Die relative Bevölkerungszunahme.

Von Dr. **Julius Wyler**. Bern.

Ist durch die Volkszählungen die Bevölkerungsgrösse eines Landes zu aufeinanderfolgenden Zeiten bekannt, so wird gewöhnlich nach der auf eine Einheit sich beziehenden *relativen Bevölkerungsvermehrung* gefragt, weil mittelst dieser Ziffer eine Vergleichung zwischen einzelnen Perioden und Ländern ermöglicht wird. Zur Berechnung dieser Zahl wird allgemein von der Annahme ausgegangen, dass die Bevölkerung einer geometrischen Progression entsprechend fortschreitet und deshalb die Zinseszinsformel benützt, die folgende Beziehung zwischen der Bevölkerung P_t im Zeitpunkt t (Anfangsbevölkerung) und P_{t+n} im Zeitpunkt $t+n$ (Endbevölkerung) aufstellt:

$$P_{t+n} = P_t (1 + r')^n \tag{1}$$

Wobei r', die gesuchte relative Bevölkerungsvermehrung, durch die Formel

$$r' = \sqrt[n]{\frac{P_{t+n}}{P_t}} - 1 \tag{2}$$

gegeben ist.

Wir sehen: Zu einem gegebenen n und r' gibt es einen bestimmten Quotienten $\frac{P_{t+n}}{P_t}$; wird also dieser Bruch für verschiedene r' und n berechnet und tabellarisch aufnotiert, so kann, nach Division der Endbevölkerung durch die Anfangsbevölkerung, die dazu gesuchte relative Bevölkerungszunahme einfach abgelesen werden. Solche, die Auswertung von r' vereinfachende Tafeln wurden für die schweizerische Bevölkerung mehrmals hergestellt [1]).

Es liegt nun dem Mathematiker der Gedanke nahe, die Anwendung der Zinseszinsformel noch zu vertiefen und auch für die Bevölkerungsvermehrung die sogenannte Augenblicksverzinsung oder *Verzinsungsintensität* zu gebrauchen. Dies wird von *L. v. Bortkiewicz,* dem bedeutenden mathematischen Statistiker der Berliner Universität, durchgeführt, über dessen Arbeit wir mit Änderung einiger Zeichen berichten [1]).

Bortkiewicz geht von der durch Formel (2) dargestellten relativen Vermehrung r' aus, die er *summarische Vermehrungsrate* nennt, im Gegensatz zu den *besonderen Vermehrungsraten* $r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots r_n$ für die Jahre $t+1, t+2, \ldots\ldots t+n$. Werden $1 + r_1 = q_1$, $1 + r_2 = q_2$, $\ldots\ldots 1 + r_n = q_n$, $1 + r' = q'$ gesetzt und die Grössen $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ als „besondere Vermehrungsfaktoren", q' als „summarischer Vermehrungsfaktor" bezeichnet, so erhalten wir folgende Beziehung zwischen den besonderen Vermehrungsfaktoren und dem summarischen Vermehrungsfaktor

$$q' = \sqrt[n]{q_1 \, q_2 \cdot \ldots\ldots q_n} \tag{3}$$

Wir sahen, dass die summarische Vermehrungsrate sich auf einen Zeitraum, die besondere Vermehrungsrate sich auf die Zeiteinheit, auf ein Jahr, bezieht. Die *Vermehrungsintensität* hingegen sieht von der Zeiteinteilung vollkommen ab, da sie auf unendlich kleine Zeiträume eingestellt ist. Wir kommen zu ihr durch folgende Überlegung: Manche statistische Laien berechnen die summarische Vermehrungsrate in der groben Weise, dass sie die mehrjährige Zunahme in ein Verhältnis zur Anfangsbevölkerung setzen. So hat nach dieser „unbedachten Methode" eine Bevölkerung, die von 5 000 000 auf 6 000 000 in 10 Jahren gestiegen ist, um 20 ‰ zugenommen. Die Berechnung der Vermehrungsrate für ein Jahr enthält nun im Prinzip den gleichen Fehler, denn auch hier wird eine Anfangsbevölkerung bei der Berechnung der Verhältniszahl in Betracht gezogen. Wird nun das Jahr in m gleiche Teile zerlegt, so können wir für jedes Teiljahr eine der Jahres-

[1]) Von Dr. *Durrer* für den Zeitraum 1850—1888. Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrgang 1895, Seite 16 ff. Ferner von *H. Steiner-Stooss* für 1850—1910. Ebenda, Jahrgang 1912, I., Seite 500 ff.

[1]) *Bortkiewicz.* Wie ist das Tempo der Bevölkerungsvermehrung zahlenmässig zu erfassen? Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Jahrgang 1916, Heft 6, Seite 692 ff.

rate r entsprechende Teilrate x_m finden, die nach dem Gesagten nicht gleich ist $\frac{r}{m}$, sondern die durch die leicht aufzustellende Gleichung

$$(4) \qquad \left(1 + x_m\right)^m = 1 + r$$

bestimmt ist. Beträgt $r = 0{,}014$, so ist $\frac{r}{2} = 0{,}007$, $\frac{r}{4} = 0{,}0035$, aber $x_2 = 0{,}006976$, $x_1 = 0{,}003482$.

x_m ist kleiner als $\frac{r}{m}$, was auch aus obigem Zahlenbeispiel folgt, weshalb wir die folgende Formel aufstellen können.

$$(5) \qquad m x_m < r = r^{(m)}$$

Die Grösse $r^{(m)}$ wird die nominelle Vermehrungsrate genannt, im Gegensatz zu effektiven Vermehrungsrate r. Es ist bei $r = 0{,}014$, $r^{(2)} = 0{,}013952$, $r^{(4)} = 0{,}013928$, $r^{(6)} = 0{,}013920$, $r^{(12)} = 0{,}013908$.

Denken wir das Jahr in unendlich viele Zeitteilchen von unendlicher Kleinheit zerlegt, also m zur unendlichen Grösse wachsend, so wird $r^{(m)}$ immer kleiner, strebt aber einem Grenzwert zu, und diese Grenze ist die **Vermehrungsintensität**, die mit ϱ bezeichnet wird.

Auf mathematischem Wege wird ϱ aus der Formel (4) folgendermassen erhalten.

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \left\{ \left(1 + \frac{\varrho}{m}\right)^m \right\} = 1 + r$$

$$(7) \qquad e^\varrho = 1 + r$$

wobei $e = 2{,}7182818$

$$(8) \qquad \varrho = \frac{\log(1+r)}{\log e} = \frac{\log(1+r)}{0{,}4342945}$$

Mit Hülfe der Formeln (1) und (8) wird ϱ', die summarische Vermehrungsintensität gefunden.

$$(9) \qquad \varrho' = 2{,}302585 \; \frac{\log P_{t+n} - \log P_t}{n}$$

Da r' meistens bekannt ist, können wir das zugehörige ϱ' mittelst der Formel (8) auf leichte Weise erhalten.

Die der Formel (3) analoge Bezeichnung wird folgendermassen hergeleitet: Da die Bevölkerung P_τ eine stetige Funktion der Zeit τ ist, wird die infinitesimale Bevölkerungsvermehrung im Zeitraum τ bis $\tau + d\tau$ durch die Gleichung

$$(10) \qquad d\,P\tau = P\tau\,\varrho_\tau\,d\tau$$

dargestellt. Woraus wir erhalten

$$(11) \qquad \varrho' = \frac{\int_t^{t+n} \varrho_\tau\,d\tau}{\int_t^{t+n} d\tau}$$

Sowohl die summarische Vermehrungsrate als auch die summarische Vermehrungsintensität erscheint, wie die Formel (11) direkt und die Formel (3) durch Logarithmieren zeigt, als arithmetisches Mittel der besonderen Vermehrungsraten und Vermehrungsintensitäten. Nun gilt in der Statistik allgemein die Regel, dass der gewogene arithmetische Durchschnitt dem einfachen vorzuziehen sei, und deshalb wird diese „reguläre Methode“ von dem Verfasser für die Berechnung dieser beiden Mittelwerte benützt. Dabei erhalten wir Ziffern, die, wie die äusserst eingehenden mathematischen Untersuchungen und die vorgebrachten Tabellen dartun, von den mittelst des groben arithmetischen Durchschnitts gewonnenen Zahlen wenig abweichen. Die Formeln für die mittlere Vermehrungsrate und mittlere Vermehrungsintensität lauten

$$(12) \qquad r'' = \frac{P_{t+n} - P_t}{P_t + P_{t+1} + \ldots\ldots P_{t+n}}$$

$$(13) \qquad \varrho'' = \frac{P_{t+n} - P_t}{\int_t^{t+n} P_\tau\,d\tau}$$

Die mittlere Vermehrungsintensität kann direkt mit Hülfe der entsprechenden mittleren Ziffern für die Geburten (ν), Sterbefälle (μ), und Wanderungsgewinnen (ε) berechnet werden, also gemäss der Formel

$$(14) \qquad \varrho'' = \nu - \mu + \varepsilon$$

Das kaiserlich statistische Amt, dessen Stellung zu dieser Frage Bortkiewicz in einem zweiten Abschnitt erörtert, hat ϱ'' sowohl nach Formel (14) berechnet, als auch die Formel (13) angewandt, wobei $\int_t^{t+\tau} P_\tau\,d\tau$ dieser Formel durch die Gleichung

$$(15) \qquad \int_t^{t+\tau} P_\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\left(P_{\tau-1} + P_\tau\right)$$

bestimmt wurde. Früher wurde ϱ'' bevorzugt, aber in den neuern Publikationen dieser Wert nur für kurze Zeiträume berechnet, während die summarische Vermehrungsintensität an erster Stelle trat und die summarische Vermehrungsrate als statistische Masszahl überhaupt verworfen wurde. Bei dieser Neuerung sind manche die Kritik Bortkiewicz veranlassende Fehler unterlaufen.

Das kaiserlich statistische Amt gibt eine Übersicht über die relative Bevölkerungsvermehrung einiger Städte und Staaten, die wir hier abdrucken und der wir eine solche über die schweizerische Bevölkerungsvermehrung beifügen.

Staat bzw. Stadt	Zeitraum	ϱ' ‰	ϱ'' ‰
Berlin	1. 12. 1871— 1. 12. 1875	39.3	39.2
Hamburg	1. 12. 1880— 1. 12. 1885	26.7	26.6
„	1. 12. 1885— 1. 12. 1890	36.5	36.4
Österreich (mit Militär)	31. 12. 1900—31. 12. 1910	8.9	8.8
Finnland	31. 12. 1900—31. 12. 1910	13.8	13.8
Schweiz	1. 12. 1900— 1. 12. 1910	12.4	12.4
Belgien	31. 12. 1900—31. 12. 1910	10.4	10.3
Niederlande	31. 12. 1899—31. 12. 1909	13.8	13.8
Schweden	31. 12. 1900—31. 12. 1910	7.2	7.2
Australischer Staatenbund	31. 3. 1901— 3. 4. 1911	16.6	16.6

Schweiz 1850—1910.

Zeitraum	r'	ϱ'	ϱ''
	in ‰		
18/23. 3. 1850 — 10. 12. 1860	4.50	4.49	4.49
10. 12. 1860 — 1. 12. 1870	5.63	5.61	5.59
1. 12. 1870 — 1. 12. 1880	6.47	6.45	6.44
1. 12. 1880 — 1. 12. 1888	3.74	3.74	3.74
1. 12. 1888 — 1. 12. 1900	10.70	10.65	10.62
1. 12. 1900 — 1. 12. 1910	12.46	12.40	12.38
18/23. 3. 1850 — 1. 12. 1910	7.45	7.42	7.36

Bei der Berechnung dieser Werte wurde natürlich die ungleiche Länge der Volkszählungsperioden berücksichtigt; ϱ'' wurde mittelst der mittleren Bevölkerung (*Wohn*bevölkerung auf Jahresmitte) für jedes Jahr gewonnen, die den arithmetischen Anteil an der Zunahme während einer Zählperiode darstellt. Der Nenner zu Formel (3) wurde durch Addition dieser mittleren Bevölkerung gefunden, jedoch für 1850—1910 die vereinfachende, das gleiche Ergebnis erzielende Formel

$$(16) \qquad \varrho'' = \frac{1}{n}\left(P_{t+n} - P_t\right) : \frac{P_t + P_{t+n}}{2}$$

benützt. Hätten wir die 6 Summen der mittleren Bevölkerung der 6 Perioden einfach addiert, um damit den Bevölkerungszuwachs 1850—1910 zu dividieren, so würden wir die Ziffer 7.72 ‰ erhalten haben; natürlich, denn wir haben auf diese Weise die Gewichte besser berücksichtigt, und da die Zunahme der Bevölkerung, besonders in den letzten Jahren, selbst wieder zunehmend ist, muss der dieser Tatsache Rechnung tragende Mittelwert grösser sein, als derjenige, der von der — bestimmt falschen — Voraussetzung einer arithmetisch-progressiven Vermehrung ausgeht. Es folgt auch daraus, dass unsere Berechnung von ϱ'' nicht einwandfrei ist, jedoch glauben wir, auf die genauere Ausrechnung verzichten zu können.

Wenn Bortkiewicz im letzten Teil seiner Studie, in den „Betrachtungen über den Wert und Unwert der Mathematik für die Statistik“ zum Schlusse kommt, dass ein Mathematiker nur dann der Statistik nützen könne, wenn er sozialwissenschaftlich gebildet sei, so müssen wir ihm beistimmen. Nun gehört zum wissenschaftlichen Rüstzeug eines Volkswirtschaftlers die Einsicht in die „Kosten“ und den „Ertrag“ einer zweckbewussten Tätigkeit, und es lässt sich von diesem Standpunkt die Frage aufwerfen, ob der Aufwand an Zeit und Scharfsinn, der zur Lösung der besprochenen Probleme notwendig ist, wirklich deren Bedeutung entspricht. Gewiss möchten wir die *grundsätzliche* Zweckmässigkeit solcher mathematischen Untersuchungen nicht verkennen, aber die daraus folgende Anforderung an die *Präzision* scheint uns für den weitaus grössten Teil der Arbeiten, die in der Praxis des amtlichen Bevölkerungsstatistikers zu leisten sind, zu weit zu gehen.