist, die ungünstige Zufallschwankung der einen Zeitepoche durch die günstige anderer Epochen zu decken, dass man es hier mit einer unendlichen Kette von Spielen zu tun hat, für die zwar das absolute Risiko der ganzen (unendlichen) Dauer der Versicherungsveranstaltung — nicht der Dauer der gerade vorhandenen Versicherungen, da eine soziale Versicherungsveranstaltung ihrer Idee nach zeitlich unbegrenzt ist — unendlich gross, das relative Risiko aber eine unendlich kleine Grösse ist, dass also nur eine verschwindend geringe Mehreinnahme an Risikoprämie genügt, um die Zufallschwankung zu paralysieren. Diese geringe „ungerechte“ Mehreinnahme ist aber für die Anwendbarkeit statistischer Massnahmen unumgängliche Notwendigkeit. Für die Sozialversicherung sind daher gegen die rein zufälligen Schwankungen irgendwelche Massnahmen nicht erforderlich; betont sei jedoch ausdrücklich gegen die rein zufälligen im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie, also nur gegen solche Schwankungen, für die erkennbare Veranlassungen (Epidemien, Krieg, wirtschaftliche Verhältnisse etc.) nicht vorliegen. Näher hierauf einzugehen, erübrigt sich wohl und würde auch zu weit vom Thema abführen, das in erster Linie die Verhältnisse der privaten Versicherungsgesellschaften berücksichtigen soll, und das daher obigen Satz als Axiom zu berücksichtigen hat.

Das wesentliche Moment für das technische Zufallrisiko ist, kurz gesagt, die sofortige Fälligkeit der riskierten Kapitale, der Preise der Versicherungsspiele — sofort im Sinne der grundlegenden Annahme über das Eintreten der Schadensfälle, also in der überwiegenden Mehrzahl der in der Praxis der privaten Versicherungsanstalten vorkommenden Fälle in Intervallen von einem Jahre —, denn der im Anfang angeführte Grundsatz der Versicherungstechnik ist nur der mathematische Ausdruck für die technische Möglichkeit, diese Preise im Rahmen des wahrscheinlichen

[1]) Man vergleiche die Gutachten des VI. Internationalen Kongresses für Versicherungswissenschaft zum diesbezüglichen Thema (Thema III).

Verlaufs *sofort* zu bestreiten, und zwar zu bestreiten aus **eigenen** Mitteln. Er verhindert daher die Entstehung negativer Reserven, wenn man die Reserveberechnungen nur auf den sogenannten Nettogrundlagen, der Sterblichkeitstafel und dem Zinsfuss, ausführt. Sobald man jedoch die notwendige dritte Grundlage, die Verwaltungskosten, mit einbezieht, ändern sich die Verhältnisse wesentlich; es können dann sehr leicht negative Reserven entstehen, die aber im Hinblick auf die Risikobewertung ohne Einfluss sind, wenn nur obigem Grundsatze, dem Äquivalenzprinzip für die grundlegende Versicherungsperiode, Genüge geleistet wird.

Bezeichnet man mit $\bar{q}_{k,m}$ die sich möglichst eng an die tatsächlichen Verhältnisse anschliessende Wahrscheinlichkeit, dass das versicherte Ereignis im m-ten Versicherungsjahr, bezogen auf den Anfang dieses Versicherungsjahres, eintritt, und mit $c_{k,m}$ das riskierte Kapital dieses Versicherungsjahres, beides inbezug auf den k-ten Versicherten, so beträgt das technische Zufallrisiko für eine n-jährige Versicherungsperiode und einen Beistand von l Versicherten.

$$M = a\sqrt{\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{n}\left[\prod_{1}^{m-1}{}_{\mathfrak{o}}\,(1-\bar{q}_{k,\mathfrak{o}})\cdot\bar{v}^{2(m-1)}\left(\bar{q}_{k,m}(1-q_{k,m})\bar{v}^2 c_{k,m}^2\right)\right]} \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{o}$ die das Versicherungsjahr kennzeichnende Variabele bedeutet[1]).

Diese Formel ist ganz allgemeingültig, sie gilt für alle Versicherungsarten, wenn man nur die sinnentsprechenden Grössen einsetzt, wie für alle Versicherungsperioden.

Von den Versicherungsarten sollen die Versicherungen auf das menschliche Leben und zwar die Todesfall- wie die Lebensfallversicherungen Berücksichtigung finden.

Von den Versicherungsperioden soll sowohl die ganze zukünftige Dauer der Versicherungen, da diese für die Gefahrbewertung von Wichtigkeit ist (technisches Totalrisiko), wie das Geschäftsjahr, da dieses für die Betriebstechnik, speziell für die Bilanz massgebend ist (technisches Bilanzrisiko), in Rechnung gezogen werden.

Dementsprechend soll das technische Zufallrisiko nach verschiedenen Richtungen hin ausgewertet werden und zwar sollen zuerst die Totalrisiken für Todesfall- wie für Lebensfallversicherungen abgeleitet und den Ergebnissen früherer Untersuchungen gegenübergestellt werden, dann sollen die Formeln für das technische Bilanzrisiko spezialisiert und für die Betriebstechnik umgeformt werden[1]), schliesslich soll die Bewertung der Zufallschwankung in der Praxis privater Versicherungsanstalten beleuchtet werden, wobei speziell die Vorbedingungen darzulegen sein werden, unter denen eine solche Bewertung durchzuführen ist.

Beim Totalrisiko kommt es darauf an, einen Massstab zu erhalten, um die einzelnen Kombinationen untereinander inbezug auf die Gefährlichkeit für die Gesellschaftsleitung zu vergleichen. Unter der Annahme, dass l Versicherte gleiche Versicherungen abschliessen, erhält man Hülfszahlen, die sich direkt zum Vergleich eignen.

Für einen Bestand von l gleichen Versicherungen geht obige Formel über in

$$M = a\sqrt{l\sum_{m=1}^{n}\left[\prod_{1}^{m-1}{}_{\mathfrak{o}}\,(1-\bar{q}_{x+\mathfrak{o}-1})\,\bar{v}^{2(m-1)}\left(\bar{q}_{x+m-1}(1-\bar{q}_{x+m-1})\,\bar{v}^2 c_{x+m}^2\right)\right]} \tag{2}$$

Für *Todesfallversicherungen* bedeutet $\bar{q}_{x+m-1}$ die Sterbewahrscheinlichkeit des im m-ten Versicherungsjahr stehenden $(x+m-1)$-jährigen, c_{x+m} das für dieses Jahr in Rechnung zu ziehende riskierte Kapital.

Geht man zu der für praktische Auswertungen mit sehr vielen Vorteilen verbundenen, in der Praxis deshalb allgemein üblichen Methode der „fingierten Gesellschaft" über, so ist

$$\bar{q}_{x+m-1} = \frac{\bar{L}_{x+m-1} - \bar{L}_{x+m}}{\bar{L}_{x+m-1}},$$

$$1 - \bar{q}_{x+m-1} = \frac{\bar{L}_{x+m}}{\bar{L}_{x+m-1}}$$

und

$$\prod_{1}^{m-1}{}_{\mathfrak{o}}\,(1-\bar{q}_{x+\mathfrak{o}-1}) = \frac{\bar{L}_{x+m-1}}{\bar{L}_x},$$

so dass

$$\prod_{1}^{m-1}{}_{\mathfrak{o}}\,(1-\bar{q}_{x+\mathfrak{o}-1})\,(1-\bar{q}_{x+m-1})\,\bar{v}^{2m} = \frac{\bar{v}^{2m}\,\bar{L}_{x+m}}{\bar{L}_x} \text{ ist.}$$

Erweitert man diesen Ausdruck mit v^{2x} und bezeichnet

$$\bar{L}_x \cdot \bar{v}^{2x} \quad \text{mit } \bar{D}'_x$$

$$\bar{L}_{x+m} \cdot \bar{v}_{2x+2m} \quad \text{mit } \bar{D}'_{x+m}$$

usw., so ist

$$\prod_{1}^{m-1}{}_{\mathfrak{o}}\,(1-\bar{q}_{x+\mathfrak{o}-1})\,(1-\bar{q}_{x+m-1})\,\bar{v}^{2m} = \frac{\bar{D}'_{x+m}}{\bar{D}'_x}.$$

[1]) Hierdurch divergiert die Formel in den Grenzen für das Produkt Π von den in der Kongressabhandlung angeführten.

[1]) Die technische Durchbildung soll in erster Linie nur die *Möglichkeit* der Anwendung darlegen, die Praxis selbst wird derartigen Anwendungen stets entraten können und müssen.

Mithin ist

$$M = a \sqrt{l \sum_1^n m \frac{\overline{D}'_{x+m}}{\overline{D}'_x} \cdot \overline{q}_{x+m-1} \cdot c^2_{x+m}}\,.$$

Führt man statt $\overline{D}'_{x+m} \cdot \overline{q}_{x+m-1}$ die Bezeichnung $\overline{\Delta}'_{x+m}$ ein, so ist für alle Todesfallversicherungen

$$M = a \sqrt{l} \cdot \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n m\, \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot c^2_{x+m}} \qquad (3)$$

Bei dieser Ableitung ist zur Unterscheidung der aus den Rechnungsgrundlagen der Gesellschaft sich ergebenden von den aus den Werten $\overline{q}$ abgeleiteten Grössen den letzteren der Index — gegeben, da den Wahrscheinlichkeiten $\overline{q}$ eine Tafel zugrunde gelegt werden muss, die sich möglichst eng an die tatsächlichen Verhältnisse anschliesst. Es sollen daher diese Wahrscheinlichkeiten von den rechnungsmässigen in den folgenden Berechnungen durch dieselbe Indizierung unterschieden werden.

Für eine gemischte Versicherung auf n Jahre (die Versicherungssumme kommt beim Tode, spätestens nach n Jahren zur Auszahlung) beträgt das riskierte Kapital am Ende des m-ten Versicherungsjahres

$$c_{x+m} = 1 - {}_mV.$$

Bei einmaliger Prämienzahlung ist

$${}_mV = A_{x+m\,\overline{n-m}|} = 1 - \vartheta\, \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}\,,$$

wenn man mit ϑ den Diskont bezeichnet; bei jährlicher Prämienzahlung

$${}_mV = A_{x+m\,\overline{n-m}|} - P \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

und, da

$$A_{x+m\,\overline{n-m}|} = 1 - \vartheta \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

und

$$P = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} - \vartheta$$

ist, so ist

$${}_mV = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

so dass bei einmaliger Prämienzahlung

$$c_{x+m} = \vartheta \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

bei jährlicher Prämienzahlung

$$c_{x+m} = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}}\, \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|} \qquad \text{ist.}$$

Das Totalrisiko einer gemischten Versicherung ist mithin bei einmaliger Prämienzahlung

$$M[A_{x\,\overline{n}|}] = a \sqrt{l} \cdot \vartheta \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n m\, \overline{\Delta}'_{x+m}\, \mathfrak{a}^2_{x+m\,\overline{n-m}|}} \qquad (4)$$

bei jährlicher Prämienzahlung (5)

$$M[P(A_{x\,\overline{n}|})] = a \sqrt{l} \cdot \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n m\, \overline{\Delta}'_{x+m}\, \mathfrak{a}^2_{x+m\,\overline{n-m}|}}$$

Setzt man in diesen Auswertungen $n = \omega - x$, wobei ω das höchste Alter der Sterbetafel bedeutet, so entsteht aus der gemischten Versicherung die lebenslängliche Todesfallversicherung.

Für die terme-fixe-Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung auf n Jahre ist das riskierte Kapital im m-ten Versicherungsjahre

$$c_{x+m} = \varrho^{n-m} - {}_mV$$

und da

$${}_mV = \varrho^{n-m} - P \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

ist, so ist

$$c_{x+m} = P \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

und mit Berücksichtigung der Beziehung $P = \frac{\varrho^n}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}}$

$$c_{x+m} = \frac{\varrho^n}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

Das Totalrisiko der terme-fixe-Versicherung auf n Jahre mit jährlicher Prämienzahlung ist daher (6)

$$M[P_x(\varrho^n)] = a \sqrt{l}\, \frac{\varrho^n}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n m\, \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot \mathfrak{a}^2_{x+m\,\overline{n-m}|}}$$

Für *Lebensfallversicherungen* ist $\overline{q}_{x+m-1}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der $(x+m-1)$ jährige Versicherte das m-te Versicherungsjahr durchlebt; da jedoch das Spiel des m-ten Versicherungsjahres im Gegensatz zur Todesfallversicherung von dem Eintritt des versicherten Ereignisses in allen vorhergehenden Versicherungsjahren abhängt, so ist, wenn man die Wahrscheinlichkeit, dass der $(x+m-1)$ jährige Versicherte das m-te Versicherungsjahr durchlebt, mit $\overline{p}_{x+m-1}$ bezeichnet, (7)

$$M = a \sqrt{l \sum_1^n m \left[\prod_{0\;1}^{m-1} \overline{p}_{x+0-1} \cdot \overline{p}_{x+m-1} (1 - \overline{p}_{x+m-1}) \cdot v^{2m} \cdot c^2_{x+m} \right]}$$

Berücksichtigt man, dass gemäss unserer Bezeichnungsweise

$$\overline{p}_{x+m-1} = 1 - \overline{q}_{x+m-1}$$

ist, so ist

$$\prod_{0\;1}^{m-1} \overline{p}_{x+0-1} \cdot \overline{p}_{x+m-1} (1 - \overline{p}_{x+m-1}) \cdot v^{2m}$$

$$= \frac{1}{\overline{D}'_x} \cdot \overline{D}'_{x+m} \cdot \overline{q}_{x+m-1} = \frac{1}{\overline{D}'_x} \cdot \overline{\Delta}'_{x+m},$$

so dass das Totalrisiko für Lebensfallversicherungen

$$M = a \sqrt{l} \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n m\, \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot c^2_{x+m}} \qquad (8)$$

ist, also in der Struktur vollkommen mit dem Totalrisiko für Todesfallversicherungen übereinstimmt.

Für Leibrenten, die auf das $x+n$-te Lebensjahr abgekürzt sind, ist $c_{x+m} = \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$, mithin

$$M[\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}] = \alpha \sqrt{l} \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n {}^m \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot \mathfrak{a}^2_{x+m\,\overline{n-m}|}} \tag{9}$$

und, wenn $n = \omega - x$ gesetzt wird,

$$M[\mathfrak{a}_x] = \alpha \sqrt{l} \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \cdot \sum_1^n {}^m \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot \mathfrak{a}^2_{x+m}} \tag{9a}$$

das Totalrisiko der lebenslänglichen Leibrente.

Aus der Formel ist sofort zu ersehen, dass das Totalrisiko sogenannter „Postnumerando-Leibrenten", d. h. Leibrenten, bei denen der Rentenbezug erst nach Durchleben der ersten Versicherungsperiode beginnt, dasselbe ist.

Für Erlebensfallversicherungen auf das $x+n$-te Lebensjahr ist bei einmaliger Prämienzahlung

$$c_{x+m} = {}_{n-m}E_{x+m} = \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}}$$

mithin (10)

$$M[{}_nE_x] = \alpha \sqrt{l}\, D_{x+n} \cdot \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n {}^m \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot \frac{1}{D^2_{x+m}}}$$

und bei jährlicher Prämienzahlung, da

$$\begin{aligned} c_{x+m} &= {}_{n-m}E_{x+m} - P \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|} \\ &= \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{1}{D_{x+m}} (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+m}) \end{aligned}$$

ist, (11)

$$M[P({}_nE_x)] = \alpha \sqrt{l} \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} \sqrt{\frac{1}{\overline{D}'_x} \sum_1^n {}^m \overline{\Delta}'_{x+m} \cdot \frac{(\Sigma D_x - \Sigma D_{x+m})^2}{D^2_{x+m}}}$$

In analoger Weise erfolgt die Ableitung aller übrigen Kombinationen.

Vergleicht man das Risiko für die Leibrente mit den Risiken der gemischten (mithin auch der lebenslänglichen) und der terme-fixe-Versicherung, so bestehen die Beziehungen

$$M[A_{x\overline{n}|}] = \delta\, M[\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}]$$

$$M[P(A_{x\overline{n}|})] = \frac{1}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} \cdot M[\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}] \tag{12}$$

und

$$M[P_x(\varrho^n)] = \frac{\varrho^n}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} M[\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}],$$

Beziehungen, die sich auch beim allgemeinen mittleren Risiko ergeben.

Es soll nun das technische Risiko dem allgemeinen mittleren Risiko gegenübergestellt werden.

Die Formel für das allgemeine (resp. Küttnersche) Risiko lautet in der für das technische Risiko benutzten Bezeichnungsweise

$$\varrho = \alpha \sqrt{\sum_1^l {}^k \left[\left[1 - \sum_1^n {}^m \prod_0^{m-1} (1 - \overline{q}_{k,o}) \cdot \overline{q}_{k,m}\right] \cdot E_k^2 + \sum_1^n {}^m \prod_0^{m-1} (1 - \overline{q}_{k,o}) \cdot q_{k,m}\, S^2_{k,m} \right]}, \tag{13}$$

wobei $S_{k,m}$ der diskontierte Betrag des Überschusses der Versicherungssumme über die Einlage E_k ist.

Der Unterschied zwischen dem gewöhnlichen mittleren Risiko und dem technischen Risiko liegt in der Beurteilung der „effektiven Verluste". Als effektiver Verlust im m-ten Versicherungsjahre wird bei ersterem in bezug auf den k-ten Versicherten der Überschuss $S_{k,m}$ der Schadensumme über den Barwert aller bis zum Ende dieses Versicherungsjahres eingezahlten Prämien eingesetzt, während bei letzterem der effektive Verlust dieses Versicherungsjahres gleich dem in diesem Jahre riskierten Kapital $c_{k,m}$ abzüglich der für dieses Jahr in Rechnung zu stellenden, auf das Ende des Versicherungsjahres aufgezinsten Risikoprämie ist. Beim technischen Zufallrisiko sind, wie es auch tatsächlich der Fall ist, die Risikoprämien aller vorhergehenden Versicherungsjahre für die Versicherung im m-ten Versicherungsjahre nicht mehr vorhanden, da sie in den voraufgegangenen Jahren zur Schadendeckung herangezogen sind.

Die Differenz beider „effektiver Verluste" ist mithin gleich dem Barwert aller bis zu dem jeweils in Frage stehenden Versicherungsjahre geleisteten Risikoprämien, d. h. gleich dem Versicherungswert, dem „insurance value" der voraufgegangenen Versicherungsperiode.

Als erste Folgerung aus dieser Forderung der Versicherungstechnik resultiert — wieder in Übereinstimmung mit den tatsächlichen Verhältnissen — dass am Ende der ganzen Versicherungsdauer der gesamte Einsatz E_k verbraucht ist [1]). Der Versicherer erhält die „gesamte Entschädigung" oder besser gesagt die gesamten Mittel zur Schadendeckung weder dann, wenn der Schadenfall eingetreten ist, noch am Schlusse der ganzen Versicherungsperiode, sondern dann, wenn er sie, dem wahrscheinlichen Verlauf der Schadenfälle

[1]) Es ist natürlich hier an den gerade ausreichenden Einsatz gedacht, wie bei den Risikoprämien an die gerade ausreichenden, wie es ja die Forderung des „gerechten Spieles" verlangt.

entsprechend, benötigt. So erhält er im m-ten Versicherungsjahre von jedem Versicherten den Betrag π und zwar erhält er diese Beträge zur Deckung der in diesem Jahre eingetretenen Schadenfälle, deren Wert durch die Formel $\sum_{1}^{l} {}^{k}\bar{q}_{k} \cdot c_{k}$ gegeben ist.

Für die Bilanz ist das Risiko der nächtsfolgenden Geschäftsperiode allein massgebend, wie in der erwähnten Abhandlung über das technische Zufallrisiko näher erläutert ist.

Wird die Bilanz jedesmal für einen Zeitraum von h Jahren gezogen und bezeichnet μ den ersten Jahrestag der Versicherung des k-ten Versicherten, der als x-jähriger vor m Jahren die Versicherung abgeschlossen hat, in der in Rechnung zu ziehenden Geschäftsperiode derart, dass die Geschäftsperiode selbst durch die Werte 0 und h charakterisiert ist, wobei $h = \mu + (h-1) + 1 - \mu$ ist, so ist für einen Bestand von l Versicherungen das technische Bilanzrisiko

$$M = a\sqrt{\sum_{1}^{l}{}^{k} \sum_{\mu}^{h}{}^{v} \; {}_{0}M^{2}_{k,\,v}} \tag{14}$$

Um für einen ganzen Bestand das Risiko zu bestimmen, kommt es mithin in erster Linie auf die Auswertung der Grössen

${}_{0}M^{2}_{k,\,\mu},\ {}_{0}M^{2}_{k,\,1+\mu},\ {}_{0}M^{2}_{k,\,2+\mu},\ \ldots\ {}_{0}M^{2}_{k,\,h-1+\mu},\ {}_{0}M^{2}_{k,\,h}$ an.

Es ist [1])

$$\begin{aligned}
{}_{0}M^{2}_{k,\,\mu} &= \mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1}\,(1-\mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1})\,c^{2}_{k,\,\mu}\,\overline{v}^{2\mu} \\
{}_{0}M^{2}_{k,\,1+\mu} &= (1-\mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1})\,\bar{q}_{k,\,x+m}\,(1-\bar{q}_{k,\,x+m})\,c^{2}_{k,\,1+\mu}\,\overline{v}^{2(1+\mu)} \\
{}_{0}M^{2}_{k,\,2+\mu} &= (1-\mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1})\,(1-\bar{q}_{k,\,x+m})\,\bar{q}_{k,\,x+m+1} \\
&\quad (1-\bar{q}_{k,\,x+m+1})\,c^{2}_{k,\,2+\mu}\,\overline{v}^{2(2+\mu)} \\
&\ \,\vdots \\
{}_{0}M^{2}_{k,\,(h-1)+\mu} &= (1-\mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1})\prod_{x+m}^{x+m+h-3}{}_{0}\,(1-\bar{q}_{k,\,0}) \\
&\quad \bar{q}_{k,\,x+m+h-2}\,(1-\bar{q}_{k,\,x+m+h-2})\,c^{2}_{k,\,(h-1)+\mu}\,\overline{v}^{2(h-1)+\mu} \\
{}_{0}M^{2}_{k,\,h} &= (1-\mu\,\bar{q}_{k,\,x+m-1})\prod_{x+m}^{x+m+h-2}{}_{0}\,(1-\bar{q}_{k,\,0})\,(1-\mu) \\
&\quad \bar{q}_{k,\,x+m+h-1}\,\big(1-(1-\mu)\,\bar{q}_{k,\,x+m+h-1}\big)\,c^{2}_{k,\,h}\,\overline{v}^{2h}
\end{aligned} \tag{15}$$

Für die technische Auswertung ist nur eine registermässige Berechnung der Quadrate der riskierten Kapitale Bedingung, denn die Faktoren sind nur vom laufenden Alter und vom Zinsfuss abhängig, wobei allerdings die wahren Wahrscheinlichkeiten zugrunde zu legen sind.

Wenn daher eine Gesellschaft als Rechnungsgrundlage keine Selektionssterbetafel eingeführt hat, gemäss der eine Registrierung nach der Versicherungsdauer, wenigstens in den Selektionsjahren, erfolgt, so erscheint infolge der Abhängigkeit der sich eng an die Wirklichkeit anschliessenden Wahrscheinlichkeiten von der Versicherungsdauer eine Registrierung nach dieser im Interesse einer scharfen Bewertung angebracht, jedoch auch dann nur während der Selektionsjahre.

Die für die Berechnung der Quadrate der riskierten Kapitale notwendige Eintragung in die Register und die Berechnung der Variabeln ergibt sich aus den nachstehenden Umformungen der Werte $c^{2}_{k,\,\mu}$.

Wenn σ die Höhe der versicherten Renten und S die versicherte Summe ist, so ist für die abgekürzte Leibrente

$$c_{k,\,\mu} = \sigma \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|} = \frac{\sigma}{D_{x+m}}\left(\Sigma D_{x+m} - \Sigma D_{x+n}\right)$$

$$\begin{aligned}
c^{2}_{k,\,\mu} &= \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D_{x+m}}\right)^{2}[\sigma^{2}] - \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D^{2}_{x+m}}\right)[2 \cdot \sigma^{2}\,\Sigma D_{x+n}] \\
&\quad + \left(\frac{1}{D^{2}_{x+m}}\right)[\sigma \cdot \Sigma D_{x+n}]^{2}
\end{aligned} \tag{16}$$

für die gemischte Todesfallversicherung mit einmaliger Prämienzahlung

$$c_{k,\,\mu} = \frac{S}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

$$\begin{aligned}
c^{2}_{k,\,\mu} &= \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D_{x+m}}\right)^{2}\left[\frac{S}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}}\right]^{2} - \left[2\,\frac{S^{2}}{\mathfrak{a}^{2}_{x\,\overline{n}|}}\,\Sigma D_{x+n}\right] \\
&\quad \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D^{2}_{x+m}}\right) + \left[\frac{S}{\mathfrak{a}_{x\,\overline{n}|}} \cdot \Sigma D_{x+n}\right]^{2} \cdot \left(\frac{1}{D^{2}_{x+m}}\right)
\end{aligned} \tag{17}$$

für die gemischte Todesfallversicherung mit jährlicher Prämienzahlung

$$c^{2}_{k,\,\mu} = S \cdot \vartheta \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

$$\begin{aligned}
c^{2}_{k,\,\mu} &= \left(\frac{(\Sigma D_{x+m})^{2}}{D^{2}_{x+m}}\right)[S \cdot \vartheta]^{2} - [(S \cdot \vartheta)^{2} \cdot 2 \cdot \Sigma D_{x+n}] \\
&\quad \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D^{2}_{x+m}}\right) + [S \cdot \vartheta \cdot \Sigma D_{x+n}]^{2} \cdot \left(\frac{1}{D^{2}_{x+m}}\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

für die terme-fixe-Versicherung

$$c_{k,\,\mu} = \frac{S \cdot \varrho^{n}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \mathfrak{a}_{x+m\,\overline{n-m}|}$$

$$\begin{aligned}
c^{2}_{k,\,\mu} &= \left[\frac{S \cdot \varrho^{n}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}}\right]^{2} \cdot \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D_{x+m}}\right)^{2} - \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D^{2}_{x+m}}\right) \\
&\quad \cdot \left[2\left(\frac{S \cdot \varrho^{n}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}}\right)^{2} \cdot \Sigma D_{x+n}\right] + \left(\frac{1}{D^{2}_{x+m}}\right)\left[\frac{S \cdot \varrho^{n}}{\mathfrak{a}_{x\overline{n}|}} \cdot \Sigma D_{x+n}\right]^{2}
\end{aligned} \tag{19}$$

[1]) In der erwähnten Abhandlung „Das technische Zufallrisiko" ist in diesen Formeln insofern ein Druckfehler unterlaufen, als den Grössen c und v^{μ} dieselben Potenzen gegeben sind.

für die Erlebensfallversicherung mit einmaliger Prämienzahlung

$$c_{k,\mu} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+m}}$$

$$c^2_{k,\mu} = \left(\frac{1}{D^2_{x+m}}\right)[S \cdot D_{x+n}]^2 \tag{20}$$

für die Erlebensfallversicherung mit jährlicher Prämienzahlung

$$c_{k,\mu} = \frac{S}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \frac{1}{D_{x+m}} (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+m})$$

$$c^2_{k,\mu} = \left(\frac{1}{D^2_{x+m}}\right)\left[\frac{S}{a_{x\overline{n}|}} \cdot \Sigma D_x\right]^2 - \left(\frac{\Sigma D_{x+m}}{D^2_{x+m}}\right)\left[\left(\frac{S}{a_{x\overline{n}|}}\right)^2 \cdot 2 \cdot \Sigma D_x\right] + \left(\frac{\Sigma D^2_{x+m}}{D^2_{x+m}}\right)\left[\frac{S}{a_{x\overline{n}|}}\right]^2 \tag{21}$$

Die Konstanten der Registrierung sind in eckige Klammern eingeschlossen, die Variabeln ergeben sich aus den in den Gleichungen (15) charakterisierten Faktoren in Verbindung mit den in den Gleichungen (16—21) enthaltenen, vom laufenden Alter abhängigen, in runden Klammern eingeschlossenen Grössen.

In der Kongressarbeit ist ausgeführt, dass das vornehmste Deckungsmittel der Zufallschwankungen der Risikogewinn ist, da in diesem sich überhaupt die zufällige Kumulierung von Schadensummen erst bemerkbar macht. Eine Gegenüberstellung des tatsächlichen Risikogewinnes am Ende einer Geschäftsperiode mit dem wahrscheinlichen lässt überhaupt erst erkennen, ob ausserrechnungsmässige Schäden eingetreten sind.

Für eine Geschäftsperiode von h Jahren ist, wie in der erwähnten Abhandlung näher abgeleitet ist, gemäss unserer eingeführten Bezeichnung der Wert des wahrscheinlichen Risikogewinnes am Termin O für den k-ten Versicherten

$$\mu\,[q_{k,x+m-1} - \overline{q}_{k,x+m-1}]\, c_{k,\mu} \cdot v^{\mu} + (1 - \mu \cdot \overline{q}_{k,x+m-1}) [q_{k,x+m} - \overline{q}_{k,x+m}] \cdot c_{k,1+\mu}\, v^{1+\mu} + \ldots\ldots + (1 - \mu \cdot \overline{q}_{k,x+m-1}) \prod_{x+m}^{x+m+h-2}{}_0 (1 - \overline{q}_{k,0}) [q_{k,x+m+h-1} - \overline{q}_{k,x+m+h-1}] \cdot (1-\mu) \cdot c_{k,h} \cdot v^h = \sum_{\mu}^{h}{}_v\; {}_0R_{k,v}$$

und für den Bestand von l Versicherten

$$\sum_{1}^{l}{}_k \sum_{\mu}^{h}{}_v\; {}_0R_{k,v}.$$

Der Wert des wahrscheinlichen Risikogewinnes ist von denselben Faktoren abhängig wie das Zufallrisiko, jedoch mit dem wesentlichen Unterschied, dass das riskierte Kapital nur in der linearen Potenz vorkommt. Das riskierte Kapital ist nun entweder die Prämienreserve selbst oder die Differenz zwischen Versicherungssumme und Prämienreserve. Es ist daher möglich, mit Hülfe der Reserveregister den Wert des wahrscheinlichen Risikogewinnes festzustellen.

Die Differenz zwischen der wahrscheinlichen Zufallschwankung und dem wahrscheinlichen Risikogewinn ergibt die Grösse der Mittel, die reserviert werden müssen, damit am nächsten Bilanztage die Bilanz keine Übersterblichkeit, kein relatives Zufalldefizit, aufweist. Zur Zurückstellung dieser Risikoreserve ist natürlich in erster Linie der tatsächliche Risikogewinn der vergangenen Geschäftsperiode heranzuziehen; eine Untersuchung des effektiven Risikogewinnes am Ende des Geschäftsjahres lässt dann erkennen, welche Zufallschwankung tatsächlich eingetreten ist[1]).

Die vorstehende Untersuchung sollte in erster Linie nur die *Möglichkeit* darlegen, dass man das Zufallrisiko und dessen vornehmstes Deckungsmittel, den wahrscheinlichen Risikogewinn, praktisch auswerten kann. Eine derartige Auswertung ist jedoch *nicht* notwendig, da erfahrungsgemäss für die grossen Lebensversicherungsanstalten trotz der Aufstellung einer jährlichen technischen Bilanz die Zufallschwankung paralysiert wird. Für kleinere Versicherungsanstalten (Sterbekassen etc.) konnte eine derartige Beobachtung noch nicht gemacht werden, da diese zum Teil nicht auf technisch korrekter Basis aufgebaut, noch technisch einwandfrei für längere Zeitepochen beobachtet sind. Die Erfahrung wird auch hier — wenigstens für solche Kassen, die den Namen „Versicherungsverein" in technischer Hinsicht verdienen — zeigen, dass eine Paralysation der Zufallschwankung im Risikogewinn erfolgt, sobald man nur der Kasse Gelegenheit gibt, die Ausgleichung auf eine möglichst breite Basis zu stellen, d. h. eine technische Bilanz nur in grösseren Intervallen fordert. Im Hinblick hierauf ist in der Abhandlung „Das technische Zufallrisiko" die Forderung aufgestellt, *die Prämie auf der Basis einer Sterblichkeitstafel zu berechnen, die solche Gewinne erzeugt, dass keine Geschäftsperiode bilanztechnisch durch eine zufällige Kumulierung von Schadenssummen gefährdet wird. Hinzugefügt ist dort, dass man im Hinblick auf die Erfahrungstatsachen der Befürchtung überhoben ist,*

---

[1]) Über die Berechnung des tatsächlichen Risikogewinnes in der Lebensversicherung siehe: Bohlmann, Die Berechnung des Sterblichkeitsgewinnes bei einer Lebensversicherungsgesellschaft, Veröffentlichung des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft 4, Berlin 1905, und Böhmer-Gramberg: Der Risikogewinn in der Lebens- und Invaliditätsversicherung, Berlin 1906, Puttkammer und Mühlbrecht, sowie Böhmer, Näherungsformeln für den Risikogewinn. (Zeitschrift für die ges. Versicherungswissenschaft, Bd. IX., 4. Heft, S. 775, 1909.)

auf der Basis solcher Sterblichkeitstafeln zu unwirtschaftlichen Prämien gelangen zu können.

Es ist schon von anderen Seiten darauf hingewiesen worden, dass eine Paralysation der Zufallschwankung im Risikogewinn, wenigstens im Geschäftsgewinn erfolgt, am eingehendsten von Radtke in seiner Arbeit: „Die Stabilität der Lebensversicherungsanstalten" [1]). Er sagt im Hinblick auf die normalen Verhältnisse der grösseren Lebensversicherungsanstalten: „Einen besonderen Sicherheitsfonds, der gegen die zufälligen Schwankungen im Verlauf der Sterblichkeit schützt, braucht man nicht." Wenn Radtke die von uns aufgestellte Forderung nicht gezogen hat, so liegt das daran, dass er durchgehend das einjährige Risiko statt das Risiko einer Geschäftsperiode in Rechnung gestellt hat, sodass er im Hinblick auf kleine Versicherungsvereine die Frage aufwirft: „Kann eine Sterbekasse, die sonst auf technisch korrekter Basis ruht, aber nur wenig, vielleicht 200 Mitglieder umfasst — in Wirklichkeit kommen sogar noch kleinere Kassen vor — auch auf einen solchen Sicherheitsfonds verzichten?" Wenn auch aus seinen Erörterungen unzweifelhaft hervorgeht, dass er durch die Bilanzführung zur Anwendung des einjährigen Risikos gekommen ist, so ist diese Frage nur dadurch erklärlich, dass er den Begriff „technische Bilanz" nicht scharf genug präzisiert hat, denn sonst hätte er sich zuerst fragen müssen: „Ist denn die jährliche Aufstellung einer technischen Bilanz für diese Kasse möglich?" *Wenn schon ein Versicherungsverein mit 200 Mitgliedern als* eine versicherungstechnische *Anomalie* angesehen werden muss, so ist *die jährliche Aufstellung einer technischen Bilanz für eine solche Kasse geradezu eine Unmöglichkeit.* Bei der Forderung einer jährlichen technischen Bilanz kann einer solchen Kasse auch ein rechnungsgemässer Sicherheitsfonds, dessen Höhe sich selbstverständlich in den Grenzen der Wirtschaftlichkeit halten muss, einen stetigen Verlauf nicht gewährleisten. Es ist daher technisch wohlbegründet, wenn von kleineren Versicherungsvereinen nur in grösseren Zeitintervallen die Aufstellung einer technischen Bilanz gefordert wird, wenn man auch von nicht technischer Seite diese Forderung nur als eine Entlastung des Verwaltungskostenetats anzusehen beliebt. Ja, von rein technischem, zum wenigsten von wahrscheinlichkeitstheoretischem Standpunkte wäre es sogar berechtigt, von allen Lebensversicherungsanstalten wenigstens eine *Veröffentlichung* der technischen Bilanz nur in grösseren Zeitintervallen zu fordern, wie z. B. in England, wenn auch die *ständige* Beobachtung der versicherten Gesamtheit die Hauptaufgabe des Versicherungstechnikers sein und bleiben muss. Die Versicherungsanstalten dürfen nicht mit den übrigen Erwerbsgesellschaften unter demselben allgemeinen Standpunkt betrachtet werden, sie sind eine Klasse von Gesellschaften für sich, die zwar einerseits den vollen Charakter einer Erwerbsgesellschaft tragen, andererseits jedoch infolge der eigenartigen Grundlagen nur Vermittler des technischen Gegenseitigkeitsprinzips sind. Den richtigen Kompromiss zwischen diesen beiden Grundeigenschaften zu schaffen, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Versicherungswissenschaft. Will man die Versicherungsgesellschaften allein vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus beurteilen, so muss man sie als Veranstalter von „gerechten" Glückspielen ansehen und darf dann nur in den seltensten Fällen eine jährliche technische Bilanz fordern. Für die grösste Anzahl der Gesellschaften ist diese Forderung viel zu weitgehend, sie werden, wenn nicht andere Gründe mitsprechen, dadurch nur gezwungen, durch enorm hohe Aufschläge und durch Dividendenbeteiligung, wobei gewöhnlich den natürlichen Verhältnissen hohnsprechende Systeme zur Anwendung gelangen, ihre wahren Verhältnisse zu verschleiern, um nicht ihre jährlichen Überschüsse allein dem Zufall zu überlassen, so dass die zufälligen Schwankungen der Sterblichkeit sich nur als relative Zufallsdefizite bemerkbar machen, die dann gegenüber dem übrigen Geschäftsgewinn nur eine untergeordnete Rolle spielen. Natürlich sind bei der Beurteilung, welches Zeitintervall zur Aufstellung der technischen Bilanz zu fordern ist, noch andere Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Jedenfalls sollte man zum mindestens die jährliche technische Abrechnung kleinerer Gesamtheiten meiden und den Grundsatz aufstellen: Je kleiner die Gesamtheit, um so grösser die Zeitintervalle der technischen Bilanz, d. h. um so mehr Gelegenheit bieten, eine grössere Menge Versicherungsspiele zum Ausgleich der Zufallschwankung zu verbinden. Wenn man, so u. a. Hattendorf, von der Überlegung ausgeht, dass einerseits „das Risiko um so geringer ausfällt, je kürzer die Zeit ist", andererseits „jede Abrechnung den Einfluss der Zufallschwankung beseitigt", dass mithin „die Beseitigung des Einflusses der Abweichungen um so leichter wird, je kleiner das Risiko ist, d. h. also namentlich je kürzere Zeit von einem Abschluss zum anderen verfliesst" und wenn man dann weiter schliesst, dass „die Praxis der deutschen Anstalten, die jährlich abschliessen, bei weitem den Vorzug vor dem Verfahren der englischen verdienen, die fünf-, sieben-, ja zehnjährige Geschäftsperioden haben", so übersieht man, dass zwar das Totalrisiko grösser, das relative Risiko jedoch kleiner wird, je grösser der Zeitintervall ist, dass also im Verhältnis zur Summe der Risikoprämien

[1]) Radtke, Die Stabilität der Lebensversicherungsgesellschaften (Zeitschrift für Versicherungswissenschaft, 1904); Peek, Problem vom Risiko in der Lebensversicherung (Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenschaft, 1909).

ein immer kleinerer Aufwand notwendig wird, dass mithin eine immer kleinere „ungerechte" Mehreinnahme an Risikoprämie ausreicht, um die Zufallschwankung im Risikogewinn zu paralysieren, sodass, von wahrscheinlichkeitstheorethischem Standpunkte aus, die Abrechnung gerade in möglichst grossen Zeitintervallen gefordert werden muss. Voraussetzung ist natürlich, dass es möglich ist, eine korrekte technische Basis herzustellen. Ist diese nicht gegeben, wie es in den allermeisten Fällen für Sterbekassen der Fall ist, so sind ja von vornherein solche Sicherheitsfaktoren erforderlich, dass die Zufallschwankung demgegenüber ganz verschwindet.

Die Forderung der Paralysation der Zufallschwankung im Risikogewinn ist gegeben durch die Bedingung

$$i \leqq 1,$$

wenn

$$i = \frac{\alpha \sqrt{\sum_{1}^{l} {}_{k} \sum_{\mu}^{h} {}_{v} \; {}_{0}M_{k,v}^{2}}}{\sum_{1}^{l} {}_{k} \sum_{\mu}^{h} {}_{v} \; {}_{0}R_{k,v}}$$

und h gleich der Anzahl der Jahre ist, für welche die technische Bilanz gezogen werden soll.

Diese Bedingung entspricht dem Radtke'schen Stabilitätsmassstabe für den Sonderfall, dass nur die Gewinne der Sterblichkeit zur Deckung herangezogen werden, und dass die Geschäftsperiode nur ein Jahr beträgt; sie entspricht mithin auch dem Radtke'schen relativen Risiko erster Art. Es soll, um schon besser Gesagtes nicht wiederholen zu müssen, auf die Probleme, die Radtke behandelt hat, nicht eingegangen werden, nur eines soll Erwähnung finden.

Radtke hat als Grundlage aller seiner Risikoformeln das absolute Risiko einer einzelnen Versicherung, also abgesehen von dem Faktor α,

$$M = \sqrt{p \cdot \overline{q} \cdot c^2 \cdot v^2}$$

gewählt. Diese Wahl kann Anlass geben zu irrigen Schlussfolgerungen und hat auch zu solchen geführt; denn nicht allein ist hierdurch die Grundgrösse in Abhängigkeit gebracht von *zwei* variabeln Grössen, sondern diese sind überdies noch von verschiedenen Sterblichkeitstafeln abhängig, c von den Rechnungsgrundlagen der Gesellschaft, $\overline{q}$ von einer Tafel, die sich eng an die tatsächlichen Verhältnise anschliesst. Wie sehr die Annahme dieser Grundgrösse irreführen kann, zeigt folgende Schlussfolgerung Radtkes:

„Das absolute Risiko eines Bestandes von Versicherungen wird bei gegebener Gesamtversicherungssumme zu einem Minimum, wenn die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Versicherungssummen sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der zugehörigen absoluten Risiken [1])."

Dies ist in dieser Form richtig. Wenn aber nun Radtke weiter schliesst: „In dem speziellen Falle, dass alle Risiken untereinander gleich sind, wird das absolute Risiko des Bestandes ein Minimum, wenn auch die Versicherungssummen der einzelnen Versicherungen einander gleich sind", so hat er übersehen, dass das absolute Risiko $\sqrt{p \cdot \overline{q} \cdot c^2 \cdot v^2}$ denselben Wert auf unendlich viele Arten annehmen kann, dass also keineswegs bei gleichen Versicherungssummen und gleichen absoluten Risiken das Gesamt-Risiko ein Minimum wird; dies tritt nur ein, wenn alle Versicherungen in einer Altersklasse, besser Klasse gleicher Sterbenswahrscheinlichkeiten, stehen, wenn also durch obige Bedingungen die Forderung gleicher riskierter Kapitale bei gleichem laufenden Alter aufgestellt wird.

Wie sehr verschieden bei gleichem totalen Risiko die Versicherungssumme ist, zeigt folgende Auswertung:

Ein Bestand enthält nur gemischte Versicherungen 30/60 in den verschiedensten Versicherungsjahren. Es soll das Risiko zu einem Minimum werden.

Alsdann müssen, wenn für jede Versicherung das einfache Totalrisiko $\sqrt{p \cdot \overline{q} \cdot c^2 \cdot v^2} = 100$ sein soll, die Versicherungssummen in folgender Verteilung vorhanden sein, falls die Gesellschaft die Tafel *M und W I* $3^1/_2$ % als Grundlage benutzt und der tatsächliche Verlauf der Sterblichkeit durch die Tafel *L M* gegeben ist:

Wenn die Versicherungssumme sich im x-ten Versicherungsjahr befindet,	so muss, um obiger Forderung zu genügen, die Versicherungssumme betragen:
1	2123
3	1630
5	1530
10	1465
15	1492
20	1708
25	2599
29	9962

Radtke führt an dieser Stelle Landré an. Dieser drückt sich aber viel vorsichtiger aus [2]): „Das mathematische Risiko sowohl als auch das relative Risiko ist am kleinsten bei gleicher Verteilung des versicherten Betrages über die Personen." Wenn dieser auch — obwohl er es voraussetzt — vergisst, zu betonen, dass dies nur bei gleichem Alter (und gleicher Versicherungsdauer) der Fall ist, so liegt doch der

[1]) a. a. O. S. 24. (Sonderabdruck.)

[2]) Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung, III. Aufl. 1905, S. 433.

wesentliche Unterschied beider Sätze in dem Ausdruck „versicherter Betrag" und „Versicherungssumme". Bei Radtke ist unzweifelhaft unter Versicherungssumme die vertragsmässige zu verstehen, Landré will in diesem Falle, wie seine späteren Erläuterungen zeigen, unter „versicherten Betrag" die technisch versicherte Summe, das riskierte Kapital verstanden wissen, eine Auffassung, die allein richtig ist.

Am zweckmässigten ist es, um jede irrige Schlussfolgerung zu vermeiden, als Grundlage aller Risikountersuchungen eine Grösse zu wählen, die allein von der Sterbenswahrscheinlichkeit abhängt.

Wenn man den Faktor $\overline{p} \cdot \overline{q}$ als Grundlage wählt, so lautet obiger Satz richtig: Das Zufallrisiko eines Bestandes von Versicherten wird bei gegebenem Gesamtriskierten-Kapital zu einem Minimum, wenn die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Quadrate der riskierten Kapitale sich umgekehrt verhalten wie die Produkte aus der zugehörigen Sterbenswahrscheinlichkeit und der Überlebenswahrscheinlichkeit. In dem speziellen Falle, dass alle Versicherungen derselben Altersklasse (und derselben Klasse gleicher Versicherungsdauer) angehören, wird das absolute Risiko des Bestandes ein Minimum, wenn die riskierten Kapitale der Versicherungen einander gleich sind.

Die Grundlage jeglicher technischer Berechnung bildet nicht die Versicherungssumme, sondern das riskierte Kapital, und da dieses in engster Beziehung steht zur Risikoprämie, so ist auch die Risikoprämie geeignet, als Basis der Zufallsbewertung zu dienen.

Wenn die Risikoprämien nicht zur Bildung unserer Grundformeln herangezogen sind, so liegt das nur daran, dass in Wirklichkeit der Versicherer mehr an Risikoprämien einzieht als der gerechten Erwartung entspricht, dass er, spieltechnisch ausgedrückt, ein zu seinen Gunsten ungerechtes Spiel entriert.

Wenn man den Ausdruck $\pi_{k,m} \cdot v = \overline{q}_{k,m} \cdot c_{k,m} \cdot v$ als „gerechten Einsatz", d. h. als gerade ausreichende Risikoprämie in die Rechnung einführt, so ist das Zufallrisiko gegeben durch die Formel

$$M = a \sqrt{\sum_1^l {}^k \sum_1^n {}^m \left[\prod_1^{m-1} {}_0 (1 - \overline{q}_{k,0}) \cdot v^{2(m-1)} \cdot \frac{1 - \overline{q}_{k,m}}{\overline{q}_{k,m}} \cdot \pi_{k,m}^2 \cdot v^2 \right]}$$

Fasst man den einfachsten Fall des einjährigen Risikos ins Auge, so ist

$$M = a \sqrt{\sum_1^l {}^k \frac{1 - \overline{q}_{k,m}}{\overline{q}_{k,m}} \cdot \pi_{k,m}^2 \cdot v^2}$$

und dieses wird zu einem Minimum, wenn die Quadrate der gerade ausreichenden Risikoprämien sich umgekehrt verhalten wie die Quotienten aus der Überlebens- und der Sterbenswahrscheinlichkeit und in dem speziellen Falle, dass alle Versicherungen in gleicher Altersklasse (und in einer Klasse gleicher Versicherungsdauer) stehen, wenn auf alle Versicherungen dieselbe Risikoprämie entfällt.

Diesem Minimum zuzustreben und dadurch den Idealzustand der Stabilität zu erreichen, ist das eifrigste Bestreben jeder Gesellschaft, wenn sie durch Rückversicherung hohe Versicherungssummen technisch reduziert.

Für die Praxis wird folgende Überlegung eine Anregung zur exakteren Bewertung der relativen Rückversicherungssumme geben: Bedenkt man, dass beim mittleren Risiko durch die Einführung der zweiten Potenzen der unter Risiko stehenden Summen den vom Mittelwert bedeutend abweichenden Summen nur ein grösserer Einfluss auf die Gefahrbewertung beigelegt wird, dass die einfachere Gefahrbewertung das durchschnittliche resp. mathematische Risiko $\overline{p}_{k,m} \cdot \overline{q}_{k,m} \cdot c_{k,m} \cdot v$ darstellt, so erkennt man durch die Berechnung dieses Risiko für eine Gesamtheit und zwar für ein Jahr gemäss der Formel

$$\varrho = \sqrt{\sum_1^l {}^k (\overline{p}_{k,m} \, \overline{q}_{k,m} \cdot c_{k,m} \cdot v)^2}, .$$

— die allerdings nur dann in dieser Form Gültigkeit besitzt, wenn jede Teilgesamtheit aus einer sehr grossen Anzahl gleichartiger Einzelspiele besteht, — dass das Risiko am kleinsten ist, wenn die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Reingewinnhoffnungen gleich sind. Man hat daher den Idealzustand erreicht, wenn die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Reingewinnhoffnungen in bezug auf den Versicherer dieselbe Grösse haben, wobei natürlich Voraussetzung ist, dass man dem durchschnittlichen Risiko eine praktisch genügend scharfe Gefahrbewertung zuerkennt, und die Berechnung des Gesamtrisikos einer endlichen Anzahl von Versicherungen für praktische Verhältnisse durch obige Formel als genügend genau anerkennt.

Nun sind ja dem praktischen Gebaren bei der Rückversicherung die Grenzen der Wirtschaftlichkeit gezogen, so dass dieser Idealzustand nie erreicht, sondern nur angestrebt werden kann. Man begnügt sich daher damit, gewisse obere Grenzen für den Selbstbehalt zu fixieren.

Als Massstab nimmt man im allgemeinen noch die Versicherungssumme an, wohl in der Erkenntnis, dass im Anfang der Versicherung das riskierte Kapital für diese rohen Grenzbestimmungen hinreichend genau gleich der Versicherungssumme ist, doch für Versicherungen mit einmaliger Prämie und für Nachversicherungen, wo diese Gleichsetzung ja nicht mehr zutreffend ist, wenden wohl die meisten Gesellschaften schon das riskierte Kapital als Massstab an.

Im Hinblick auf obige Darlegung wäre es exakter, als Massstab die Reingewinnhoffnungen zu nehmen.

Wenn man schliesslich berücksichtigt, dass man nur eine rohe Grenze festlegen will, so könnte als ein für praktische Verhältnisse genügend sicherer Massstab die Risikoprämie normiert werden [1]), die den grossen Vorteil bietet, für *alle* Versicherungs*arten* einen geeigneten Ausdruck der relativen Gefahrbewertung zu bilden, da sie in gleicher Weise auf die Zahlungsweise, auf das Alter und auf die Versicherungsart selbst Rücksicht nimmt. Jedenfalls geht eine Gesellschaft viel sicherer, wenn sie anstrebt, die Versicherungen derart rückzuversichern, dass die auf die einzelnen Versicherungen entfallenden Risikoprämien nicht über eine von vornherein festgesetzte Höhe hinausfallen, als wenn sie diese Forderung für die Versicherungssummen resp. riskierten Kapitale fixiert.

Hierbei ist zu beachten, dass es nicht genügt, nur die Verhältnisse des ersten Versicherungsjahres der Beurteilung der Rückversicherungsverhältnisse zugrunde zu legen, man sollte die zusätzliche Forderung stellen, dass während der ganzen Dauer der Versicherung die festgesetzte Grenze nicht überschritten wird. Man glaubt in der Praxis diese Forderung nicht stellen zu brauchen, da man von der Auffassung ausgeht, dass für die gebräuchlichsten Versicherungskombinationen (besonders für die gemischte Versicherung) das einjährige Risiko am Anfang der Versicherung am grössten sei. Dies ist jedoch nicht ganz richtig.

Radtke kommt bei der Untersuchung des Einflusses der Versicherungsdauer auf das Risiko allgemein zu dem Resultat, dass man, da der Faktor $\bar{p} \cdot \bar{q}$ für die üblichen Versicherungsarten dem Faktor c^2 entgegenwirke, a priori das Gesamtresultat dieser beiden widerstrebenden Einflüsse nicht angeben könne, und dass daher dieser Einfluss für jedes gegebene Material besonders untersucht werden müsse. Radtke fordert richtig, dass in der Formel für das mittlere Risiko die wirklichen Überlebens- bezw. Sterbenswahrscheinlichkeiten eingesetzt werden müssen, während das reduzierte Kapital nach der von der Gesellschaft benutzten Sterbetafel zu berechnen ist. Wenn man den Faktor $\bar{p} \cdot \bar{q}$ mit Hülfe einer Selektionstafel berechnet, die für scharfe Bewertungen, wie sie beim Zufallrisiko gefordert werden müssen, allein massgebend sein kann, so steigt der Wert dieses Faktors innerhalb der Selektionsjahre derart rapide, dass selbst für die gemischten Versicherungen, wenigstens in den Jahren der ärztlichen Auslese im allgemeinen eine Steigerung des einjährigen Risikos eintritt, eine Steigerung, die so beträchtlich ist, dass sie praktisch nicht übersehen werden darf. In nachstehender Tabelle gibt die Abscisse das laufende Alter, die Ordinate das einfache einjährige Risiko für die gemischten Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung an; der Anfangspunkt der Kurven entspricht dem Eintrittsalter, die Kurven treffen die Abscissenachse durchgehend ein Jahr vor dem Schlussalter der Versicherung. Als Rechnungsgrundlagen der Gesellschaft sind angenommen (M u. $W\,I$ $3^1/_2\,\%$), als Tafel des tatsächlichen Verlaufes die Tafel $L\,M$.

Man erkennt sofort die beträchtliche Steigerung während der ersten Versicherungsjahre. Es müsste daher zum mindesten derart rückversichert werden, dass die Risikoprämie während der ganzen Dauer der Versicherung nicht über die festgesetzte obere Grenze steigt.

Natürlich ist ausser auf das Zufallrisiko und auf die Wirtschaftlichkeit bei der Rückversicherung noch auf andere Momente Rücksicht zu nehmen, die von nicht unerheblichem Einfluss sind, so besonders auf das für hohe Summen anders zu bewertende Moment der Spekulation von seiten des Versicherten. Für die vorliegende Untersuchung genügt es festzustellen, dass man durch geeignete Rückversicherung die Zufallschwankung in gewisse Grenzen einschalten kann. Im Hinblick hierauf könnte man die Frage aufstellen, welche Grenze man bei gegebenen Verhältnissen normieren müsse, um die Zufallschwankung im Risikogewinn zu paralysieren. Das ist eine Frage der Rückversicherung, die an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden soll, für die Praxis erscheint es wichtiger, von gegebenen Verhältnissen auszugehen und eine Methode zu finden, die es ermöglicht, ohne grossen Arbeitsaufwand — eine Bedingung, die praktisch von wesentlicher Bedeutung ist — wenigstens approximativ die Zufallschwankung, die in der nächsten Geschäftsperiode höchstens zu erwarten ist, zu schätzen und festzustellen, ob der wahrscheinliche Risikogewinn zur Deckung ausreichen wird, resp. ob in die Bilanz eine Rücklage eingestellt werden muss, damit die nächste Bilanz nicht ein relatives Zufallsdefizit, eine Übersterblichkeit, aufweist, oder — ein zweiter Weg — Typen für die Alters- und Summen- resp. Risikoprämienverteilung festzustellen, für die der wahrscheinliche (rechnungsmässige) Risikogewinn zur Paralysation der Zufallschwankung ausreicht, so dass nur eine Beobachtung der Verteilung notwendig ist.

Wenn man diese Forderung aufstellt, so ist zunächst eine Frage zu beantworten, die von grundsätzlicher Bedeutung ist:

Muss eine Gesellschaft eine Sterblichkeitstafel benutzen, die Risikogewinne abwirft?

[1]) In erster Linie die gerade ausreichende Risikoprämie.

Diese Frage, die aus der Forderung der Sicherheit bejahend von vornherein zu beantworten ist, mag kurz beleuchtet werden.

Von rein wahrscheinlichkeitstheoretischem Standpunkte aus betrachtet, ist unter der Annahme, dass apriorische Wahrscheinlichkeiten zugrunde liegen, der Versicherer, der die vertragsmässigen Summen unter allen Umständen zu zahlen hat, gleichgültig ob der wirkliche Verlauf zufällig für ihn günstig verläuft oder nicht, stets im Nachteil; er wird, wenn er ein gerechtes Spiel entriert, stets ruiniert werden. Wenn er seine Verpflichtungen erfüllen will, so muss er schon unter der Voraussetzung, dass er apriorische Wahrscheinlichkeiten anwendet, ein zu seinen Gunsten ungerechtes Spiel entrieren. Wenn man nun weiter berücksichtigt, dass die angewandten Wahrscheinlichkeiten nur aposteriorische sind, dass er also nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit annehmen kann, dass der zukünftige Sterblichkeitsverlauf dem aus dem Beobachtungsmaterial hergeleiteten entspricht, so muss man diesen Sicherheitsfaktoren allein aus wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen eine gewisse Grösse, die sich allerdings in geringen Grenzen hält, zusprechen.

Nun hat man es in der Statistik gar nicht mit mathematischen Wahrscheinlichkeiten zu tun, man ist ja nur mit gewissen Approximationen berechtigt, die wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesetze auf statistische Verhältnisse anzuwenden. Wenn man auch für praktische Verhältnisse mit genügender Annäherung diese Annahme machen kann, so muss man doch bei der Anwendung der statistischen Masszahlen durch Sicherheitsfaktoren die Gewissheit zu erreichen suchen, dass die Statistik zutreffend sein wird. Statistische Masszahlen sind nicht Ausdrücke unabänderlicher Gesetze im Sinne der Physik; man hat es zwar in der Statistik auch mit Kräften zu tun, die ganz gesetzmässig wirken, der grosse Unterschied zwischen den physikalischen und den in der Statistik wirkenden Kräften ist jedoch der, dass es dort stets möglich ist, die einzelne Kraft zu eliminieren und deren Wirkung sowohl wie deren Veränderungen allein zu beobachten und daraus den Kausalnexus festzustellen, während es ja das wesentliche der Statistik ist, dass man es hier nur mit einer unendlichen Anzahl von untrennbaren, in ihren Einzelwirkungen nur ganz roh schätzbaren Kräften zu tun hat, dass man hier nur die Wirkung der Gesamtheit aller Ursachen erfassen kann, ohne den Kausalnexus selbst ergründen zu können. Die Wirkung einer einzelnen statistischen Kraft kann man nur ahnen, man kann sie nur schätzungsweise beobachten, wenn es zufällig gelingt, ihren Einfluss dominierend hervortreten zu lassen, im scharfen Gegensatz zu den physikalischen Kräften, wo eine Eliminierung fast ausnahmslos einwandfrei gelingt. Wenn man nun schon nicht fähig ist, die Wirkungen der statistischen Kräfte exakt darzustellen, um so weniger wird man die Wirkungen der Veränderungen dieser Kräfte gesetzmässig festlegen können.

Man kann eine statistische Gesamtheit nicht mit einer Maschine vergleichen, die in engen Grenzen kestimmte Arbeiten leistet, sie ist ein organisches Gebilde, das sich in ständiger Entwicklung befindet, auf dessen Entstehung und Entwicklung man jedoch immerhin einen erheblichen Einfluss ausüben kann. Für die Gesamtheit der privaten Versicherungsanstalten ist z. B. der Einfluss der ärztlichen Auslese, wenigstens für die ersten Jahre so dominierend, dass man notgedrungen auf diesen Einfluss Rücksicht nehmen muss. Wenn man auch im Hinblick hierauf die Selektionstafeln als die natürlichsten Sterbetafeln für ausgelesene Gesamtheiten betrachten muss, so muss doch auch auf die Gesamtwirkung der übrigen Einflüsse Rücksicht genommen werden. Von den unendlich vielen Bedingungen, unter denen die Gesamtheiten der Lebensversicherungsanstalten sich entwickeln, sollen hier nur zwei besonders bemerkenswerte kurz hervorgehoben werden, und zwar der Einfluss der Versicherungsbedingungen und der Einfluss des Sterblichkeitsverlaufs der Gesamtbevölkerung.

Die Versicherungsbedingungen zeigen eine Tendenz zur Liberalität. Immer weiter wird der Gefahrenkreis gezogen, der für die vertragliche Prämie versichert ist. Die weitgehendsten Zugeständnisse werden an den Berufswechsel und den Aufenthalt gemacht; der Selbstmord, der Tod infolge Duells wird eingeschlossen, Trunksucht, Freiheitsstrafen, sportliche Betätigung sind einflusslos, Unanfechtbarkeit und Weltpolice sind Schlagwörter geworden, nur eine kurze Karenzzeit, die immer mehr verkürzt wird, schützt noch vor den betrügerischen Spekulationen der Versicherten.

Wenn man nun auch bei der Aufnahme der Risiken eine gute Auslese treffen kann, den Veränderungen im weiteren Verlauf der Verträge steht man bei solchen liberalen Bedingungen einflusslos gegenüber. Welche Sterblichkeit eintreten wird, kann man daher a priori nicht sagen; man kann sie nur in gewissen Grenzen schätzen, es kann sowohl eine dauernde Steigerung der Sterblichkeit, wie nur eine vorübergehende stattfinden, zumal die meisten der in die Versicherung eingeschlossenen Gefahren von den wirtschaftlichen Verhältnissen abhängig sind. Wenn andererseits das Bestreben vorhanden ist, diese Schwierigkeit dadurch zu umgehen, dass man die heterogenen Gesamtheiten in möglichst homogene Klassen zerlegt, ein Bestreben, das in direktem Gegensatz steht zu den kulturellen Erfordernissen des Versicherungsvertrages, die in der weitgehendsten Unverfallbarkeit der Police am schärfsten zutage treten, so übersieht man, dass eine zu weitgreifende Differenzierung technisch unmöglich ist, allein wegen der Schwierigkeit der begrifflichen Festlegung der einzelnen Risikenklassen. Der Betriebsgerechtigkeit kann in technischer Hinsicht besser durch eine Differenzierung der Dividenden Genüge geleistet werden. Es würde zu weit vom Thema abführen, wenn dieses grosse wichtige Gebiet auch nur angeschnitten werden sollte, es genügt die Feststellung, dass mit der Erweiterung der Gefahreneinflüsse die Sicherheitsfaktoren wachsen müssen. Wenn die Frage nach ihnen noch wenig akut geworden ist, so liegt das daran, dass augenblicklich gegenüber dem dominierenden Einfluss des allgemeinen Sterblichkeitsverlaufs der Gesamtbevölkerung auf die Sterblichkeit von versicherten Gesamtheiten alle anderen Einflüsse einfach bedeutungslos sind. Ausserdem ist nicht zu übersehen, dass in vielen Fällen die Einflüsse der Versicherungsbedingungen in ihrer Gesamtwirkung scheinbar zu rein zufälligen werden und daher zu identifizieren sind mit den Zufallschwankungen im Sterblichkeitsverlauf selbst.

Wenn man schliesslich auch im Hinblick auf die augenblicklich fallende Tendenz der allgemeinen Sterblichkeit den Einflüssen der Versicherungsbedingungen keine Bedeutung in praktischer Hinsicht beizulegen braucht, so scheint es doch notwendig zu sein, auf die Grenzen dieser Tendenz hinzuweisen. Diese fallende Tendenz ist wohl im allgemeinen eine Folge der Verbesserung der allgemeinen wirtschaftlichen Lage, der Fortschritte der Hygiene und auch wohl der Veredelung der Lebensauffassung. Jedoch ist in der Bevölkerungsstatistik die Beobachtung gemacht worden, dass die Abnahme der Sterblichkeit langsamer wird, je niedriger die Sterblichkeitsziffer selbst schon ist, da die Abnahme der Sterblichkeit vorzugsweise in den Gebieten vor sich gegangen ist, die früher eine sehr hohe Sterblichkeit hatten. Diese Erscheinung ist darin begründet, dass um so grössere Schwierigkeiten der Verminderung der Sterblichkeit entgegenstehen, je geringer diese selbst ist, dass der Sterblichkeitsänderung eine Grenze gesetzt ist, über welche hinaus eine weitere Verringerung ausgeschlossen ist. Je mehr die Sterblichkeit sich dieser Grenze nähert, um so grössere Fortschritte in kultureller und hygienischer Beziehung bedarf es, um noch eine weitere Verminderung derselben herbeizuführen [1]).

Eine weitere Herabminderung auf Grund der allgemeinen Sterblichkeit wird also bald ihre äusserste Grenze erreichen. Jedenfalls sollte man diese Ergebnisse der jüngsten Jahrzehnte nur mit Vorbehalt und mit besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse der Lebensversicherungsgesellschaften auf die Zukunft anwenden, denn es kann möglich sein, dass diese augenblicklich abnehmende Tendenz der Sterblichkeit ins Stocken gerät, dass man z. B. infolge der Erhöhung der Sterblichkeit durch die Erweiterung des vertraglichen Gefahrenkomplexes zu einer steigenden Schwankung Stellung nehmen muss.

Für die besonderen Verhältnisse des Versicherungswesens ist dann noch zu beachten, dass die Annahmepraxis selbst eine liberalere wird, dass man Risiken gegenüber, für die sich durch eine Sonderstatistik vielleicht nur zufällig — eine günstigere Sterblichkeit ergeben hat, liberaler verfährt, — ist es ja eine bekannte Eigentümlichkeit, dass man bei hohen Summen, die für die Zufallschwankung gerade von besonderer Wichtigkeit sind, bei der Aufnahme über viele Punkte hinwegsieht, in dem Drange, den Neuzugang möglichst gross zu gestalten. Dieses Bestreben ist selbst in statistisch-technischer Hinsicht für die jetzigen Verhältnisse der meisten Gesellschaften vollkommen gerechtfertigt, denn die Lebensfähigkeit dieser hängt infolge der Anwendung von Aggregatsterbetafeln von einem möglichst grossen Neuzugang ab.

Wenn der Neuzugang tatsächlich stets grösser wird, so wird die Aggregatsterbetafel die grössere Betriebssicherheit gewährleisten, aber auch nur dann; die Selektionssterbetafel, die sich ja enger an die tatsächlichen Verhältnisse anschliesst und infolgedessen der Betriebsgerechtigkeit mehr Genüge leistet, wird, *vorausgesetzt, dass sie durch Sicherheitsfaktoren sich den veränderten jeweiligen Verhältnissen gewachsen zeigt,* unter allen Betriebsverhältnissen die Betriebssicherheit besser gewährleisten. Ihre praktische Anwendung ist aber abhängig von dem Nachweis, dass sie Risikogewinne abwerfen wird.

Erst die Eigentümlichkeit, dass sich die oben charakterisierten Änderungen nur sehr langsam vollziehen, ermöglicht es, auf statistischer Grundlage Berechnungen, die für die Zukunft gültig sein sollen, aufzubauen. Die Änderungen selbst können erst nach langen Jahren, sie können aber auch binnen kurzer Zeit sich bemerkbar machen, wenn man auch den

[1]) Die ganze Sachlage erinnert lebhaft an das Bild, das J. Stuart Mill zur Erläuterung der Wirkung des Gesetzes vom abnehmenden Bodenertrag angewandt hat. Er sagt in seinen „Grundsätzen der politischen Ökonomie“, I. Buch Kapitel 12, übersetzt von Sötbeer, 1869: „Die Beschränkung der Produktion wegen der eigentümlichen Verhältnisse des Bodens gleicht nicht den Hindernissen einer entgegenstehenden Wand, welche unbeweglich an einer bestimmten Stelle steht, und der Bewegung nicht eher ein Hemmnis bietet, als bis sie dieselbe gänzlich aufhält; wir können sie eher mit einem sehr elastischen und ausgespannten Bande vergleichen, das kaum so heftig gespannt wird, dass es nicht möglicherweise noch etwas mehr gespannt werden könnte, obschon sein Druck schon lange vorher gespürt wird, ehe die äusserste Grenze erreicht wird, und um so stärker gespürt wird, je mehr man sich dieser Grenze nähert.“

Grundsatz aufstellen kann, dass, je ferner die Zeit, in denen die Grundlagen Anwendung finden sollen, um so grösser die Sicherheitsfaktoren sein müssen. Es resultiert jedenfalls aus allen Überlegungen, dass für die Prämienberechnung sehr grosse Sicherheitsfaktoren erforderlich sind, besonders wenn sie für Verträge von langer Dauer die Basis bilden sollen, da sie ja unter allen Umständen die Mittel zur Schadendeckung darstellen.

Ob man für die internen Berechnungen diese Sicherheitsfaktoren beibehalten muss und in welcher Grösse, soll hier nicht weiter untersucht werden. Im Hinblick darauf, dass für die Berechnungen der internen Grössen, also in erster Linie für die Berechnung des Deckungskapitals, bislang noch immer dieselben Grundlagen angewandt werden wie für die Prämienberechnung, muss man aus obigen Darlegungen die Folgerung ziehen, dass *ein Versicherungsbetrieb nur auf der Basis von Rechnungsgrundlagen möglich ist, die Risikogewinne erzeugen, dass dem Bestreben nach möglichst eng sich anschliessenden Grundlagen eine untere Grenze gesetzt ist, deren Überschreitung die Schadendeckung und mithin die ganze Versicherungsveranstaltung zu einem versicherungstechnischen Experiment macht, das die grössten volkswirtschaftlichen Folgen haben kann.* Die obere Grenze für die Grösse der Sicherheitsfaktoren bildet die Wirtschaftlichkeit der Prämien.

Voraussetzung aller dieser Überlegungen ist, dass man es mit einer Gesamtheit zu tun hat, die derart gross ist, dass sie die Ableitung einer Sterbetafel aus ihrem eigenen Verlauf ermöglicht. Ist diese Möglichkeit nicht gegeben, so müssen die Sicherheitsfaktoren selbstverständlich noch erheblich grösser sein, ganz abgesehen davon, dass für derartige Gesamtheiten eine wahrscheinlichkeitstheoretische resp. eine risikotheoretische Untersuchung ganz unmöglich ist.

Es soll daher allein von den Verhältnissen der grösseren Lebensversicherungsanstalten ausgegangen werden, da diese für derartige Untersuchungen in erster Linie in Betracht kommen. Für solche Anstalten ist in Deutschland zur Ziehung der technischen Bilanz das Intervall von einem Jahr gesetzlich festgelegt. Hat der Versicherungstechniker seine Hauptaufgabe, die Beobachtung des Sterblichkeitsverlaufes der versicherten Gesamtheiten, voll erfüllt, so ist er in der Lage, eine grosse Gesamtheit vorausgesetzt, die Personensterblichkeit für die nächste Geschäftsperiode genügend scharf zu schätzen und damit auch die Differenz zwischen dem rechnungsmässigen Verlauf und dem wahrscheinlichen Verlauf in der Personensterblichkeit. Wenn man die Stetigkeit des Geschäftsbetriebes voraussetzt, so muss man annehmen, dass sich die unter Risiko stehenden Summen für die einzelnen Geschäftsjahre nur langsam ändern, sodass auch durch die Beobachtung dieser Änderungen eine Schätzung des gesamten riskierten Kapitales möglich ist und mithin auch des wahrscheinlichen Risikogewinnes.

Es wäre nun ein leichtes, auf Grund der vorhandenen Formeln die voraussichtlich mögliche Zufallschwankung zu berechnen, falls sich die riskierten Kapitale gleichmässig über alle versicherten Personen verteilten. Man hätte dann nur die Zufallschwankung der Personensterblichkeit, die durch die Formel

$$M_m = a \sqrt{\sum_{0}^{\omega} {}_r\, l_{m,r} \left(1 - \bar{q}_{m,r}\right) \bar{q}_{m,r}}\;\cdot$$

gegeben ist, worin $l_{m,r}$ die Anzahl der in der Altersklasse r stehenden Personen ist, die der Wahrscheinlichkeit $\bar{q}_{m,r}$ unterstehen, mit dem diskontierten durchweg gleichen riskierten Kapital zu multiplizieren. Zur Berechnung braucht man also nur in den einzelnen Altersklassen (und eventuell Klassen gleicher Versicherungsdauer) die Anzahl der Personen zu multiplizieren mit dem Produkt aus der Sterbenswahrscheinlichkeit in jeder Altersklasse und ihrer Überlebenswahrscheinlichkeit, und aus der Summe dieser Werte die Quadratwurzel zu ziehen.

Da jedoch jede Person mit einem anderen Betrag an dem unter Risiko stehenden Kapital beteiligt ist, so ist, falls man mit $c_{m,r}$ das durchschnittlich auf jeden Versicherten entfallende riskierte Kapital der Altersklasse r bezeichnet, die wahrscheinliche Zufallschwankung innerhalb dieser Altersklasse durch die Formel

$$M_{m,r} = a \sqrt{\beta_{m,r} \cdot c_{m,r}^2\, v^2 \cdot l_{m,r}\left(1 - \bar{q}_{m,r}\right) \cdot \bar{q}_{m,r}}$$

gegeben, worin $\beta_{m,r}$ ein von der Verteilung der riskierten Kapitale abhängiger Faktor ist, für den es jedoch stets einen Wert gibt, der obiger Gleichung den genauen Ausdruck der Zufallschwankung verleiht.

Zur Feststellung der Grösse β möge folgende Überlegung dienen:

Wenn man für eine durchlaufene Geschäftsperiode die *tatsächliche* Zufallschwankung in der Altersklasse r nachträglich sowohl für die Personensterblichkeit $N_{m,r}^P$, wie für die fällig gewordenen riskierten Kapitale $N_{m,r}^K$ festgestellt hat, so muss, wenn man berücksichtigt, dass diese Zufallschwankungen in beiden Fällen unter denselben nicht erkennbaren Einflüssen entstanden sind, das Verhältniss der tatsächlichen Zufallschwankungen $\frac{N_{m,r}^P}{N_{m,r}^K}$ und das Verhältnis der wahrscheinlichen Zufallschwankungen $\frac{M_{m,r}^P}{M_{m,r}^K}$ einen Wert ergeben, der zwar eine im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie zufällige Grösse darstellt, der also eine Wahrscheinlichkeitsgrösse ist, dessen wahrscheinlichster Wert jedoch in beiden Fällen dieselbe Grösse annehmen muss, so dass das Verhältnis der Zufallschwankungen beider Komplexe um einen festen Wert oszilliert, der für den wahrscheinlichen Fall die Gleichung

$$\frac{N^P_{m,r}}{N^K_{m,r}} = \frac{M^P_{m,r}}{M^K_{m,r}} = \frac{a\sqrt{l_{m,r}(1-\overline{q}_{m,r})\cdot\overline{q}_{m,r}\cdot v^2}}{a\sqrt{\beta_{m,r}\cdot c^2_{m,r}\, v^2\, l_{m,r}(1-\overline{q}_{m,r})\cdot\overline{q}_{m,r}}}$$

ergibt, woraus als Wert für $\beta_{m,r}$

$$\beta_{m,r} = \left(\frac{N^K_{m,r}}{N^P_{m,r}\cdot c_{m,r}}\right)^2 \quad \text{resultiert.}$$

Da es sich im Falle *einer* Beobachtung nur um einen *zufälligen* Wert handelt, so muss durch Mittelwertbildung verschiedener Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert festgestellt werden.

Setzt man einen stetigen Betrieb voraus, den doch alle in Betracht kommenden privaten Gesellschaften zeigen, und den zu erreichen das Bestreben jeder Verwaltung ist und sein muss und um so mehr sein muss, je exakter die Versicherungstechnik in ihrer praktischen Anwendung wird, je wissenschaftlicher die gesetzlichen Bestimmungen werden, je schärfer man die tatsächlichen Verhältnisse erfassen will —, so muss man annehmen, dass die Mittelwerte aus den Erfahrungen der letzten Geschäftsjahre (eventuell unter Berücksichtigung der Tendenzen) praktisch nahezu gleich den wahrscheinlichen Werten für die nächste Geschäftsperiode sind, zumal dann, wenn man die auf der Basis einer grösseren Anzahl von Beobachtungen entstandenen Werte für alle Altersklassen unter sich einer Ausgleichung analog der Ausgleichung anderer Wahrscheinlichkeitsgrössen unterwirft.

Hat man die Werte $\beta_{m,r}$ festgestellt, so kennt man die Zufallschwankung in den einzelnen Altersklassen und braucht nur eine Summierung der Quadrate dieser Werte nach der Formel

$$M = a\sqrt{\sum_0^{\omega}{}_r\, M^2_{m,r}}$$

vorzunehmen, wodurch die wahrscheinliche Zufallschwankung der nächsten Geschäftsperiode gegeben ist, falls man den Wert der Konstanten a kennt.

Selbstverständlich wird man im einzelnen diese Untersuchung nur bei solchen Altersklassen vornehmen können, die eine so grosse Anzahl Einzelrisiken aufweisen, dass das Gesetz der grossen Zahlen praktisch Anwendung finden kann. Es gelten hier dieselben Grundsätze, wie sie bei der Schätzung zukünftiger Sterblichkeitsverhältnisse resp. bei der Sterblichkeitsmessung Anwendung finden.

Für den Faktor a einen Wert zu bestimmen, ist theoretisch unmöglich, einen solchen zu wählen, ist ohne genügende Erfahrung äusserst willkürlich. Erst Erfahrungen selbst können lehren, welche Grösse man als massgebend ansehen kann.

Ehe man daher eingehende Untersuchungen in dieser Richtung nicht angestellt hat, kann auch nur eine einigermassen sichere Festlegung dieser Konstanten, deren Grössen sich auch mit den jeweiligen Verhältnissen der Gesellschaften ändern, nicht erfolgen, zumal sie auch das *geschäftliche* Risiko einschliessen sollen. Man hat jedoch im Hinblick auf die spekulativen Momente, die in der privaten Versicherung wirken, und im Hinblick auf die Approximationen, mit der man nur berechtigt ist, wahrscheinlichkeitstheoretische Gesetze auf die Technik anzuwenden, zuerst die wirtschaftlich grösstmöglichen Werte zu wählen und erst nach genügenden Erfahrungen zu niedrigeren heruntерzugehen. Die Willkürlichkeit, die infolgedessen jeglicher Zufallbewertung anhaftet, wird erlauben, obige Näherungswerte als praktisch genügend scharf zu verwerten, wenn diese auch in erster Linie dazu dienen sollen, ohne grossen Arbeitsaufwand derartige Untersuchungen anstellen zu können, damit die Zufallrisikotheorie überhaupt in der Praxis eingeführt und das Interesse der Praktiker für dieses Gebiet geweckt wird.

Die Notwendigkeit derartiger Untersuchungen ist ja bislang noch nicht an die Praktiker herangetreten, da diese eine zufällige Kumulierung von Schadensummen nicht fürchten, weil sie durch übergrosse Aufschläge und geeignete Rückversicherung diese Gefahr von vornherein ausgeschaltet haben. *Je mehr man aber dem Bestreben nachgibt, Grundlagen zu wählen, die sich den tatsächlichen Verhältnissen möglichst eng anschliessen, um so brennender wird die Frage nach derartigen Untersuchungen,* um so mehr wird es nötig sein, die Theorie soweit fortzubilden, dass sie in die Praxis Einführung finden kann. Und welche Mühe, welche Arbeit dazu gehört, ehe man eine Theorie für die Praxis verwendbar gemacht hat, davon kann sich nur der Eingeweihte ein richtiges Bild machen.

Natürlich darf man nicht die theoretischen Forderungen als praktische Grundsätze ohne weiteres postulieren, sondern wird auch hier wie *überall in der Praxis* den die besten Erfolge versprechenden *Kompromiss* zwischen den *Forderungen der reinen Theorie* einerseits und der *Wirtschaftlichkeit, Konkurrenzfähigkeit* und *der Rentabilität* andererseits wählen müssen.

Wie jede statistische Untersuchung, so ist der Ausfall derartiger Berechnungen einerseits von der

Grösse des Materials abhängig, andererseits aber auch von dem guten Griff des Statistikers und, last not least, von dem guten Glück, nicht zufällig ungünstige Gruppierungen zu wählen, ein Moment, das bei derartigen Untersuchungen eine besonders grosse Rolle spielt. Ergebnisse etwaiger in dieser Richtung hin vorgenommener Untersuchungen sind daher ebenso kritisch zu betrachten, wie die Ergebnisse jeder wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchung in der Statistik, ja um so kritischer, als Erfahrungen auf diesem Gebiete bislang überhaupt noch nicht gesammelt sind.

Um einen Einblick in die Grösse des Wertes β zu gewinnen, sind einige Untersuchungen angestellt.

Der genaue Wert für $\beta_{m,r}$ der Altersklasse r ergibt die Beziehungsgleichung

$$a\sqrt{p_r \cdot q_r \cdot \sum_1^{l_r} {}^k c_k^2 \cdot v^2} = a\sqrt{\beta_{m,r} \cdot l_r \cdot p_r \cdot q_r \cdot c_r^2 \cdot v^2}$$

mit

$$\beta_{m,r} = \frac{\sum_1^{l_r} {}^k c_k^2}{l_r \cdot c_r^2}$$

Für die Auswertung sind also Angaben über die Grössenverhältnisse der riskierten Kapitale unter sich und über ihre relative Verteilung unumgängliche Voraussetzungen. Da jedoch hierüber Untersuchungen noch nicht angestellt sind, Material in dieser Hinsicht daher nicht vorliegt, so sind Annahmen notwendig, wenn man überhaupt eine ungefähre Vorstellung von der Grösse β haben will.

Zuerst sollen einige ideale Beispiele durchgerechnet werden.

Über das Grössenverhältnis ist die der Grössendifferenzierung hinreichend entgegenkommende Annahme gemacht, dass die riskierten Kapitale in 20 Grössenklassen vorkommen, die durch die Werte c, $2\,c$, $3\,c$, $4\,c\,.\,.\,.\,.\,.$, $k \cdot c$, $.\,.\,.\,.\,.\,.\ 20\,c$ charakterisiert sind; für die Häufigkeit der einzelnen Grössen haben wir als grundlegend die relativen Verteilungswerte gewählt, die sich dem Verlauf der aus der kombinatorischen Auswertung einer Potenz des Binoms $(p+q)^z$ resultierenden Werte möglichst eng anschliessen. Die Werte selbst sind auf graphischem Wege ermittelt.

Für das erste Beispiel (I) ist eine gleichmässige Verteilung des gesamten riskierten Kapitals auf alle Grössengruppen angenommen; der zweiten Beispielserie (II) sind Werte zugrunde gelegt, die sich aus der symmetrischen Grössenanordnung $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^z$ ergaben und zwar für $z=2$ (II, 1), für $z=6$ (II, 2) und für $z=10$ (II, 3), der dritten Beispielserie (III) solche, die sich aus der asymmetrischen Grössenordnung $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^z$ ergaben und zwar ebenfalls für $z=2$ (III, 1), $z=6$ (III, 2) und $z=10$ (III, 3), sowie solche, die sich aus der asymmetrischen Grössenordnung $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^z$ für $z=6$ und $z=10$ ergaben (III, 4 und III, 5).

Bezeichnet man die sich hieraus ergebenden Werte, die bei der Auswertung in % der Gesamtanzahl der versicherten Personen angegeben sind, mit N_k und das durchschnittliche auf jeden Versicherten entfallende riskierte Kapital mit $\mu \cdot c$, so ergibt sich als Wert für β

$$\beta = \frac{\sum_1^{20} {}^k [N_k (k \cdot c)^2]}{100 \times \left[\dfrac{\sum_1^{20} [N_k \cdot k \cdot c]}{\sum_1^{20} {}^k N_k}\right]^2} = \frac{\sum_1^{l_r} {}^k \left(N_k\ (k \cdot c)^2\right)}{100 \cdot \mu^2 \cdot c^2}$$

$$= \frac{\sum_1^{l_r} {}^k N_k \cdot k^2}{100 \cdot \mu^2}$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die aus den gemachten Annahmen sich ergebende Grössenverteilung sowie die hieraus resultierenden Werte für β.

Für die gleichmässige Verteilung ergibt sich der Wert 1.302, der höher ist als alle übrigen. Die symmetrischen Anordnungen ergeben die Werte 1.185, 1.122 und 1.089, die asymmetrischen die Werte 1.268, 1.202 und 1.151 respektive 1.055 und 1.041. Man ersieht aus dieser Auswertung, dass sich β dem Wert 1, seinem Minimalwert, nähert, je mehr sich die Werte um ihren Mittelwert gruppieren, dass bei symmetrischer Anordnung die Werte kleiner sind als bei asymmetrischer, falls die Asymmetrie sich nach der Seite der kleineren Grössengruppen verschiebt, dass sie jedoch grösser sind, wenn die Asymmetrie nach der entgegengesetzten Seite hinneigt. Diese Ergebnisse waren zu erwarten, denn das ausschlaggebendste Gewicht ist ja den hohen Grössengruppen zuzumessen, nach deren Lage zum Mittelwert sich alles richtet.

Derartig ideale Verteilungen liegen nun in der Praxis nicht vor. Es werden sich die riskierten Kapitale nicht um den Mittelwert in der Regelmässigkeit häufen, wie es diese Beispiele zeigen, denn schon allein der Umstand, dass bestimmte Versicherungssummen, z. B. die Versicherungssummen 5000, 7500 und besonders

k	I	II			III				
		1	2	3	1	2	3	2a	3a
1	5.0	1.0	0.4	0.2	2.4	2.2	0.6	0.0	0.0
2	5.0	2.3	0.9	0.4	4.5	4.1	2.6	0.1	0.1
3	5.0	3.5	1.7	1.0	6.5	6.3	5.7	0.2	0.1
4	5.0	4.8	2.9	1.8	8.3	8.6	8.6	0.3	0.2
5	5.0	5.8	4.5	3.0	9.4	10.7	11.0	0.5	0.3
6	5.0	6.7	6.2	5.4	**9.5**	**12.6**	**14.0**	0.7	0.4
7	5.0	7.2	8.0	8.1	9.1	12.2	14.0	1.5	0.6
8	5.0	7.4	9.4	10.6	8.2	10.5	13.3	2.7	1.8
9	5.0	7.5	10.5	12.7	7.0	9.2	11.2	4.2	2.8
10	5.0	**7.6**	**11.0**	**13.6**	6.5	7.5	7.8	5.9	4.9
11	5.0	7.5	10.5	12.7	5.8	5.9	4.9	7.5	7.8
12	5.0	7.4	9.4	10.6	5.2	4.2	2.8	9.2	11.2
13	5.0	7.2	8.0	8.1	4.5	2.7	1.8	10.5	13.3
14	5.0	6.7	6.2	5.4	3.8	1.5	0.6	12.2	14.0
15	5.0	5.8	4.5	3.0	3.1	0.7	0.4	**12.6**	**14.0**
16	5.0	4.8	2.9	1.8	2.4	0.5	0.3	10.7	11.0
17	5.0	3.5	1.7	1.0	1.8	0.3	0.2	8.6	8.6
18	5.0	2.3	0.9	0.4	1.1	0.2	0.1	6.3	5.7
19	5.0	1.0	0.4	0.2	0.8	0.1	0.1	4.1	2.6
20	5.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.2	0.6
	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
μ	10.5	10.0	10.0	10.0	8.150	7.205	7.167	13.795	13.833
$\sum_{1}^{20} k[N_k \cdot k^2]$	14350.0	11853.2	11219.0	10890.0	8424.0	6241.1	5914.3	20080.1	19912.9
β	1.302	1.185	1.122	1.089	1.268	1.202	1.151	1.065	1.041

10,000 Mark, eine überwiegende Bevorzugung von seiten der Versicherungsnehmer erfahren, wird eine Häufung von riskierten Kapitalien fern vom Gesamtmittelwert, der in den unteren Grössenklassen liegen wird, zur Folge haben, wodurch der Wert eine ganz bedeutende Erhöhung erfährt. Als ausgleichendes Moment wird hierbei jedoch die ungleiche Grössenveränderung des riskierten Kapitals selbst zu berücksichtigen sein, denn, da die Versicherungsnehmer gleicher Versicherungssummen nach den verschiedensten Kombinationen abschliessen werden, wodurch die riskierten Kapitale schon im ersten Versicherungsjahre eine bedeutende Divergenz zeigen, die mit zunehmender Versicherungsdauer immer grösser wird und, da ausserdem bei der heutigen Bevorzugung der gemischten Versicherung die riskierten Kapitale mit zunehmender Versicherungsdauer rapide den unteren Grössengruppen zustreben, so wird die Gefahr einer lokalen Kumulierung in den oberen Grössengruppen sehr abgeschwächt. Wie gross diese ausgleichende Wirkung ist, das können nur Untersuchungen praktischer Verhältnisse aufklären. Immerhin muss diese als sehr bedeutend angesehen werden. Wenn man in Ermangelung von Material über die Verteilung der riskierten Kapitale, worüber Untersuchungen anzustellen in der Praxis bislang kein Bedürfnis vorliegt, es sei denn, dass man auf Grund der Zufallrisikotheorie die Grenze für den Selbstbehalt normieren will, seine Zuflucht nimmt zu der von einigen Gesellschaften veröffentlichten Verteilung der Versicherungssummen nach Summenklassen, und die sich hierdurch ergebende *relative* Verteilung als Basis für eine Auswertung der Grösse β wählt, in der Annahme, dass sich die riskierten Kapitale in ähnlicher Weise um ihren Mittelwert gruppieren, so wird wohl der hieraus resultierende Wert einen Maximalwert darstellen, der in Wirklichkeit nie erreicht wird, da die Ausgleichungskraft der ungleichen Veränderung der riskierten Kapitale, wie oben bemerkt, derart gross sein muss, dass die bei derartigem Material vorkommenden exzentrischen Kumulierungen sicher zu den seltensten Ausnahmen bei der Gruppierung der riskierten Kapitale gehören. Trotzdem sind, um überhaupt an praktische Verhältnisse anknüpfen zu können, auf Grund der Verteilung der Personen nach Summenklassen, welche die Karlsruher Lebensversicherung a. G. in ihren Jahresberichten mitteilt, einige Beispiele durchgerechnet und zwar derart, dass als Selbstbehaltgrenze des riskierten Kapitals M. 30,000, M. 20,000 und M. 10,000 normiert ist. Es sei jedoch nachdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Selbstbehaltsgrenzen nur eine *relative* Bedeutung haben, da, wie aus der Formel zu ersehen ist, β allein von der relativen Gruppierung um den Mittelwert selbst abhängig ist, nicht von der absoluten Grösse der Werte.

Grössen-klasse	Durch-schnitts-grösse ($k \cdot c_k$)	N_k		
		I %	II %	III %
bis 1,000	500	9.6	9.7	10.2
1,000— 2,000	1,500	29.2	29.4	30.9
2,000— 3,000	2,500	17.5	17.7	18.6
3,000— 4,000	3,500	6.7	6.8	7.2
4,000— 5,000	4,500	13.7	13.9	14.6
5,000— 6,000	5,500	3.8	3.9	4.0
6,000— 7,000	6,500	0.8	0.8	0.9
7,000— 8,000	7,500	2.3	2.4	2.5
8,000— 9,000	8,500	0.4	0.4	0.4
9,000—10,000	9,500	10.1	10.2	10.7
10,000—20,000	15,000	4.8	4.8	—
20,000—30,000	25,000	1.1	—	—
		100.0	100.0	100.0
	$(\mu \cdot c_k)$	4196.5	3965.0	3405.0
$\frac{1}{100} \cdot \sum_k N_k \cdot (K \cdot c_k)^2$		3523.025	2860.200	1866.400
	β	2.00	1.82	1.61

Die Anordnung ist dieselbe wie bei den idealen Beispielen.

β nimmt die Grössen 2.00, 1.82 und 1.62 an, Werte, die infolge der Kumulierungen ausserhalb des Gesamtmittelwertes die aus unseren idealen Beispielen resultierenden weit übersteigen. Interessant ist besonders der auffällige Einfluss der Herabsetzung des Selbstbehaltes, dessen Bedeutung für die Stetigkeit der Risikogewinne und mithin des finanziellen Ergebnisses der einzelnen Geschäftsjahre hierin recht deutlich zum Ausdruck kommt. Wie wir aber schon oben bemerkten, kann man diesen Werten nur eine relative Bedeutung beimessen, man kann sie in ihrer absoluten Grösse höchstens als Maximalwerte ansehen.

Im Gegensatz zu β, dessen Grösse man doch schliesslich durch Rechnung und Beobachtung in gewissen Grenzen feststellen kann, kann sich der Sicherheitsfaktor α nur aus einer Vergleichung des theoretisch möglichen Verlaufes mit dem tatsächlichen ergeben, zumal er ja auch das „geschäftliche“ Risiko in sich schliessen soll, dessen Bedeutung nach Altenburger ja derart gross ist, dass das mathematische, besser wahrscheinlichkeitstheoretische ihm gegenüber ganz verschwindet.

Wenn Altenburger in seinem Gutachten zum 6. Internationalen Kongress zu dem Ergebnis kommt, dass „die knapp bemessene Prämie, die skrupellose Jagd nach dem Geschäft zum Ruin führen muss“, dass „hohe Anfangsprämien und die rationelle Beteiligung der Versicherten an den Überschüssen die theoretischen Untersuchungen über das mathematische Risiko überflüssig machen“, so möchte ich hier nochmals betonen, was ich auch in der Diskussion zu diesem Thema erwähnte, dass ja im Endergebnis Altenburger das Richtige trifft, dass aber wissenschaftliche einwandfreie Untersuchungen über die Sicherheitsfaktoren, die sich ausser auf die Beobachtung auf die Theorie des Zufallrisikos stützen müssen, die Grössen dieser, speziell deren Grenzen, feststellen sollen, denn diese Sicherheitsfaktoren werden, zu gering bewertet, zu „knapp bemessenen“ Prämien führen, zu hoch bewertet, unwirtschaftliche Prämiensätze erzeugen, wenn Unwirtschaftlichkeit auch schliesslich in gewissen Grenzen durch Konkurrenzrücksichten und durch den „gesunden Geschäftssinn der Praktiker“ verhütet werden wird.

Altenburger lehnt die Theorie des Zufallrisikos ab, stellt aber Forderungen auf, deren Beurteilung er *nur* den subjektiven Gefühlen und der Geschäftspraxis überlässt. Die vorliegende Arbeit soll die Anregungen zur Ausbildung von Methoden geben, die bis zu einem gewissen Grade zu objektiven, praktisch genügenden Resultaten führen werden. Die einzige bisher bekannte Methode, die im Hinblick auf die zufällige Kumulierung von Schadensummen theoretisch einwandfreie Resultate liefert, ist die Theorie des Zufallrisikos, durch deren Anwendung man auch erst in die Lage versetzt ist, einen Einblick in das „geschäftliche“ Risiko zu erhalten, das ohne die Ausschaltung des vorhandenen mathematischen ja stets ein Rätsel bleiben muss. Untersuchungen über das mathematische Risiko sind daher keineswegs überflüssig, ja sie sind notwendig, wenn man in die Praxis schärfere Methoden einführen will, wenn man sich — was Altenburger gerade als Gegenargument anführt — „eine rationelle Beteiligung der Versicherten an den Überschüssen“ zum Ziele setzt.

Was die andern, auf dem Kongress eingereichten Gutachten anbelangt, so haben die, welche in erster Linie praktische Ergebnisse ins Auge fassen, die praktische Anwendung durch Einführung von Konstanten und rohen Näherungswerten möglich zu machen gesucht, bei deren Wahl man sich sehr von subjektiven Anschauungen leiten liess, deren Ersetzung durch objektive Untersuchungen und Beobachtungen, soweit es überhaupt möglich ist, eine der Hauptaufgaben dieser Arbeit sein soll, wenn auch bisher erst eine Anregung in dieser Richtung hin gegeben werden konnte.

Praktisch wird man wohl am besten von festen Rechnungsgrundlagen und von einem bekannten Risikogewinn ausgehen, wodurch eine Festlegung des grösstmöglichsten Wertes von β möglich ist. Hierdurch wird man umgekehrt die Verteilung und die Selbstbehaltsgrenze festlegen können und dann nur zu *beob-*

achten haben, *ob die tatsächliche Verteilung nicht anomal abweicht.*

Die Voraussehung einer derartigen für praktische Verhältnisse vollkommen genügenden Anwendung hängt aber lediglich von der Bestimmung des Faktors β und schliesslich von der durch Beobachtung ermittelten Grösse α ab.

Ich möchte hier noch einmal betonen, dass derartige auf der Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie angestellten Untersuchungen nur solche ausserrechnungsmässigen Schäden berücksichtigen, die *rein zufällige* sind, deren Eintritt also nicht von Ursachen herrührt, die nachweisbar sind. Es sind daher die ausserrechnungsmässigen Schäden, die infolge von Epidemien, allgemein wirtschaftlichen Krisen, Hungersnöten, Kriegen etc. etc. entstehen, a priori nicht eingeschlossen, wenn man auch berechtigt ist, einen Einschluss derartiger Veränderungen des Ursachenkomplexes als *möglich* soweit zu betrachten, als diese Veränderungen von den normalen Verhältnissen nur *wenig* abweichen. Nun ist ja die Gefahr, dass durch plötzliche anomale Zustände ausserrechnungsmässige Schäden eintreten, insofern abgeschwächt, als derartige Zustände nicht mehr in dem Umfange und der Intensität eintreten können, wie in früheren Zeiten. Günstig wirkt ausserdem der Umstand, dass derartige Ausnahmezustände heutzutage fast stets auf kleine Gebietsteile beschränkt bleiben, die Lebensversicherungsanstalten dagegen ihr Geschäftsgebiet ständig ausdehnen. Die einzige Ausnahme bildet die Kriegsgefahr, gegen die denn auch von allen Gesellschaften besondere Massnahmen getroffen und besondere Fonds zurückgestellt werden. Durch möglichst grosse freie Reserven glaubt man gegen diese Gefahren geschützt zu sein, obwohl über die Grösse derartiger Fonds und über die Zulänglichkeit kaum etwas Positives zu sagen ist, da einerseits Erfahrungen spärlich vorliegen, andererseits man sich gerade auf diesem Gebiete auf Erfahrungen nicht allzusehr verlassen kann. Als geeignetster Massstab ist für alle derartigen Fonds sicherlich ein gewisser Prozentsatz der Gesamtrisikoprämie anzusehen. Dass jedoch hierbei die Gefahr vorliegt, dass leicht des Guten zuviel getan wird, das wird wohl jeder zugeben. Man sollte daher die Frage aufwerfen: Gibt es keine anderen Massnahmen, dieser Gefahr ihre Schrecken zu nehmen? Ich möchte vorschlagen, die Massenansammlung von freien Reserven durch Einführung von solchen Versicherungskombinationen einzuschränken, bei denen ein nicht zufälliger ungünstiger Schadenverlauf im entgegengesetzten Sinne wirkt, wie bei den Kombinationen, auf welche die Gesellschaft bislang das Hauptgewicht gelegt hat, dass also solche Versicherungsanstalten, die in erster Linie Todesfallversicherungen abschliessen, Versicherungen auf den Lebensfall einführen sollen, dass, allgemein gesagt, eine Versicherungsgesellschaft bestrebt sein soll, nicht allein auf *einer* Wahrscheinlichkeitsgrösse, sondern auch auf der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit ihre Versicherungsgeschäfte abzuschliessen. Dass in dem Falle, wo in jeder Altersklasse auf der Sterbenswahrscheinlichkeit wie auf der Lebenswahrscheinlichkeit dieselben Summen unter Risiko stehen, die Gesellschaft besser gegen ausserrechnungsmässige nicht zufällige Schäden gefeit ist, als durch freie Reserven, das wird wohl keiner bestreiten. Eine Einführung von Versicherungen, die auf der entgegensetzten Wahrscheinlichkeit basiert sind, eine Einführung also von Lebensfallversicherungen für Versicherungsgesellschaften, die in der Hauptsache bislang Todesfallversicherungen geführt haben und zwar für dieselben Altersklassen, bietet ja enorme Schwierigkeiten. Es ist dies leichter gesagt als durchgeführt; man wird mir u. a. entgegenhalten, dass man ja Lebensfallversicherungstarife eingeführt hat, die aber einerseits beim Kandidaten wenig Anklang fanden, andererseits einen Gewinn nicht abwarfen, ja schliesslich nur Verluste brachten, dass also eine Forcierung dieser Versicherungsarten nicht im Interesse der Gesellschaften liege. Um sie als gewinnbringende Kombinationen verwerten zu können, muss man natürlich aus den gemachten Erfahrungen die richtigen Konsequenzen ziehen. Schwieriger ist es, Versicherungskombinationen zu bringen, die den Versicherungslustigen begehrenswert erscheinen. Ich möchte in dieser Hinsicht auf eine Kombination hinweisen, die Gesellschaften auf ein Gebiet verweisen, das bei den heutigen sozialen Bestrebungen weite Aussichten bietet, es ist die Durchführung des von Mully von Oppenried eingeführten Systems der Alters- und Invaliditätssparkasse [1]).

Ob jedoch derartige Bestrebungen schliesslich einen praktischen Erfolg haben, das wird stets nur ein Versuch zeigen können. Jedenfalls soll hier vom theoretischen Standpunkte aus betont werden, dass die Einführung derartiger Kombinationen die Stabilität der Gesellschaften erhöht und sie der Sorge um die Ansammlung grosser freier Reserven enthebt, jedoch dann nur enthebt, wenn derartige Versicherungen mit eben solchen gewinnversprechenden Sicherheitsfaktoren durchgeführt werden, wie die bewährten Todesfallversicherungen.

---

[1]) Robert Mully von Oppenried, Alters- und Invaliditätssparkasse als Übergang zur allgemeinen Volksversorgung, Wien 1901, abgedruckt in „Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungs-Techniker“.

* * *

Gemischte Versicherung.

(M. 1000.)

Rechnungsgrundlagen: M u. W I $3^1/_2$ % (Riem). $M = \alpha \sqrt{p \cdot q \cdot c^2 \cdot v^2}$; $\alpha = 1$. Tatsächlicher Verlauf: Tafel *LM.*