

Die Grundzahlen, Rentenbarwerte und Jahresprämien einer kombinierten Alters- und Invaliditätsversorgung.

Von Dr. J. Eggenberger in Bern.

Während in den meisten Kulturstaaen für jene Geschäftsbetriebe, welche vorzugsweise den Berufsunfallgefahren ausgesetzt sind, die Vorsorge bei eintretenden Unglücksfällen durch die gesetzliche Haftpflicht oder die staatliche obligatorische Unfallversicherung ihre Lösung gefunden, hat sich in andern Berufszweigen, in welchen sich die Unfallgefahr auf ein Minimum beschränkt und in welchen deshalb eine gesetzliche Haftpflicht keinen Sinn hätte, in aller Stille eine andere Art Haftpflicht ins sociale Pflichtenheft des Arbeitgebers eingetragen: die Versorgung ihrer langjährigen Beamten und Angestellten, die infolge von Krankheit oder Alter invalid geworden sind.

So sind in privaten Unternehmerkreisen — die Bestrebungen des Staates und seiner Beamten und Lehrer nach Pensionskassen reichen weiter zurück — Invaliditätskassen eingerichtet worden für die Beamten und Angestellten von Eisenbahnen und andern Transportanstalten, für das Beamtenpersonal einzelner grösserer Bank- und Handelsgeschäfte und insbesondere auch für das Beamten- und Dienstpersonal von genossenschaftlichen Betriebsorganisationen.

Wohl die Mehrzahl dieser Invalidenkassen ruht auf der Basis einer lebenslänglichen Invalidisierungsperiode, d. h. die Pension wird erst beim Eintritt der Invalidität ausgerichtet, so dass die Aktivität unter Umständen das 80. Lebensjahr überdauern kann ¹⁾.

Diese Grundlage mag für einzelne Berufsklassen — insbesondere für Bureaubeamte — anwendbar sein, bei andern Dienstzweigen aber, bei denen der Erfolg der Thätigkeit an eine gewisse Elasticität des Geistes und des Körpers gebunden ist, erfordert es schon das Dienstinteresse, dass eine bestimmte Aktivitätsgrenze gezogen wird und dass der Beamte beim Erreichen eines bestimmten Alters zwangsweise in den Genuss des Ruhegehalts tritt ²⁾.

Im nachfolgenden sollen die analytischen Formeln zur Berechnung der Rentenbarwerte und Jahresprämien

für eine kombinierte Alters- und Invalidenversicherung entwickelt werden. Die beigelegten Tabellen geben die Grundzahlen, Rentenbarwerte und Nettoprämien für die temporäre Invaliditätsversicherung bis zum Alter von 60, 65 oder 70 Jahren und dem sodann eintretenden Ruhegehalt.

Nun bietet aber die Wahl der technischen Grundlagen etwelche Schwierigkeiten. Denn während der Lebensversicherungstechnik eine ganze Reihe guter und für die verschiedensten Verhältnisse anwendbarer Mortalitätstafeln zur Verfügung stehen, ist die Auswahl an Invaliditätsordnungen eine relativ kleine. Es fehlt eben auf diesem Gebiete noch ein umfangreiches Beobachtungsmaterial. Für einen Durchschnitt der sog. arbeitenden Bevölkerung sowohl, wie auch für einzelne Berufszweige dürfte die deutsche Invalidenversicherung mit der Zeit ein wertvolles Erfahrungsmaterial schaffen. Bis jetzt aber boten das bedeutendste Beobachtungsmaterial die seit 1868 aufgezeichneten Erfahrungen des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen, die schon mehrmals und nach verschiedenen Gesichtspunkten bearbeitet worden sind ¹⁾.

Für den praktischen Zweck der nachfolgenden Berechnungen schienen uns die Dienstuntauglichkeitswahrscheinlichkeiten, welche Dr. Zimmermann aus den Erfahrungen des Bureaupersonals der deutschen Eisenbahnbeamten (1882—1884) abgeleitet hat, die zutreffendsten zu sein, obschon eine Prüfung ihrer Zulänglichkeit deswegen nicht möglich war, weil aus dem Anwendungsgebiet keine Beobachtungen vorlagen ²⁾.

Dieser Wahl der Grundlage entsprechend wurde im weitem als Aktivitätsordnung diejenige von Dr. Schärtlin acceptiert, welche ihrerseits mit Hülfe der Zimmermannschen Invaliditätswahrscheinlichkeiten und der schweiz. Volkssterbetafel 1876/1877—1880/1881, Männer (Schärtlin), konstruiert ist; ebenso fand als Sterbetafel der Invaliden diejenige von Dr. Zimmermann Verwendung.

Allen Rechnungen wurde der Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ zu Grunde gelegt, was bei der gegenwärtig wieder steig-

¹⁾ Auf dieser Grundlage war s. Z. auch der Bundesgesetzentwurf betreffend die Altersversorgung der eidg. Beamten und Angestellten aufgebaut; vergl. das bezügliche Gutachten von Dr. Schärtlin in Heft 3, XXV. Jahrgang (1889), dieser Zeitschrift. Dagegen gewährt die staatliche Invaliditäts- und Altersversicherung in Deutschland (für unselbständig erwerbende Arbeiter obligatorisch) vom Alter 70 an die Altersrente.

²⁾ Wie dies beispielsweise für die Lehrer an der deutschen Reichs-Universität Strassburg i. E. und den österreichischen Universitäten im Alter 65 resp. 70 normiert ist.

¹⁾ So von C. Kihm in Heft 2, Jahrgang XXXII (1896), dieser Zeitschrift für das gesamte Beamtenpersonal mit Einschluss der Beamten und Angestellten des Aussendienstes.

²⁾ Die Berechnungen sind im Auftrage mehrerer genossenschaftlicher Betriebsorganisationen zwecks Konstituierung derartiger Hilfskassen ausgeführt worden.

genden Tendenz des Zinsfusses als gerechtfertigt erscheint.

Auf den genannten Grundlagen soll nun eine Kasse errichtet werden, welche ihren Mitgliedern beim Eintritt von Dienstunfähigkeit vor dem Erreichen des Alters $x + n$ eine lebenslängliche Invalidenpension, und sämtlichen Aktiven des Alters $x + n$ einen Altersruhegehalt gewährt. Von einer Steigerung der Pension nach Dienstjahren sehen wir hier ab, und es fällt daher die Höhe der Pension für unsere Entwicklungen ausser Betracht. Pensionen und Prämien sollen jährlich und pränumerando zahlbar sein.

Der analytischen Entwicklung der Formeln lassen wir noch ein Verzeichnis der von uns benützten Grundzeichen, welche wir möglichst der neuen internationalen Bezeichnungsweise anzupassen suchten, vorausgehen.

Es soll bezeichnen:

l_x = die Zahl der Lebenden des Alters x nach der schweiz. Volkssterbetafel, Männer;

D_x = die diskontierten Zahlen derselben;

N_x = die Summe der letzteren;

a_x = Barwert der hierzu gehörenden vorschüssigen Rente, $a_x = 1 + a_x$;

l_x^a = die Zahl der Aktiven des Alters x ;

D_x^a = die diskontierten Zahlen derselben;

N_x^a = die Summe der letzteren;

a_x^a = Barwert der vorschüssigen lebenslänglichen Aktivenrente;

$a_x^a \overline{n-1}$ = Barwert der vorschüssigen temporären n Mal, und zwar im Alter $n + x - 1$ letztmals fälligen Aktivenrente;

l_x^i = die Zahl der lebenden Invaliden des Alters x in der Sterbetafel der Invaliden;

D_x^i = die diskontierten Zahlen derselben;

N_x^i = die Summe der letzteren;

a_x^i = Barwert der vorschüssigen Invalidenrente nach der Sterbetafel der Invaliden;

$a_x^i \overline{n-1}$ = Barwert der vorschüssigen temporären n Mal, und zwar im Alter $x + n - 1$ letztmals fälligen Invalidenrente;

J_x = die Zahl der zu Anfang des Alters lebenden und pensionsberechtigten Invaliden;

J'_x = die diskontierte Zahl derselben;

$\Sigma J'_x$ = die Summe der letzteren;

${}_e | a_{ax}^i \overline{n-1}$ = Barwert der vom Eintritt der Invalidität ($x + e$) an laufenden und im Alter $x + n - 1$ letztmals fälligen Rente, bezogen auf die Aktiven des Alters x .

${}_n | a_{ax}^i$ = Barwert der aufgeschobenen, mit dem Alter $x + n$ beginnenden Invalidenaltersrente, bezogen auf die Aktiven des Alters x .

${}_n | a_{ax}^a$ = Barwert der aufgeschobenen, mit dem Alter $x + n$ beginnenden Aktivenaltersrente, bezogen auf die Aktiven des Alters x .

$\mathfrak{A}_{ax}$ = Barwert der kombinierten Invaliden- und Altersrenten (der gesamten Versicherungsleistung), bezogen auf die Aktiven des Alters x .

${}_n P_x$ = die bis zum Eintritt der Invalidität, längstens aber bis zum Alter $x + n$ zahlbare Jahresprämie.

${}_t V_x$ = die Reserve nach einer Versicherungsdauer von t Jahren.

Sämtliche Barwerte beziehen sich auf die Jahresrente 1.

a) Der Barwert der Kassenleistungen

$[\mathfrak{A}_{ax}]$.

Da die Invalidisierungsperiode durch die Grenze der Altersrente eine temporäre wird, lässt sich die gesamte Kassenleistung in 3 Komponenten zerlegen:

1. Die temporäre, bis zum Alter $x + n$ laufende Invalidenrente.
2. Die Invalidenaltersrente der im Alter $x + n$ noch lebenden Invaliden.
3. Die Aktivenaltersrente der im Alter x noch lebenden Aktiven.

1. Der Barwert der temporären Invalidenrente, bezogen auf die Aktiven $[\epsilon | a_{ax}^i \overline{n-1}]$.

Die für die Darstellung des analytischen Ausdrucks in Betracht fallenden Ordnungen l_x , l_x^a , l_x^i und J_x und deren diskontierte Zahlen sind in den Tabellen I—IV gegeben.

Wie schon erwähnt, bedeutet die Ordnung l_x die schweizerische Mortalitätstafel, Männer; die Ordnung l_x^i die Sterbetafel der Invaliden nach Zimmermann.

Die Ordnung l_x^a ist eine Funktion der allgemeinen Sterbenswahrscheinlichkeit (q_x) und der Invaliditätswahrscheinlichkeit der Aktiven (w_x^i); sie ergibt sich aus der Gleichung:

$$l_{x+1}^a = l_x^a - l_x^a (q_x + w_x^i).$$

Zwischen den Ordnungen l_x , l_x^a und J_x besteht die Relation:

$$l_x = l_x^a + J_x,$$

und für das Ausgangsalter der Ordnungen ($x = 20$), für welches $J_x = 0$ ist, folgt:

$$l_x = l_x^a.$$

Die Invalidenordnung J_x stellt sich dar als Funktion der Invaliditätswahrscheinlichkeit der Aktiven (w_x^i) und der Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden (q_x^i); sie konstruiert sich analytisch aus der Formel:

$$J_{x+1} = l_x^a w_x^i \left(1 - \frac{q_x^i}{2}\right) + J_x (1 - q_x^i),$$

oder deduktiv aus:

$$J_x = l_x - l_x^a.$$

Die Ordnung der J_x , wie sie Tabelle IV giebt, kann jedoch tale quale nur zur Berechnung des Barwertes der Invalidenrente des Eintrittsalters 20 verwendet werden. Für jeden einzelnen der l_{20}^a Aktiven des Alters 20 wird der Barwert der Invalidenrente ($v = \frac{1}{1.035}$)

$$\varepsilon | a_{a_{20} \overline{n-1}} = \frac{1}{l_{20}^a} \left(J_{21} v + J_{22} v^2 + \dots + J_{x+n-2} v^{n-2} + J_{x+n-1} v^{n-1} \right) = \frac{1}{D_{20}^a} [\Sigma J'_{21} - \Sigma J'_{x+n}].$$

Für alle andern Eintrittsalter x ($20 < x < x+n$ genommen) ändert die Belastung, für jedes besteht eine andere Ordnung J_x . Das zeigt folgende Überlegung. Irgend ein Eintrittsalter $20 + \eta$ darf mit der Bezahlung von Renten an solche Invalide, die aus jüngeren Eintrittsaltern hervorgegangen sind, nicht belastet werden. Aus dem Eintrittsalter $20 + \eta$ gehen die ersten Invaliden ein Jahr später, also im Alter $20 + \eta + 1$ hervor. Von den aus früheren Eintrittsaltern hervorgegangen $J_{20} + \eta$ Invaliden sterben im Laufe des Jahres $20 + \eta + 1$ eine Anzahl, so dass noch $J_{20} + \eta \frac{l_{20}^i + \eta + 1}{l_{20}^i + \eta}$ bleiben. Es fallen somit am Ende des 1. Versicherungsjahres zu Lasten des Eintrittsalters $20 + \eta$

$$J_{20 + \eta + 1} - J_{20 + \eta} \frac{l_{20}^i + \eta + 1}{l_{20}^i + \eta}$$

Invalide resp. Renten, und zu Ende des 2., 3., $20 + n - 2$, und $20 + n - 1$. Versicherungsjahres, respektive folgende Renten:

$$J_{20 + \eta + 2} - J_{20 + \eta} \frac{l_{20}^i + \eta + 2}{l_{20}^i + \eta}$$

$$J_{20 + \eta + 3} - J_{20 + \eta} \frac{l_{20}^i + \eta + 3}{l_{20}^i + \eta}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$J_{20 + n - 2} - J_{20 + \eta} \frac{l_{20}^i + n - 2}{l_{20}^i + \eta}$$

$$J_{20 + n - 1} - J_{20 + \eta} \frac{l_{20}^i + n - 1}{l_{20}^i + \eta}$$

Analog wird die Ordnung J_x dargestellt für jedes andere Eintrittsalter x ($20 < x < x+n$), so dass wir allgemein für das Eintrittsalter x folgende Ordnung feststellen können:

$$J_{x+1} - J_x \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i}$$

$$J_{x+2} - J_x \frac{l_{x+2}^i}{l_x^i}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$J_{x+n-2} - J_x \frac{l_{x+n-2}^i}{l_x^i}$$

$$J_{x+n-1} - J_x \frac{l_{x+n-1}^i}{l_x^i}$$

Man ersieht hieraus, dass wir für den Specialfall $x = 20$ unsere in Tabelle IV gegebene Invalidenordnung erhalten, da für diesen Fall $J_x = 0$ ist.

Für l_x^a Aktive des Eintrittsalters x ergibt sich somit folgender Barwert der sie wahrscheinlich belastenden Renten:

$$\varphi(ai)_x = \left(J_{x+1} - J_x \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i} \right) v + \left(J_{x+2} - J_x \frac{l_{x+2}^i}{l_x^i} \right) v^2 + \dots + \left(J_{x+n-2} - J_x \frac{l_{x+n-2}^i}{l_x^i} \right) v^{n-2} + \left(J_{x+n-1} - J_x \frac{l_{x+n-1}^i}{l_x^i} \right) v^{n-1}.$$

Erweitert man mit v^x , so wird der Barwert der Rente für jeden einzelnen Aktiven

$$\varepsilon | a_{ax \overline{n-1}}^i = \frac{1}{D_x^a} \left\{ \left(J_{x+1} - J_x \frac{l_{x+1}^i}{l_x^i} \right) v^{x+1} + \left(J_{x+2} - J_x \frac{l_{x+2}^i}{l_x^i} \right) v^{x+2} + \dots + \left(J_{x+n-1} - J_x \frac{l_{x+n-1}^i}{l_x^i} \right) v^{x+n-1} \right\},$$

oder:

$$a) \varepsilon | a_{ax \overline{n-1}}^i = \frac{1}{D_x^a} \left\{ \Sigma J'_x - \Sigma J'_{x+n} - J'_x (a_{x \overline{n-1}}^i - 1) \right\} \text{ oder: } = \frac{\varphi(ai)_x}{D_x^a}.$$

$a_{x \overline{n-1}}^i - 1$ bedeutet die nachschüssige temporäre Invalidenrente (Tabellen V—VII).

Die Werte $\varphi(ai)_x$ sind in den Tabellen VIII—X, Spalte 4, gegeben.

2. Der Barwert der Invalidenaltersrente, bezogen auf die Aktiven $[_n] a_{ax}^i$.

Die Zahl der im Alter $x+n$ noch lebenden Invaliden ist für die verschiedenen Eintrittsalter ebenfalls variabel. Aus der vorhin gegebenen Entwicklung ergibt sich jedoch, dass jene Zahl für irgend ein Eintrittsalter x ($20 < x < x+n$) gleich

$$J_{x+n} - J_x \frac{l_{x+n}^i}{l_x^i}$$

ist. Jeder dieser Invaliden bezieht eine Altersrente, deren Barwert, berechnet nach der Sterbetafel der Invaliden, im Alter $x+n$ gleich a_{x+n}^i ist. Der Barwert dieser Renten ist somit für die l_x^a Aktiven des Alters x gleich

$$\varphi(i)_x = \left[J_{x+n} - J_x \frac{l_{x+n}^i}{l_x^i} \right] v^n a_{x+n}^i,$$

oder für 1 Aktiven nach einfacher Umformung:

$$\beta) \quad [_n] a_{ax}^i = \frac{1}{D_x^a} \left[J'_{x+n} a_{x+n}^i - \frac{J_x N_{x+n}^i}{l_x^i} \right] = \frac{\varphi(i)_x}{D_x^a}$$

Die Werte $\varphi(i)_x$ sind in den Tabellen VIII—X, Spalte 6, gegeben.

Vereinigt man die Gleichungen α und β , so wird

$$[_{x-1}] a_{ax}^i + [_n] a_{ax}^i = \frac{\varphi(ai)_x + \varphi(i)_x}{D_x^a},$$

in welcher Form in den Tabellen VIII—X, Spalte 8, die Barwerte der Kassenleistungen an die Invaliden berechnet worden sind.

3. Der Barwert der Aktivenaltersrente, bezogen auf die Aktiven $[_n] a_{ax}^a$.

Das Alter $x+n$ erleben noch l_{x+n}^a Aktive, welche Anzahl, da die Aktivenordnung eine kontinuierliche ist, für die Belastung aller Eintrittsalter unverändert in Rechnung zu ziehen ist.

Da jede dieser Altersrenten im Alter $x+n$ den Barwert a_{x+n} besitzt — berechnet nach der schweiz. Absterbeordnung, s. Tabelle I — so wird der Barwert für jeden einzelnen der l_x^a Aktiven des Alters x

$$[_n] a_{ax}^a = \frac{l_{x+n}^a}{l_x^a} a_{x+n} v^n \quad \text{oder}$$

$$\gamma) \quad [_n] a_{ax}^a = \frac{D_{x+n}^a}{D_x^a} a_{x+n}$$

Die Werte sind in Spalte 9 der Tabellen VIII bis X gegeben.

Die Summe der Gleichungen α), β) und γ) ergibt den Barwert der gesamten Kassaleistung, bezogen auf

die Aktiven des Alters x , den wir mit $\mathfrak{A}_{ax}$ bezeichnet haben. Es ist demnach

$$\mathfrak{A}_{ax} = \frac{1}{D_x^a} \left\{ \Sigma J'_x - \Sigma J'_{x+n} - J'_x (a_{x+n-1}^i - 1) + J'_{x+n} a_{x+n}^i - \frac{J_x N_{x+n}^i}{l_x^i} + D_{x+n}^a a_{x+n} \right\}$$

Die Werte $\mathfrak{A}_{ax}$ sind in Spalte 10 der Tabellen VIII—X gegeben.

b) Die Berechnung der Nettoprämien und der Reserve.

Da die Prämien nur während der Dauer der Aktivität zahlbar sein sollen, so ist der Barwert der jährlichen Prämienzahlung 1 gleich dem Barwert der temporären n Mal zahlbaren Aktivenrente a_{x+n-1}^a .

Nun ist

$$a_{x+n-1}^a = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a}.$$

Diese Barwerte sind in den Tabellen V—VII, Spalte 3, berechnet.

Die Netto-Jahresprämie ergibt sich nun aus der Gleichung

$${}_n P_x = \frac{\mathfrak{A}_{ax}}{a_{x+n-1}^a}.$$

Die Werte ${}_n P_x$ in Spalte 11 der Tabellen VIII bis X wurden mit 100 multipliziert, sie stellen somit die Prämie für die Jahresrente 100 dar.

Nach einer Versicherungsdauer von t Jahren stellt sich die Reserve dar als Differenz zwischen dem Barwert der zu erwartenden Versicherungsleistung und dem Barwert der mutmasslichen Prämienzahlungen. Für die Berechnung derselben ist hier zunächst zu unterscheiden, ob

$$t \leq n.$$

Für $t < n$ ist weiter zwischen Aktiven und Invaliden zu unterscheiden. Für einen Aktiven muss die Reserve ${}_t V_x$ nach t Jahren bei einer anwartschaftlichen Rente R betragen

$${}_t V_x = R (\mathfrak{A}_{ax+t} - {}_n P_x a_{ax+t+n-1}^a)$$

und für einen Invaliden, der schon im Genusse der Rente R steht

$${}_t V_x = R a_{x+t}^i.$$

Für $t > n$ ist zu unterscheiden zwischen Aktiven-Altersrentnern und Invaliden-Altersrentnern. Für erstere wird die Reserve bei einer Altersrente R

$${}_t V_x = R a_{x+t}$$

und für letztere ist die Formel identisch mit derjenigen bei Fall 2 von $t < n$:

$${}_t V_x = R a_{x+t}^i.$$

Tab. I. Grundzahlen nach der schweizerischen Mortalitätstafel für Männer (1876/77—1880/81).

Barwert der pränumerando zahlbaren Rente.

Alter x	l_x	D_x	N_x	a_x	Alter x	l_x	D_x	N_x	a_x
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	10 000	10 000.00	177 967.8	17.796 8	50	4 751	850.683	11 146.94	13.103 5
1	7 958	7 688.89	167 967.8	21.845 5	51	4 652	804.789	10 296.25	12.793 7
2	7 665	7 155.36	160 278.9	22.399 8	52	4 550	760.525	9 491.46	12.480 2
3	7 518	6 780.81	153 123.5	22.581 9	53	4 444	717.688	8 730.94	12.165 4
4	7 403	6 451.29	146 342.7	22.684 3	54	4 336	676.566	8 013.25	11.844 0
5	7 309	6 153.98	139 891.4	22.731 9	55	4 227	637.255	7 336.68	11.513 0
6	7 243	5 892.18	133 737.4	22.697 4	56	4 113	599.100	6 699.43	11.182 5
7	7 188	5 649.70	127 845.2	22.628 7	57	3 996	562.374	6 100.33	10.847 5
8	7 142	5 423.72	122 195.5	22.529 8	58	3 875	526.904	5 537.96	10.510 4
9	7 104	5 212.43	116 771.8	22.402 6	59	3 748	492.401	5 011.05	10.176 8
10	7 069	5 011.35	111 559.4	22.261 3	60	3 616	458.994	4 518.652	9.844 7
11	7 042	4 823.39	106 548.0	22.089 9	61	3 479	426.671	4 059.658	9.514 7
12	7 017	4 643.73	101 724.6	21.905 8	62	3 336	395.298	3 632.987	9.190 5
13	6 993	4 471.35	97 080.9	21.711 8	63	3 189	365.101	3 237.689	8.867 9
14	6 969	4 305.32	92 609.5	21.510 5	64	3 038	336.051	2 872.588	8.548 1
15	6 945	4 145.41	88 304.2	21.301 7	65	2 884	308.228	2 536.537	8.229 4
16	6 917	3 989.07	84 158.8	21.097 3	66	2 727	281.593	2 228.309	7.913 2
17	6 886	3 836.90	80 169.7	20.894 4	67	2 567	256.108	1 946.716	7.601 2
18	6 849	3 687.24	76 332.8	20.701 9	68	2 405	231.831	1 690.608	7.292 4
19	6 809	3 541.74	72 645.6	20.511 3	69	2 241	208.717	1 458.777	6.989 3
20	6 763	3 398.85	69 103.9	20.331 5	70	2 075	186.721	1 250.060	6.694 8
21	6 715	3 260.61	65 705.0	20.151 2	71	1 909	165.974	1 063.339	6.406 6
22	6 664	3 126.42	62 444.4	19.973 2	72	1 743	146.417	897.365	6.128 8
23	6 611	2 996.67	59 318.0	19.794 6	73	1 579	128.155	750.948	5.859 7
24	6 558	2 872.12	56 321.3	19.609 7	74	1 418	111.196	622.793	5.600 8
25	6 503	2 751.72	53 449.2	19.423 9	75	1 263	95.692 3	511.596 8	5.346 3
26	6 449	2 636.59	50 697.5	19.228 4	76	1 114	81.549 0	415.904 5	5.100 1
27	6 393	2 525.31	48 060.91	19.031 7	77	973	68.818 6	334.355 5	4.858 5
28	6 337	2 418.54	45 535.60	18.827 7	78	840	57.402 7	265.536 9	4.625 9
29	6 280	2 315.74	43 117.06	18.619 1	79	716	47.274 3	208.134 2	4.402 7
30	6 221	2 216.41	40 801.32	18.408 8	80	601	38.339 5	160.859 9	4.195 7
31	6 160	2 120.46	38 584.91	18.196 5	81	497	30.632 9	122.520 4	3.999 6
32	6 098	2 028.13	36 464.45	17.979 3	82	404	24.058 7	91.887 5	3.819 3
33	6 035	1 939.30	34 436.32	17.757 1	83	324	18.642 2	67.828 8	3.638 5
34	5 971	1 853.85	32 497.02	17.529 5	84	255	14.175 9	49.186 6	3.469 7
35	5 906	1 771.66	30 643.17	17.296 3	85	197	10.581 2	35.010 7	3.308 8
36	5 841	1 692.91	28 871.51	17.054 3	86	150	7.784 33	24.429 48	3.138 3
37	5 775	1 617.18	27 178.60	16.806 2	87	112	5.615 75	16.645 15	2.964 0
38	5 708	1 544.37	25 561.42	16.551 4	88	81	3.924 05	11.029 40	2.810 7
39	5 640	1 474.37	24 017.05	16.289 7	89	57	2.667 99	7.105 35	2.663 2
40	5 568	1 406.32	22 542.68	16.029 5	90	39	1.763 73	4.437 36	2.515 9
41	5 495	1 340.95	21 136.36	15.762 2	91	25	1.092 37	2.673 63	2.447 6
42	5 420	1 277.92	19 795.41	15.490 3	92	16	0.675 47	1.581 26	2.341 0
43	5 343	1 217.17	18 517.49	15.213 6	93	10	0.407 90	0.905 79	2.220 6
44	5 265	1 158.84	17 300.32	14.929 0	94	6	0.236 46	0.497 89	2.105 6
45	5 187	1 103.06	16 141.48	14.633 3	95	4	0.152 31	0.261 43	1.716 5
46	5 106	1 049.12	15 038.42	14.334 3	96	2	0.073 58	0.109 12	1.483 1
47	5 023	997.164	13 989.29	14.029 1	97	1	0.035 55	0.035 55	1.000 0
48	4 937	946.948	12 992.13	13.720 0	98	0	—	—	—
49	4 847	898.247	12 045.18	13.409 7					

Tabelle II.

Grundzahlen nach der Aktivitätsordnung. Barwert der pränumerando zahlbaren Aktivenrente.

Alter	Aktivitäts- ordnung. Anzahl der Aktiven	Diskontierte Zahl derselben	Summe derselben	Barwert der vorschüssigen Rente	Alter	Aktivitäts- ordnung. Anzahl der Aktiven	Diskontierte Zahl derselben	Summe derselben	Barwert der vorschüssigen Rente
x	l_x^a	D_x^a	N_x^a	a_x^a	x	l_x^a	D_x^a	N_x^a	a_x^a
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
20	67 630	33 988.5	659 498	19.403 6	55	37 993	5 727.75	49 196.8	8.589 2
21	67 130	32 596.4	625 509	19.189 5	56	36 494	5 315.72	43 469.0	8.177 4
22	66 607	31 248.7	592 913	18.974 0	57	34 952	4 918.95	38 153.3	7.756 4
23	66 069	29 948.1	561 664	18.754 6	58	33 325	4 531.37	33 234.3	7.334 3
24	65 515	28 692.8	531 716	18.531 3	59	31 616	4 153.62	28 702.9	6.910 3
25	64 957	27 486.4	503 023	18.300 8	60	29 751	3 776.42	24 599.3	6.500 7
26	64 393	26 326.3	475 537	18.063 2	61	27 736	3 401.59	20 772.9	6.106 8
27	63 820	25 209.7	449 211	17.819 0	62	25 547	3 027.18	17 371.3	5.738 4
28	63 236	24 134.3	424 001	17.568 4	63	23 258	2 662.75	14 344.1	5.386 9
29	62 641	23 098.8	399 867	17.311 2	64	20 901	2 311.98	11 681.3	5.052 5
30	62 019	22 096.0	376 768	17.051 4	65	18 549	1 982.43	9 369.33	4.726 2
31	61 379	21 128.5	354 672	16.786 4	66	16 251	1 678.10	7 386.90	4.401 9
32	60 722	20 195.5	333 543	16.515 7	67	14 069	1 403.65	5 708.80	4.067 1
33	60 043	19 294.4	313 347	16.240 3	68	11 959	1 152.79	4 305.15	3.734 5
34	59 343	18 424.6	294 053	15.959 8	69	9 902	922.229	3 152.36	3.418 2
35	58 637	17 589.7	275 628	15.669 9	70	7 944	714.850	2 230.13	3.119 7
36	57 910	16 784.2	258 038	15.373 9	71	6 125	532.527	1 515.276	2.845 4
37	57 161	16 006.9	241 254	15.071 9	72	4 484	376.669	982.749	2.609 1
38	56 399	15 259.4	225 247	14.761 2	73	3 116	252.902	606.080	2.396 5
39	55 614	14 538.2	209 988	14.443 9	74	2 052	160.913	353.178	2.194 8
40	54 792	13 838.9	195 450	14.123 2	75	1 268	96.071 2	192.265	2.001 3
41	53 950	13 165.5	181 611	13.794 5	76	724	52.999 5	96.193 8	1.815 0
42	53 091	12 517.7	168 445	13.456 5	77	373	26.381 6	43.194 3	1.637 3
43	52 207	11 893.1	155 927	13.110 7	78	168	11.480 5	16.812 7	1.464 5
44	51 305	11 292.3	144 034	12.755 1	79	62	4.093 58	5.332 15	1.302 6
45	50 385	10 714.8	132 742	12.388 7	80	17	1.084 48	1.238 57	1.142 1
46	49 429	10 156.1	122 027	12.015 1	81	2.5	0.154 09	0.154 09	1.000 0
47	48 410	9 610.34	111 871	11.640 7	82				
48	47 332	9 078.58	102 260.9	11.264 0					
49	46 176	8 557.35	93 182.3	10.889 2					
50	44 946	8 047.73	84 624.9	10.515 4					
51	43 642	7 550.00	76 577.2	10.142 7					
52	42 292	7 069.03	69 027.2	9.764 7					
53	40 897	6 604.70	61 958.2	9.380 9					
54	39 457	6 156.66	55 353.5	8.990 8					

Tabelle III.

Grundzahlen nach der Absterbeordnung der Invaliden. Barwert der pränumerando zahlbaren Rente.

Alter x	Absterbe- ordnung der Invaliden l_x^i	Diskontierte Zahl derselben D_x^i	Summe der letzteren N_x^i	Barwert der vorschüssigen Rente a_x^i	Alter x	Absterbe- ordnung der Invaliden l_x^i	Diskontierte Zahl derselben D_x^i	Summe der letzteren N_x^i	Barwert der vorschüssigen Rente a_x^i
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
20	100 000	50 256.6	454 729.4	9.048 2	55	9 323	1 405.52	14 653.23	10.425 5
21	89 800	43 604.3	404 472.8	9.276 0	56	8 871	1 292.15	13 247.71	10.252 5
22	80 991	37 997.0	360 868.5	9 497 3	57	8 439	1 187.65	11 955.56	10.066 5
23	73 354	33 250.3	322 871.5	9.710 3	58	8 026	1 091.34	10 767.91	9.866 7
24	66 715	29 218.3	289 621.2	9.912 3	59	7 629	1 002.27	9 676.57	9.654 6
25	60 924	25 779.8	260 402.9	10.101 0	60	7 247	919 891	8 674.30	9.429 7
26	55 861	22 838.1	234 623.1	10.273 3	61	6 876	843.286	7 754.408	9.195 5
27	51 420	20 311.5	211 785.0	10.426 8	62	6 512	771.639	6 911.122	8.956 4
28	47 528	18 139.2	191 473.5	10.555 8	63	6 154	704.553	6 139.483	8.714 0
29	44 106	16 264.0	173 334.3	10.657 5	64	5 801	641 683	5 434.930	8.469 8
30	41 085	14 637.7	157 070.3	10.730 5	65	5 452	582.683	4 793.247	8.226 2
31	38 390	13 215.0	142 432.6	10.778 1	66	5 109	527.560	4 210.564	7.981 2
32	35 933	11 951.0	129 217.6	10.812 3	67	4 775	476.397	3 683.004	7.731 0
33	33 633	10 807.7	117 266.6	10.850 3	68	4 448	428.765	3 206.607	7.478 7
34	31 480	9 773.78	106 458.9	10.892 3	69	4 130	384.652	2 777.842	7.221 7
35	29 468	8 839.72	96 685.10	10.937 6	70	3 823	344.016	2 393.190	6.956 6
36	27 585	7 995.04	87 845.38	10.987 5	71	3 525	306.474	2 049.174	6.686 3
37	25 822	7 230.98	79 850.34	11.042 8	72	3 236	271.834	1 742.700	6.410 9
38	24 172	6 540.03	72 619.36	11.103 8	73	2 956	239.915	1 470.866	6.130 8
39	22 627	5 914.99	66 079.33	11.171 5	74	2 683	210.395	1 230.951	5 850 7
40	21 195	5 353.27	60 164.34	11.238 8	75	2 417	183.126	1 020.556	5 573 0
41	19 877	4 850.60	54 811.07	11.299 8	76	2 159	158.047	837.430	5.298 6
42	18 686	4 405.77	49 960.47	11.339 8	77	1 908	134.949	679.383	5.034 4
43	17 597	4 008.70	45 554.70	11.364 0	78	1 667	113.918	544.434	4.779 2
44	16 615	3 656.99	41 546.00	11.360 7	79	1 436	94.813	430.516	4.540 7
45	15 708	3 340.45	37 889.01	11.342 5	80	1 222	77.955	335.703	4.306 4
46	14 875	3 056.34	34 548.56	11.303 9	81	1 023	63.054	257.748	4.087 7
47	14 094	2 797.94	31 492.22	11.255 5	82	845	50.321	194.694	3.869 0
48	13 361	2 562.72	28 694.28	11.196 8	83	687	39.529	144.373	3 652 3
49	12 672	2 348.38	26 131.56	11.127 5	84	549	30.520	104.844	3.435 3
50	12 023	2 152.75	23 783.18	11.047 8	85	430	23.096	74.324	3.218 0
51	11 410	1 973.91	21 630.43	10.958 2					
52	10 836	1 811.21	19 656.52	10.852 7					
53	10 299	1 663.25	17 845.31	10.729 2					
54	9 798	1 528.83	16 182.06	10.584 6					

Tabelle IV.

Grundzahlen nach der Invalidenordnung.

Alter	Invalidenordnung. Lebende Invalide zu Anfang des Jahres	Diskontierte Zahl derselben	Summe der letzteren	Alter	Invalidenordnung. Lebende Invalide zu Anfang des Jahres	Diskontierte Zahl derselben	Summe der letzteren
x	J_x	J'_x	$\sum J'_x$	x	J_x	J'_x	$\sum J'_x$
1	2	3	4	1	2	3	4
20	—	—	—	60	6 403	812.760	20 634.1
21	13	6.312	31 507.6	61	7 046	864.134	19 821.3
22	26	12.198	31 501.3	62	7 812	925.679	18 957.2
23	41	18.585	31 489.1	63	8 633	988.370	18 031.5
24	56	24.526	31 470.5	64	9 478	1 048.418	17 043.1
25	73	30.890	31 446.0	65	10 293	1 100.067	15 994.7
26	91	37.204	31 415.1	66	11 017	1 137.628	14 894.6
27	110	43.451	31 377.9	67	11 601	1 157.423	13 757.0
28	131	49.997	31 334.4	68	12 092	1 165.613	12 599.6
29	155	57.156	31 284.4	69	12 507	1 164.847	11 434.0
30	185	65.911	31 227.2	70	12 806	1 152.362	10 269.2
31	220	75.731	31 161.3	71	12 963	1 127.044	9 116.85
32	256	85.143	31 085.6	72	12 946	1 087.503	7 989.81
33	303	97.367	31 000.5	73	12 670	1 028.327	6 902.31
34	360	111.771	30 903.1	74	12 130	951.207	5 873.98
35	423	126.890	30 791.3	75	11 363	860.928	4 922.77
36	498	144.337	30 664.4	76	10 418	762.637	4 061.84
37	589	164.939	30 520.1	77	9 353	661.522	3 299.20
38	681	184.253	30 355.2	78	8 230	562.409	2 637.68
39	780	203.902	30 170.9	79	7 092	468.254	2 075.27
40	889	224.537	29 967.0	80	5 990	382.119	1 607.02
41	1 000	244.031	29 742.5	81	4 965	306.021	1 224.90
42	1 108	261.243	29 498.4	82	4 040	240.587	918.874
43	1 225	279.062	29 237.1	83	3 240	186.422	678.287
44	1 345	296.038	28 958.0	84	2 550	141.759	491.865
45	1 480	314.736	28 662.0	85	1 970	105.812	350.106
46	1 629	334.707	28 347.3	86	1 500	77.843	244.294
47	1 819	361.107	28 012.6	87	1 120	56.157	166.451
48	2 034	390.134	27 651.5	88	810	39.240	110.294
49	2 289	424.198	27 261.4	89	570	26.680	71.054
50	2 563	458.914	26 837.2	90	390	17.637	44.374
51	2 876	497.544	26 378.3	91	250	10.924	26.737
52	3 200	534.874	25 880.8	92	160	6.755	15.813
53	3 541	571.857	25 345.9	93	100	4.079	9.058
54	3 900	608.535	24 774.0	94	60	2.365	4.979
55	4 271	643.888	24 165.5	95	40	1.523	2.614
56	4 636	675.280	23 521.6	96	20	0.736	1.091
57	5 008	704.798	22 846.3	97	10	0.355	0.355
58	5 419	736.850	22 141.5	98	—	—	—
59	5 865	770.526	21 404.6				

Tabelle V.

Barwert der temporären Aktiven- und Invaliden-
rente, zahlbar bis zum Alter 60.

$$x + n = 60.$$

Alter x	$N_x^a - N_{x+n}^a$	$a_{x \overline{n-1} }^a = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a}$	$N_x^i - N_{x+n}^i$	$a_{x \overline{n-1} }^i = \frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i}$
1	2	3	4	5
20	634 949	18.681 3	446 055	8.875 6
21	600 960	18.436 4	395 799	9.077 1
22	568 364	18.188 4	352 194	9.269 0
23	537 115	17.934 8	314 197	9.449 4
24	507 167	17.675 8	280 947	9.615 4
25	478 474	17.407 7	251 729	9.764 6
26	450 988	17.130 7	225 949	9.893 5
27	424 662	16.845 2	203 111	9.999 8
28	399 452	16.551 3	182 799	10.077 5
29	375 318	16.248 4	164 660	10.124 2
30	352 219	15.940 4	148 396	10.137 9
31	330 123	15.624 5	133 758	10.121 7
32	308 994	15.300 1	120 543	10.086 5
33	288 798	14.968 0	108 592	10.047 6
34	269 504	14.627 4	97 784.6	10.004 8
35	251 079	14.274 2	88 010.8	9.956 3
36	233 489	13.911 2	79 171.1	9.902 5
37	216 705	13.538 2	71 176.0	9.843 2
38	200 698	13.152 4	63 945.1	9.777 5
39	185 439	12.755 3	57 405.0	9.705 0
40	170 901	12.349 3	51 490.0	9.618 4
41	157 062	11.929 8	46 136.8	9.511 6
42	143 896	11.495 4	41 286.2	9.370 9
43	131 387	11.047 3	36 880.4	9.200 1
44	119 485	10.581 1	32 871.7	8.988 7
45	108 193	10.097 5	29 214.7	8.745 7
46	97 478.0	9.598 0	25 874.3	8.465 8
47	87 322.0	9.086 3	22 817.9	8.155 3
48	77 711.6	8.559 9	20 020.0	7.812 0
49	68 633.0	8.020 4	17 457.3	7.433 8
50	60 075.6	7.464 9	15 108.9	7.018 4
51	52 027.9	6.891 1	12 956.1	6.563 7
52	44 477.9	6.291 9	10 982.2	6.063 5
53	37 408.9	5.664 0	9 171.01	5.513 9
54	30 804.2	5.003 4	7 507.76	4.910 8
55	24 647.5	4.303 2	5 978.93	4.253 9
56	18 919.7	3.559 2	4 573.41	3.539 4
57	13 604.0	2.765 6	3 281.26	2.762 8
58	8 685.0	1.916 6	2 093.61	1.918 4
59	4 153.6	1.000 0	1 002.27	1.000 0
60	—	—	—	—

Tabelle VI.

Barwert der temporären Aktiven- und Invaliden-
rente, zahlbar bis zum Alter 65.

$$x + n = 65.$$

Alter x	$N_x^a - N_{x+n}^a$	$a_{x \overline{n-1} }^a = \frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a}$	$N_x^i - N_{x+n}^i$	$a_{x \overline{n-1} }^i = \frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i}$
1	2	3	4	5
20	650 129	19.127 9	449 936	8.952 8
21	616 140	18.902 1	399 680	9.166 1
22	583 544	18.674 2	356 075	9.371 1
23	552 295	18.441 7	318 078	9.566 2
24	522 347	18.204 8	284 828	9.748 3
25	493 654	17.959 9	255 610	9.915 1
26	466 168	17.707 3	229 830	10.063 4
27	439 842	17.447 3	206 992	10.190 9
28	414 632	17.180 2	186 680	10.291 5
29	390 498	16.905 6	168 541	10.362 8
30	367 399	16.627 4	152 277	10.403 1
31	345 303	16.343 0	137 639	10.415 4
32	324 174	16.051 8	124 424	10.411 2
33	303 978	15.754 7	112 473	10.406 7
34	284 684	15.451 3	101 666	10.401 9
35	266 259	15.137 2	91 891.9	10.395 3
36	248 669	14.815 7	83 052.1	10.388 0
37	231 885	14 486 6	75 057.1	10.379 9
38	215 878	14.147 2	67 826.1	10.371 0
39	200 619	13.799 4	61 286.1	10.361 2
40	186 081	13.446 2	55 371.1	10.343 4
41	172 242	13.082 7	50 017.8	10.311 7
42	159 076	12.708 1	45 167.2	10.251 8
43	146 558	12.322 9	40 761 5	10.168 3
44	134 665	11.925 4	36 752.8	10.050 0
45	123 373	11.514 3	33 095.8	9.907 6
46	112 658	11.092 6	29 755.3	9.735 6
47	102 502	10.665 8	26 699.0	9.542 4
48	92 891.4	10.231 9	23 901.0	9.326 4
49	83 813.0	9.794 3	21 338 3	9.086 4
50	75 255.6	9.351 2	18 989 9	8.821 2
51	67 207.9	8.901 7	16 837.2	8.529 9
52	59 657.9	8.439 3	14 863.3	8.206 3
53	52 588.9	7.962 3	13 052.1	7.847 4
54	45 984.2	7.469 0	11 388.8	7.449 4
55	39 827.5	6.953 4	9 859.98	7.015 2
56	34 099.7	6.414 9	8 454.46	6.542 9
57	28 784.0	5.851 7	7 162.31	6.030 6
58	23 865.0	5.266 6	5 974.66	5.474 6
59	19 333.6	4.654 6	4 883.32	4.872 2
60	15 180.0	4.019 7	3 881.05	4.219 0
61	11 403.6	3.352 4	2 961.16	3.511 5
62	8 001.97	2.643 4	2 117.87	2.744 6
63	4 974.77	1.868 3	1 346.23	1.910 8
64	2 311.97	1.000 0	641.683	1.000 0
65	—	—	—	—

Tab. VII.

Barwert der temporären Aktiven- und Invalidenrente, zahlbar bis zum Alter 70.

$$x + n = 70.$$

Alter x	$N_x^a - N_{x+n}^a$	$a_{x \over n-1}^a =$ $\frac{N_x^a - N_{x+n}^a}{D_x^a}$	$N_x^i - N_{x+n}^i$	$a_{x \over n-1}^i =$ $\frac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i}$	Alter x
1	2	3	4	5	6
20	657 268	19.338 0	452 336	9.000 5	20
21	623 279	19.121 1	402 080	9.221 1	21
22	590 683	18.902 6	358 475	9.434 3	22
23	559 434	18.680 1	320 478	9.638 3	23
24	529 486	18.453 6	287 228	9.830 4	24
25	500 793	18.219 7	258 010	10.008 2	25
26	473 307	17.978 5	232 230	10.168 5	26
27	446 981	17.730 5	209 392	10.309 0	27
28	421 771	17.476 0	189 080	10.423 8	28
29	397 637	17.214 6	170 941	10.510 4	29
30	374 538	16.950 5	154 677	10.567 0	30
31	352 442	16.680 9	140 039	10.597 0	31
32	331 313	16.405 3	126 824	10.612 0	32
33	311 117	16.124 7	114 873	10.628 8	33
34	291 823	15.838 8	104 066	10.647 4	34
35	273 398	15.543 1	94 291.9	10.666 8	35
36	255 808	15.241 0	85 452.2	10.688 1	36
37	239 024	14.932 6	77 457.1	10.711 8	37
38	223 017	14.615 1	70 226.1	10.737 9	38
39	207 758	14.290 5	63 686.1	10.766 9	39
40	193 220	13.962 1	57 771.1	10.791 8	40
41	179 381	13.625 1	52 417.9	10.806 5	41
42	166 215	13.278 4	47 567.3	10.796 6	42
43	153 697	12.923 2	43 161.5	10.767 0	43
44	141 804	12.557 6	39 152.8	10.706 3	44
45	130 512	12.180 5	35 495.8	10.626 1	45
46	119 797	11.795 6	32 155.3	10.520 9	46
47	109 641	11.408 6	29 099.0	10.400 2	47
48	100 030.8	11.018 3	26 301.1	10.263 0	48
49	90 952.2	10.628 5	23 738.3	10.108 4	49
50	82 394.8	10.238 3	21 390.0	9.936 1	50
51	74 347.1	9.847 3	19 237.2	9.745 7	51
52	66 797.1	9.449 3	17 263.3	9.531 3	52
53	59 728.1	9.043 3	15 452.1	9.290 3	53
54	53 123.4	8.628 6	13 788.9	9.019 3	54
55	46 966.7	8.199 9	12 260.0	8.722 7	55
56	41 238.9	7.757 9	10 854.5	8.400 3	56
57	35 923.2	7.303 0	9 562.37	8.051 5	57
58	31 004.2	6.842 1	8 374.72	7.673 8	58
59	26 472.8	6.373 4	7 283.38	7.266 8	59
60	22 319.2	5.910 1	6 281.11	6.828 1	60
61	18 542.8	5.451 2	5 361.22	6.357 5	61
62	15 141.2	5.001 8	4 517.93	5.855 0	62
63	12 114.0	4.549 4	3 746.29	5.317 3	63
64	9 451.2	4.087 9	3 041.74	4.740 3	64
65	7 139.20	3.601 2	2 400.06	4.119 0	65
66	5 156.77	3.073 0	1 817.37	3.444 9	66
67	3 478.67	2.478 3	1 289.81	2.707 4	67
68	2 075.02	1.800 0	813.417	1.897 1	68
69	922.23	1.000 0	384.652	1.000 0	69
70	—	—	—	—	70

Tab. VIII.

Barwert der Invaliden- und Altersrente und der kombinierten Rente.

Die Prämie für die kombinierte Rente 100.

$$x + n = 60.$$

Alter x	$\sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}$	$J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)$	$\frac{q(ai)_x = \sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}}{J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)}$	$\frac{J_x N_{x+n}^i}{l_x^i}$	$\frac{q(i)_x = J'_{x+n} a_{x+n}^i}{J_x N_{x+n}^i l_x^i}$	$q(ai)_x + q(i)_x$	$\frac{q(ai)_x + q(i)_x}{D_x^a} = \frac{\varepsilon a_{x \over n-1}^i}{+ n a_{ax}^i}$	$\frac{D_{x+n}^a a_{x+n}^i}{D_x^a} = \frac{n a_{ax}^i}{n a_{ax}^i}$	$\mathfrak{A}_{ax} = \frac{\varepsilon a_{x \over n-1}^i}{+ n a_{ax}^i} + \frac{n a_{ax}^i}{+ n a_{ax}^i}$	$100 {}_n P_x = 100 \frac{\mathfrak{A}_{ax}}{a_{x \over n-1}^i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	—	—	10 873.4	—	7 664.08	18 537.5	0.545 41	1.093 83	1.639 24	8.775
21	10 873.4	51.0	10 816.1	1.26	7 662.82	18 478.9	0.566 90	1.140 55	1.707 45	9.261
22	10 867.1	100.9	10 754.0	2.79	7 661.29	18 415.3	0.589 31	1.189 74	1.779 05	9.781
23	10 854.9	157.0	10 679.3	4.85	7 659.23	18 338.5	0.612 34	1.241 40	1.853 74	10.336
24	10 836.3	211.3	10 600.5	7.28	7 656.80	18 257.3	0.636 30	1.295 72	1.932 01	10.930
25	10 811.8	270.7	10 510.2	10.39	7 653.69	18 163.9	0.660 83	1.352 59	2.013 42	11.566
26	10 780.9	330.9	10 412.8	14.13	7 649.95	18 062.8	0.686 11	1.412 19	2.098 30	12.249
27	10 743.7	391.0	10 309.3	18.56	7 645.52	17 954.8	0.712 22	1.474 74	2.186 96	12.983
28	10 700.3	453.8	10 196.5	23.91	7 640.17	17 836.7	0.739 06	1.540 45	2.279 51	13.772
29	10 650.3	521.5	10 071.6	30.48	7 633.60	17 705.2	0.766 50	1.609 51	2.376 01	14.623
30	10 593.1	602.3	9 924.9	39.06	7 625.02	17 549.9	0.794 26	1.682 55	2.476 81	15.538
31	10 527.2	690.8	9 760.7	49.71	7 614.37	17 375.1	0.822 35	1.759 60	2.581 95	16.525
32	10 451.5	773.7	9 592.6	61.80	7 602.28	17 194.9	0.851 42	1.840 89	2.692 31	17.596
33	10 366.3	880.9	9 388.1	78.15	7 585.93	16 974.0	0.879 74	1.926 86	2.806 60	18.751
34	10 269.0	1 006.5	9 150.7	99.20	7 564.88	16 715.6	0.907 24	2.017 83	2.925 07	19.997
35	10 157.2	1 136.5	8 893.8	124.52	7 539.56	16 433.4	0.934 26	2.113 60	3.047 86	21.352
36	10 030.3	1 285.0	8 600.95	156.60	7 507.48	16 108.4	0.959 74	2.215 04	3.174 78	22.822
37	9 885.95	1 458.59	8 262.42	197.86	7 466.22	15 728.6	0.982 62	2.322 60	3.305 22	24.414
38	9 721.01	1 617.28	7 919.48	244.38	7 419.70	15 339.2	1.005 23	2.436 38	3.441 61	26.167
39	9 536.76	1 774.97	7 557.89	299.02	7 365.06	14 923.0	1.026 47	2.557 24	3.583 71	28.096
40	9 332.86	1 935.15	7 173.17	363.83	7 300.25	14 473.4	1.045 85	2.686 46	3.732 31	30.223
41	9 108.32	2 077.09	6 787.10	436.40	7 227.68	14 014.8	1.064 51	2.823 87	3.888 38	32.594
42	8 864.29	2 186.84	6 416.21	514.35	7 149.73	13 565.9	1.083 73	2.970 01	4.053 74	35.264
43	8 603.05	2 288.34	6 035.65	603.85	7 060.23	13 095.9	1.101 13	3.125 99	4.227 12	38.263
44	8 323.99	2 364.96	5 662.99	702.19	6 961.89	12 624.9	1.118 01	3.292 30	4.410 31	41.681
45	8 027.95	2 437.85	5 275.36	817.29	6 846.79	12 122.2	1.131 35	3.469 75	4.601 10	45.567
46	7 713.21	2 498.86	4 879.65	949.95	6 714.13	11 593.8	1.141 56	3.660 62	4.802 18	50.033
47	7 378.51	2 583.83	4 433.57	1 119.52	6 544.56	10 978.1	1.142 32	3.868 51	5.010 83	55.147
48	7 017.40	2 657.59	3 970.67	1 320.53	6 343.55	10 314.2	1.136 10	4.095 10	5.231 20	61.113
49	6 627.26	2 729.21	3 473.86	1 566.88	6 097.20	9 571.06	1.118 46	4.344 53	5.462 99	68.114
50	6 203.07	2 761.93	2 982.22	1 849.15	5 814.93	8 797.15	1.093 12	4.619 65	5.712 77	76.528
51	5 744.15	2 768.19	2 478.42	2 186.44	5 477.64	7 956.06	1.053 78	4.924 20	5.977 98	86.749
52	5 246.61	2 708.33	2 003.40	2 561.63	5 102.45	7 105.85	1.005 21	5.259 24	6.264 45	99.564
53	4 711.73	2 581.31	1 558.57	2 982.40	4 681.68	6 240.25	0.944 82	5.628 98	6.573 80	116.06
54	4 139.88	2 379.86	1 151.48	3 452.72	4 211.36	5 362.84	0.871 06	6.038 62	6.909 68	138.10
55	3 531.34	2 095.15	792.30	3 973.82	3 690.26	4 482.56	0.782 61	6.490 80	7.273 41	169.02
56	2 887.45	1 714.81	497.36	4 533.21	3 130.87	3 628.23	0.682 55	6.993 92	7.676 47	215.68
57	2 212.17	1 242.42	264.96	5 147.64	2 516.44	2 781.40	0.565 45	7.558 06	8.123 51	293.73
58	1 507.38	676.72	93.81	5 856.72	1 807.36	1 901.17	0.419 56	8.204 51	8.624 07	449.97
59	770.53	—	—	6 668.60	995.48	995.48	0.239 67	8.950 67	9.190 34	919.03
60	—	—	—	7 664.08	—	—	—	—	—	—

Tab. IX.

Barwert der Invaliden- und Altersrente und der kombinierten Rente.

Die Prämie für die kombinierte Rente 100.

$x + n = 65$.

Alter x	$\sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}$	$J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)$	$\varphi(ai)_x = \frac{\sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}}{J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)}$	$\frac{J_x N_{x+n}^i}{l_x^i}$	$\varphi(i)_x = \frac{J'_{x+n} a_{x+n}^i}{J_x N_{x+n}^i l_x^i}$	$\varphi(ai)_x + \varphi(i)_x$	$\frac{\varphi(ai)_x + \varphi(i)_x}{D_x^a} = \frac{D_{x+n}^a a_{x+n}^i}{D_x^a} = {}_n a_{ax}^a$	$\frac{D_{x+n}^a a_{x+n}^i}{D_x^a} = {}_n a_{ax}^a$	$\mathfrak{A}_{ax} = \frac{\varepsilon a_{ax}^i}{\varepsilon a_{ax}^i + {}_n a_{ax}^i + {}_n a_{ax}^a}$	$100 {}_n P_x = 100 \frac{\mathfrak{A}_{ax}}{a_{x \over n-1}^i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	—	—	15 512.8	—	9 049.37	24 562.2	0.722 66	0.479 99	1.202 65	6.287
21	15 512.8	51.5	15 455.0	0.69	9 048.68	24 503.7	0.751 73	0.500 49	1.252 22	6.625
22	15 506.5	102.1	15 392.2	1.54	9 047.83	24 440.0	0.782 11	0.522 08	1.304 19	6.984
23	15 494.3	159.2	15 316.5	2.68	9 046.69	24 363.2	0.813 51	0.544 75	1.358 26	7.365
24	15 475.7	214.6	15 236.6	4.02	9 045.35	24 281.9	0.846 27	0.568 58	1.414 85	7.772
25	15 451.2	275.4	15 144.9	5.74	9 043.63	24 188.5	0.880 02	0.593 54	1.473 56	8.205
26	15 420.3	337.2	15 045.9	7.81	9 041.56	24 087.5	0.914 96	0.619 69	1.534 65	8.667
27	15 383.1	399.4	14 940.2	10.25	9 039.12	23 979.3	0.951 19	0.647 14	1.598 33	9.161
28	15 339.6	464.5	14 825.1	13.21	9 036.16	23 861.3	0.988 69	0.675 98	1.664 67	9.689
29	15 289.6	535.1	14 697.3	16.84	9 032.53	23 729.8	1.027 32	0.706 28	1.733 60	10.255
30	15 232.4	619.8	14 546.7	21.58	9 027.79	23 574.5	1.066 91	0.738 33	1.805 24	10.857
31	15 166.5	713.0	14 377.8	27.47	9 021.90	23 399.7	1.107 49	0.772 14	1.879 63	11.501
32	15 090.8	801.3	14 204.4	34.15	9 015.22	23 219.6	1.149 74	0.807 81	1.957 55	12.195
33	15 005.7	915.9	13 992.4	43.18	9 006.19	22 998.6	1.191 98	0.845 54	2.037 52	12.933
34	14 908.3	1 050.9	13 745.6	54.81	8 994.56	22 740.2	1.234 23	0.885 46	2.119 69	13.719
35	14 796.5	1 192.2	13 477.4	68.80	8 980.57	22 458.0	1.276 77	0.927 49	2.204 26	14.562
36	14 669.6	1 355.0	13 170.3	86.53	8 962.84	22 133.1	1.318 69	0.972 00	2.290 69	15.461
37	14 525.3	1 547.1	12 813.3	109.33	8 940.04	21 753.3	1.359 00	1.019 20	2.378 20	16.417
38	14 360.4	1 726.6	12 449.5	135.04	8 914.33	21 363.8	1.400 04	1.069 13	2.469 17	17.453
39	14 176.1	1 908.8	12 063.4	165.23	8 884.14	20 947.5	1.440 86	1.122 16	2.563 02	18.573
40	13 972.2	2 097.9	11 649.8	201.05	8 848.32	20 498.1	1.481 19	1.178 86	2.660 05	19.783
41	13 747.7	2 272.3	11 231.3	241.15	8 808.22	20 039.5	1.522 12	1.239 16	2.761 28	21.106
42	13 503.6	2 417.0	10 825.4	284.22	8 765.15	19 590.6	1.565 03	1.303 29	2.868 32	22.571
43	13 242.4	2 558.5	10 404.7	333.68	8 715.69	19 120.4	1.607 69	1.371 74	2.979 43	24.178
44	12 963.2	2 708.7	9 958.6	388.02	8 661.35	18 620.0	1.648 91	1.444 72	3.093 63	25.942
45	12 667.3	2 803.5	9 549.1	451.62	8 597.75	18 146.9	1.693 63	1.522 59	3.216 22	27.932
46	12 352.6	2 923.9	9 093.9	524.92	8 524.45	17 618.4	1.734 76	1.606 35	3.341 11	30.120
47	12 017.8	3 084.7	8 572.0	618.63	8 430.74	17 002.7	1.769 21	1.697 57	3.466 78	32.504
48	11 656.7	3 248.4	8 018.2	729.70	8 319.67	16 337.9	1.799 61	1.797 00	3.596 61	35.151
49	11 266.6	3 430.2	7 412.2	865.83	8 183.54	15 595.7	1.822 49	1.906 45	3.728 94	38.073
50	10 842.4	3 589.3	6 794.2	1 021.80	8 027.57	14 821.8	1.841 74	2.027 18	3.868 92	41.373
51	10 383.5	3 746.5	6 139.5	1 208.18	7 841.19	13 980.7	1.851 75	2.160 82	4.012 57	45.076
52	9 886.0	3 854.46	5 496.64	1 415.50	7 633.87	13 130.5	1.857 47	2.307 84	4.165 31	49.356
53	9 351.10	3 915.73	4 863.51	1 648.01	7 401.36	12 264.9	1.857 00	2.470 09	4.327 09	54.345
54	8 779.24	3 924.68	4 246.02	1 907.91	7 141.46	11 387.5	1.849 62	2.649 85	4.499 47	60.242
55	8 170.70	3 873.12	3 653.70	2 195.86	6 853.51	10 507.2	1.834 44	2.848 27	4.682 71	67.344
56	7 526.82	3 743.01	3 108.53	2 504.96	6 544.41	9 652.94	1.815 92	3.069 05	4.884 97	76.150
57	6 851.54	3 545.56	2 601.18	2 844.48	6 204.89	8 806.07	1.790 23	3.316 60	5.106 83	87.271
58	6 146.74	3 297.11	2 212.78	3 236.31	5 813.06	8 025.84	1.771 17	3.600 28	5.371 45	101.99
59	5 409.89	2 983.63	1 655.73	3 684.94	5 364.43	7 020.16	1.690 13	3.927 71	5.617 84	120.69
60	4 639.36	2 616.27	1 210.33	4 235.03	4 814.34	6 024.67	1.595 34	4.320 02	5.915 36	147.16
61	3 826.60	2 170.27	792.20	4 911.76	4 137.61	4 929.81	1.449 27	4.796 05	6.245 32	186.29
62	2 962.47	1 614.94	421.85	5 750.13	3 299.24	3 721.09	1.229 23	5.389 24	6.618 47	250.38
63	2 036.79	900.21	148.21	6 724.10	2 325.27	2 473.48	0.928 92	6.126 82	7.055 74	377.65
64	1 048.42	—	—	7 831.48	1 217.89	1 217.89	0.526 77	7.056 38	7.583 15	758.32
65	—	—	—	9 049.37	—	—	—	—	—	—

Tab. X.

Barwert der Invaliden- und Altersrente und der kombinierten Rente.

Die Prämie für die kombinierte Rente 100.

$$x + n = 70.$$

Alter x	$\sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}$	$J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)$	$\frac{\varphi(ai)_x = \sum J'_{x+1} - \sum J'_{x+n}}{J'_x (a_{x \over n-1}^i - 1)}$	$\frac{J_x N_{x+n}^i}{l_x^i}$	$\frac{\varphi(i)_x = J'_{x+n} a_{x+n}^i}{J_x N_{x+n}^i}$	$\varphi(ai)_x + \varphi(i)_x$	$\frac{\varphi(ai)_x + \varphi(i)_x}{D_x^a} = \varepsilon a_{x \over n-1}^i + n a_{ax}^i$	$\frac{D_{x+n}^a a_{x+n}^i}{D_x^a} = n a_{ax}^i$	$\mathfrak{A}_{ax} = \varepsilon a_{x \over n-1}^i + n a_{ax}^i + n a_{ax}^i$	$100 {}_n P_x = 100 \frac{\mathfrak{A}_{ax}}{a_{x \over n-1}^i}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	—	—	21 238.4	—	8 016.52	29 254.9	0.860 73	0.140 81	1.001 54	5.179
21	21 238.4	51.9	21 180.2	0.35	8 016.17	29 196.4	0.895 69	0.146 82	1.042 51	5.452
22	21 232.1	102.9	21 117.0	0.77	8 015.75	29 132.8	0.932 29	0.153 15	1.085 44	5.742
23	21 219.9	160.5	21 040.8	1.34	8 015.18	29 056.0	0.970 21	0.159 80	1.130 01	6.049
24	21 201.3	216.6	20 960.1	2.01	8 014.51	28 974.6	1.009 82	0.166 79	1.176 61	6.376
25	21 176.7	278.3	20 867.6	2.87	8 013.65	28 881.3	1.050 75	0.174 11	1.224 86	6.723
26	21 145.9	341.1	20 767.6	3.90	8 012.62	28 780.2	1.093 21	0.181 79	1.275 00	7.092
27	21 108.7	404.5	20 660.7	5.12	8 011.40	28 672.1	1.137 34	0.189 84	1.327 18	7.485
28	21 065.2	471.2	20 544.0	6.60	8 009.92	28 553.9	1.183 13	0.198 30	1.381 43	7.905
29	21 015.2	543.6	20 414.4	8.41	8 008.11	28 422.5	1.230 47	0.207 19	1.437 66	8.355
30	20 958.0	630.6	20 261.5	10.78	8 005.74	28 267.2	1.279 29	0.216 59	1.495 88	8.825
31	20 892.1	726.8	20 089.6	13.71	8 002.81	28 092.4	1.329 60	0.226 51	1.556 11	9.329
32	20 816.4	818.4	19 912.9	17.05	7 999.47	27 912.4	1.382 11	0.236 97	1.619 08	9.869
33	20 731.3	937.5	19 696.4	21.56	7 994.96	27 691.4	1.435 20	0.248 04	1.683 24	10.439
34	20 633.9	1 078.3	19 443.8	27.37	7 989.15	27 433.0	1.488 93	0.259 75	1.748 68	11.040
35	20 522.1	1 226.6	19 168.6	34.35	7 982.17	27 150.8	1.543 56	0.272 08	1.815 64	11.681
36	20 395.2	1 398.4	18 852.5	43.21	7 973.31	26 825.8	1.598 28	0.285 14	1.883 42	12.358
37	20 250.9	1 601.9	18 484.1	54.59	7 961.93	26 446.0	1.652 16	0.298 98	1.951 14	13.066
38	20 086.0	1 794.2	18 107.5	67.42	7 949.10	26 056.6	1.707 58	0.313 63	2.021 21	13.830
39	19 901.7	1 991.5	17 706.3	82.50	7 934.02	25 640.3	1.763 65	0.329 19	2.092 84	14.645
40	19 697.8	2 198.6	17 274.7	100.38	7 916.14	25 190.8	1.820 29	0.345 82	2.166 11	15.514
41	19 473.3	2 393.1	16 836.1	120.40	7 896.12	24 732.2	1.878 56	0.363 51	2.242 07	16.455
42	19 229.2	2 559.3	16 408.7	141.91	7 874.61	24 283.3	1.939 92	0.382 32	2.322 24	17.489
43	18 968.0	2 725.6	15 963.3	166.60	7 849.92	23 813.2	2.002 27	0.402 40	2.404 67	18.607
44	18 688.9	2 873.4	15 519.5	193.73	7 822.79	23 342.3	2.067 10	0.423 81	2.490 91	19.836
45	18 392.9	3 029.7	15 048.5	225.49	7 791.03	22 839.5	2.131 58	0.446 65	2.578 23	21.167
46	18 078.2	3 186.7	14 556.7	262.08	7 754.44	22 311.1	2.196 82	0.471 22	2.668 04	22.619
47	17 743.4	3 394.5	13 987.8	308.87	7 707.65	21 695.5	2.257 51	0.497 98	2.755 49	24.153
48	17 382.3	3 613.8	13 378.4	364.33	7 652.19	21 030.6	2.316 51	0.527 15	2.843 66	25.809
49	16 992.2	3 863.8	12 704.2	432.29	7 584.23	20 288.4	2.370 87	0.559 26	2.930 13	27.269
50	16 568.0	4 100.9	12 008.2	510.17	7 506.35	19 514.6	2.424 85	0.594 67	3.019 52	29.492
51	16 109.1	4 351.4	11 260.2	603.23	7 413.29	18 673.5	2.473 31	0.633 88	3.107 19	31.554
52	15 611.6	4 563.2	10 513.5	706.74	7 309.78	17 823.3	2.521 32	0.677 01	3.198 33	33.847
53	15 076.7	4 740.9	9 763.9	822.83	7 193.69	16 957.6	2.567 50	0.724 60	3.292 10	36.404
54	14 504.8	4 880.0	9 016.3	952.59	7 063.93	16 080.2	2.611 84	0.777 33	3.385 17	39.232
55	13 896.3	4 972.6	8 279.8	1 096.35	6 920.17	15 200.0	2.653 74	0.835 54	3.489 28	42.553
56	13 252.4	4 997.3	7 579.8	1 250.69	6 765.83	14 345.6	2.698 71	0.900 31	3 599 02	46.392
57	12 577.1	4 969.9	6 902.4	1 420.20	6 596.32	13 498.7	2.744 22	0.972 93	3.717 15	50.899
58	11 872.3	4 917.6	6 217.9	1 615.84	6 400.68	12 618.6	2.784 72	1.056 14	3.840 86	56.136
59	11 135.5	4 828.7	5 536.2	1 839.83	6 176.69	11 712.9	2.819 93	1.152 19	3.972 12	62.323
60	10 364.9	4 736.8	4 815.38	2 114.47	5 902.05	10 717.43	2.837 99	1.267 28	4.105 27	69.463
61	9 552.18	4 629.59	4 058.45	2 452.34	5 564.18	9 622.63	2.828 86	1.406 92	4.235 78	77.704
62	8 688.04	4 494.17	3 268.19	2 870.95	5 145.57	8 413.76	2.779 41	1.580 94	4.360 35	87.176
63	7 762.36	4 267.09	2 506.90	3 357.18	4 659.34	7 166.24	2.691 29	1.797 31	4.488 60	98.664
64	6 773.99	3 921.40	1 804.17	3 910.13	4 106.39	5 910.56	2.556 49	2.069 99	4.626 48	113.175
65	5 725.57	3 431.11	1 194.40	4 518.18	3 498.34	4 692.74	2.367 17	2.414 10	4.781 27	132.77
66	4 625.51	2 781.39	706.49	5 160.65	2 855.87	3 562.36	2.122 85	2.851 90	4.974 75	161.89
67	3 487.88	1 976.18	354.28	5 814.32	2 202.20	2 556.48	1.821 31	3.409 52	5.230 83	211.07
68	2 330.46	1 045.67	119.17	6 505.95	1 510.57	1 639.74	1.422 41	4.151 48	5.573 89	309.66
69	1 164.84	—	—	7 247.37	769.15	769.15	0.834 01	5.189 36	6.023 37	602.34
70	—	—	—	8 016.52	—	—	—	—	—	—