Die Intensität der Sterblichkeit, bestimmt auf Grund der zwei ersten schweizerischen Sterbetafeln.

Von Dr. **A. Bohren.**

Gleich beim ersten Blick auf die vom eidg. statistischen Bureau ausgearbeiteten Sterbetafeln der Jahre 1876—1881 und 1881—1888 erkennen wir, dass die Sterblichkeit zurückgegangen ist, d. h., dass sie in der zweiten Beobachtungsperiode kleiner, somit günstiger ist. Schon bei oberflächlicher Prüfung ist ersichtlich, dass diese Abnahme nicht für alle Alter eine gleichmässige ist, und es lohnt sich wohl, diesen Unterschieden etwas näher zu treten und dies um so mehr, als die zu solchen Vergleichungen der Sterblichkeit angewandte Intensitätsfunktion (Kraft der Sterblichkeit) recht interessante Eigenschaften besitzt und in der Versicherungsmathematik eine grosse Rolle spielt.

Sie ist der Quotient aus der Sterbenswahrscheinlichkeit einer unendlich kleinen Zeit zu dieser Zeit, also der Grenzwert, den der Ausdruck

$$\frac{l(x)-l(x+t)}{t \cdot l(x)}$$

[$l(x)$ = Zahl der Lebenden des Alters x]

annimmt, wenn t unter eine beliebig klein zu wählende Grösse sinkt.

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\mu(x)$ und es ist also

$$\mu(x)=\frac{l(x)-l(x+dx)}{l(x)\cdot dx}=-\frac{d\,l(x)}{dx}\cdot\frac{1}{l(x)}=-\frac{l'(x)}{l(x)}.$$

Wenn nun die $l(x)$ der Sterbetafeln nach einem bekannten mathematischen Gesetze abnehmen würden, so wäre es ein leichtes, $l'(x)$ zu bestimmen; für Tafeln, die nach dem Makehamschen Gesetz konstruiert sind, für die also die Relation besteht

$$l(x)=k\,s^x g^{c^x},\ [k, s, g, c = \text{Konstanten}]$$

haben wir für die Intensitätsfunktion sofort

$$\mu(x)=\log\frac{1}{s}+c^x\log\frac{1}{g}\cdot\log c.$$

Dies ist ein genau bestimmbarer Wert, sobald die Konstanten bekannt sind. Bei den auf Beobachtung beruhenden Tafeln müssen wir uns zur Herleitung von $\mu(x)$ einer Annahme über die Sterblichkeit bedienen. Von dieser Annahme wird die Genauigkeit der erhaltenen Werte abhangen. Herr Dr. Schärtlin hat die Intensitätsfunktion für die Jahre 1876—1881 bestimmt, indem er, für kurze Intervalle, die Kurve der Lebenden ersetzte durch eine Parabel [1]). Es ist dann

$$l'(x)=\frac{l(x+1)-l(x-1)}{2} \text{ und}$$

$$\mu(x)=\frac{l(x-1)-l(x+1)}{2\,l(x)}.$$

Dieser Ausdruck ergibt für $\mu(x)$ schon einen brauchbaren Näherungswert; nehmen wir indessen als Kurve der Lebenden eine C_4 [2])

$$l(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4,$$

so ist

$$\frac{d\,l(x)}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3$$

und für $x=0$

$$\frac{d\,l(0)}{dx}=B.$$

Aus 5 Beobachtungen lässt sich dieses B bestimmen.

$$l(-2)=A-2B+4C-8D+16E$$
$$l(-1)=A-B+C-D+E$$
$$l(0)=A$$
$$l(+1)=A+B+C+D+E$$
$$l(+2)=A+2B+4C+8D+16E$$

$$l(+1)-l(-1)=2B+2D$$
$$l(+2)-l(-2)=4B+16D$$
$$8[l(+1)-l(-1)]-l(+2)+l(-2)=12B$$
$$B=\frac{8[l(+1)-l(-1)]-l(+2)+l(-2)}{12}$$
$$\mu(0)=\frac{8[l(-1)-l(+1)]-[l(-2)-l(+2)]}{12\,l(0)}$$
$$\mu(x)=\frac{8[l(x-1)-l(x+1)]-[l(x-2)-l(x+2)]}{12\,l(x)} \text{ [3])}.$$

---

[1]) „Zeitschrift für schweizerische Statistik" 1888, pag. 294.

[2]) Westergard geht aus von: $\frac{l(n+1)}{l(n)}=e^{-\int_n^{n+1}\mu(x)\,dx}$ und wählt die Zeiteinheit so klein, dass ohne merklichen Fehler das Integral $\int_n^{n+1}\mu(x)\,dx$ durch $\mu\left(n+\frac{1}{2}\right)$ ersetzt werden darf. Setzen wir abkürzend $\mu\left(n+\frac{1}{2}\right)=\mu$, so ist $\frac{l(n+1)}{l(n)}=e^{-\mu}$ oder $\frac{l(n)-l(n+1)}{l(n)}=1-e^{-\mu}$.

[3]) Eine andere Ableitung dieser Formel findet sich im „Text-Book de l'Institut des Actuaires de Londres" 1884, pag. 24.

Nach dieser Formel sind die nachfolgenden Werte von $x = 3$ bis $x = 95$ berechnet für beide Sterbetafeln (männliche Bevölkerung). Die Werte für $x = 1$, $x = 2$, $x = 96$ ergeben sich aus den analogen Formeln unter Zugrundelegung einer C_3

$$\mu(x) = \frac{l(x+2) + 3\,l(x) + 2\,l(x-1) - 6\,l(x+1)}{6\,l(x)},$$

$$\mu(x) = \frac{-\,l(x-2) - 3\,l(x) - 2\,l(x+1) + 6\,l(x-1)}{6\,l(x)}.$$

Den Wert für $x = 0$ erhalten wir, indem wir die Kurve der Lebenden der ersten Tage durch eine Parabel ersetzen. Es ist dann

$$\frac{d\,l(x)}{d(x)} = \frac{365}{2}\left[4\,l\left(x + \frac{1}{365}\right) - l\left(x + \frac{2}{365}\right) - 3\,l(x)\right]$$ [1].

$$x = o, \quad \frac{d\,l(o)}{d\,x} = \frac{365}{2}\left[4\,l\left(\frac{1}{365}\right) - l\left(\frac{2}{365}\right) - 3\,l(o)\right].$$

Für 1876—1881

$$l_o = 178253$$

$$l\left(\frac{1}{365}\right) = 173478$$

$$l\left(\frac{2}{365}\right) = 172646$$

$$\mu(0) = \frac{365}{2} \cdot \frac{13493}{178253} = 13{,}814\,48.$$

Für 1881—1888

$$l_o = 10000$$

$$l\left(\frac{1}{365}\right) = 9764$$

$$l\left(\frac{2}{365}\right) = 9717$$

$$_o = \frac{365}{2} \cdot \frac{661}{10000} = 12{,}063\,25.$$

In der nachfolgenden Tabelle geben die Kolonnen 2 und 3 die dem Alter x entsprechenden Werte der Intensitätsfunktionen für die beiden Beobachtungsperioden an, während Kolonne 4 den absoluten Betrag $\mu(x)_{1876-1881} - \mu(x)_{1881-1888}$ darstellt.

[1] Schärtlin, „Zeitschrift für schweiz. Statistik“ 1888, pag. 294.

Es ist ersichtlich, dass

1. die Sterblichkeitsverhältnisse in den Jahren 1881 bis 1888 im allgemeinen wesentlich günstiger sind;
2. die absolute Abnahme in den ersten Lebensjahren bedeutende Beträge erreicht;
3. für die Alter 75—80 in der zweiten Beobachtungsperiode die Sterblichkeit grösser ist und für die höhern Alter dem zu wenig umfangreichen Material entsprechend die Schwankungen zu abwechselnd und zu gross sind, als dass Schlüsse gezogen werden könnten. Die Bemühungen des statistischen Bureaus um Beschaffung von solchem Material sind also zu begrüssen [1].

Auf die Bedeutung der $\mu(x)$ für die Versicherungsmathematik trete ich hier nicht näher ein; wie schon eingangs angedeutet wurde, haben wir uns, nach dem Vorgange von Professor Moser [2], gestattet, $\mu(x)$, die Intensität der Sterblichkeit, als Intensitätsfunktion zu bezeichnen.

Ist die Zahl der Sterbenden ein Maximum oder Minimum, so ist

$$-\frac{\mu'(x)}{\mu^2(x)} + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d}{d\,x}\left[\frac{1}{\mu(x)} + x\right] = 0$$ [3].

Wenn die Zahl der Sterbenden ein Maximum oder Minimum ist, so ist also gegenteils $y = \frac{1}{\mu(x)} + x$ ein Minimum oder Maximum.

Für die Periode 1881—1888 haben wir ein Minimum für $y = \frac{1}{\mu(x)} + x$ [4] in den Jahren 0 und 71, ein Maximum im Jahre 13. Die Zahl der Sterbenden ist also am grössten bei den Altern von 0 und 71 Jahren und am kleinsten bei dem Alter von 13 Jahren.

[1] „Zeitschrift für schweizerische Statistik“ 1903, pag. 184.

[2] Moser, Vorlesung S. S. 1902 an der Hochschule Bern.

[3] Siehe Wittstein: „Das Gesetz der menschlichen Sterblichkeit“, Hannover 1883.

[4] $\frac{1}{\mu(x)}$ stellt geometrisch die Subtangente der Kurve $l(x)$ im Punkte x dar.

x	$\mu (x)$			x	$\mu (x)$		
	1876—1880/81	1881—1888	Differenz 2—3		1876—1880/81	1881—1888	Differenz 2—3
1	2	3	4	1	2	3	4
0	13.814 48	12.063 25	1.751 23	50	0.020 57	0.019 44	0.001 13
1	0.113 14	0.099 33	0.013 81	51	0.021 59	0.020 49	0.001 10
2	0,026 22	0.023 14	0.003 08	52	0.022 88	0.021 68	0.001 20
3	0.016 04	0.013 38	0.002 66	53	0.024 13	0.022 63	0.001 50
4	0.014 07	0.011 08	0.002 99	54	0.024 97	0.023 78	0.001 19
5	0.010 83	0.008 17	0.002 66	55	0.026 34	0.025 26	0.001 08
6	0.008 13	0.006 34	0.001 79	56	0.028 10	0.026 91	0.001 19
7	0.006 99	0.005 44	0.001 55	57	0.029 72	0.028 96	0.000 76
8	0.005 81	0.004 50	0.001 31	58	0.031 98	0.031 27	0.000 71
9	0.005 14	0.003 94	0.001 20	59	0.034 57	0.033 95	0.000 62
10	0.004 37	0.003 49	0.000 88	60	0.037 17	0.036 61	0.000 56
11	0.003 61	0.003 16	0.000 45	61	0.040 27	0.038 90	0.001 37
12	0.003 47	0.002 98	0.000 49	62	0.043 52	0.041 08	0.002 44
13	0.003 42	0.002 81	0.000 61	63	0.046 75	0.043 84	0.002 91
14	0.003 40	0.002 98	0.000 42	64	0.050 22	0.047 49	0.002 73
15	0.003 71	0.003 27	0.000 44	65	0.053 92	0.051 82	0.002 10
16	0.004 24	0.003 69	0.000 55	66	0.058 15	0.056 21	0.001 94
17	0.004 94	0.004 26	0.000 68	67	0.062 75	0.060 57	0.002 18
18	0.005 62	0.005 00	0.000 62	68	0.067 78	0.065 46	0.002 32
19	0.006 33	0.005 68	0.000 65	69	0.073 70	0.070 76	0.002 94
20	0.006 99	0.006 11	0.000 88	70	0.080 08	0.077 61	0.002 47
21	0.007 37	0.006 50	0.000 87	71	0.087 04	0.085 52	0.001 52
22	0.007 84	0.006 84	0.001 00	72	0.094 81	0.093 50	0.001 31
23	0.008 02	0.007 02	0.001 00	73	0.103 13	0.101 89	0.001 24
24	0.008 25	0.007 12	0.001 13	74	0.111 60	0.111 16	0.000 44
25	0.008 38	0.007 33	0.001 05	75	0.120 48	0.121 23	— 0.000 75
26	0.008 52	0.007 52	0.001 00	76	0.130 31	0.133 05	— 0.002 74
27	0.008 77	0.007 82	0.000 95	77	0.140 89	0.145 01	— 0.004 12
28	0.008 89	0.008 02	0.000 87	78	0.153 08	0.157 20	— 0.004 12
29	0.009 22	0.008 23	0.000 99	79	0.167 13	0.170 77	— 0.003 64
30	0.009 66	0.008 44	0.001 22	80	0.182 47	0.184 14	— 0.001 67
31	0.010 00	0.008 74	0.001 26	81	0.198 52	0.198 30	0.000 22
32	0.010 25	0.009 15	0.001 10	82	0.214 11	0.210 39	0.003 72
33	0.010 52	0.009 43	0.001 09	83	0.229 42	0.222 92	0.006 50
34	0.010 82	0.009 94	0.000 88	84	0.249 02	0.240 06	0.008 96
35	0.011 01	0.010 48	0.000 53	85	0.265 65	0.254 11	0.011 54
36	0.011 20	0.010 71	0.000 49	86	0.281 11	0.277 29	0.003 82
37	0.011 52	0.010 99	0.000 53	87	0.306 55	0.299 48	0.007 07
38	0.011 78	0.011 28	0.000 50	88	0.338 48	0.322 70	0.015 78
39	0.012 41	0.011 52	0.000 89	89	0.364 04	0.348 26	0.015 78
40	0.013 05	0.012 18	0.000 87	90	0.408 12	0.367 02	0.041 10
41	0.013 45	0.013 07	0.000 38	91	0.456 67	0.401 04	0.055 63
42	0.014 04	0.013 78	0.000 26	92	0.453 13	0.448 41	0.004 72
43	0.014 54	0.014 19	0.000 35	93	0.491 67	0.487 18	0.004 49
44	0.014 78	0.014 66	0.000 12	94	0.472 22	0.552 08	— 0.079 86
45	0.015 29	0.015 15	0.000 14	95	0.479 17	0.750 00	— 0.270 83
46	0.016 06	0.015 64	0.000 42	96	0.833 33	0.666 67	0.166 66
47	0.016 79	0.016 26	0.000 53				
48	0.017 77	0.016 96	0.000 81				
49	0.019 20	0.018 18	0.001 02				