Fundamentale Beziehungen zwischen den Prämien der Lebens-, Invaliden- und Todesfallversicherung.

Von Dr. J. V. Pexider in Bern.

Man begegnet in der Versicherungsrechnung zeitweilen Formeln, von denen behauptet wird, in der Praxis eine allgemeinere Verwendung gefunden zu haben, deren Richtigkeit aber nicht anders als durch logisches Argumentieren plausibel gemacht wird.

So behauptet man, in der Invalidenversicherung die Beziehung *„Leibrente ist gleich der Aktivitätsrente, vergrössert um die Anwartschaft auf Invalidenpension“* benützen zu können. Erst unlängst ist eine ähnliche Beziehung [1]), die gültig sein soll für *„Todesfallversicherung eines Aktiven mit Auszahlung bloss bei vorangegangener Invalidität“*, abgeleitet worden, als Analogon der eben genannten Beziehung. Nun frägt es sich aber, ob diese Beziehungen, welche vielleicht ihrer Einfachheit wegen einen gewissen Reiz auf die Versicherungstechniker auszuüben vermögen, genügend approximativ richtig sind, also auch ihre Anwendung zur Berechnung von Tafeln der Versicherungsanstalten zulässig ist, oder ob dies nicht der Fall sei. Denn, dass die Formeln *mathematisch* nicht richtig sind, steht ausser Zweifel.

Es sollen hier demgemäss zwischen den oben erwähnten Renten- und Todesfallversicherungen zuerst mathematisch korrekte Beziehungen abgeleitet werden, und es soll dann an praktischen Beispielen gezeigt werden, ob sich die Differenzen zwischen den auf diese Art bestimmten und jenen aus den „bekannten“ Formeln berechneten Werten in den für die Zahlungsfähigkeit der Versicherungskassen hinreichenden Grenzen der Approximation bewegen oder nicht, also die Berechnung nach diesen Formeln zulässig sei oder nicht. Es wird sich herausstellen, *dass dies nicht angehe.*

[1]) H. L. Kœppler, *Versicherung eines Aktiven mit Auszahlung im Todesfall bei vorangegangener Invalidität.* Österreichische Versicherungszeitung (Wien), Jahrg. 31 (1904), p. 67—69.

I. Ableitung einer Beziehung zwischen der Leibrente, Aktivitätsrente, der Invaliditätsrente und der Anwartschaft auf Invalidenpension.

Es bedeute — in möglichster Übereinstimmung mit den durch die internationalen Kongresse für Versicherungswissenschaft festgestellten Grundsätzen für eine gemeinsame Bezeichnungsweise (nach Massgabe der Veröffentlichung über die Verhandlungen in London) [1]) —

$l(x)$ die Anzahl der x-jährigen lebenden Männer überhaupt;

$l_a(x)$ die Anzahl der x-jährigen aktiven Männer;

$l_i(x)$ die Anzahl derjenigen Personen, welche aus einer Anfangszahl von Aktiven invalid geworden sind und im x-ten Lebensjahre stehen;

$l_u(x)$ die Anzahl der auf Grund der Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden jeweilig am Schlusse des x-ten Lebensjahres noch lebenden invaliden Männer (Sterbetafel für Invalide);

$i(x)$ die Anzahl der im x-ten Lebensalter aus den $l_a(x)$ Aktiven hervorgehenden, invalid werdenden Männer, die das x-te Jahr durchleben;

v den Barwert des nach einem Jahre fälligen Kapitals 1, d. h. den Diskontierungsfaktor;

$D(x)$ die diskontierte Zahl der lebenden Männer überhaupt, so dass $D(x) = v^x l(x)$ ist;

$D_a(x)$ die diskontierte Zahl der aktiven Männer, d. h. $D_a(x) = v^x l_a(x)$;

$D_u(x)$ die diskontierte Zahl der invaliden Männer, d. h. $D_u(x) = v^x l_u(x)$;

$a(x)$ den Barwert der ganzjährigen vorschüssigen Leibrente eines x-jährigen Mannes von jährlich 1;

[1]) Transactions of the Second International Actuarial Congress, London 1898; p. 618.

$\mathfrak{a}_a(x)$ den Barwert der ganzjährigen vorschüssigen Aktivitätsrente 1 eines x-jährigen Aktiven;

$\mathfrak{a}_u(x)$ den Barwert der ganzjährigen vorschüssigen Invaliditätsrente 1 eines x-jährigen Invaliden;

$\mathfrak{a}_i(x)$ den Barwert der Anwartschaft auf Invalidenpension von jährlich 1 eines derzeit aktiven x-jährigen Mannes;

$q(x)$ die Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden.

Die Anzahl der x-jährigen lebenden Männer besteht aus der Anzahl der x-jährigen Aktiven und der Anzahl der x-jährigen Invaliden, d. h. es ist

$$l(x) = l_a(x) + l_i(x).$$

Multipliziert man diese Identität mit v^x, so erhält man die Gleichung

$$D(x) = D_a(x) + v^x l_i(x),$$

und, indem man von einem Anfangswert von x bis zu dem höchsten vorkommenden Alter (ω) summiert, weiter die Beziehung

$$\sum_x^{\omega} D(x) = \sum_x^{\omega} D_a(x) + \sum_x^{\omega} v^x l_i(x).$$

Es sei im folgenden statt $\sum_x^{\omega}$ einfach $\sum$ geschrieben.

Nun ist offenbar

$$(1) \qquad \frac{\sum D(x)}{D(x)} = \frac{D_a(x)}{D(x)} \left\{ \frac{\sum D_a(x)}{D_a(x)} + \frac{\sum v^x l_i(x)}{D_a(x)} \right\}.$$

Der Bruch linkerseits des Gleichheitszeichens ist bekanntlich der Ausdruck für den Barwert der Leibrente eines x-jährigen Mannes $[\mathfrak{a}(x)]$, das erste Glied in der Klammer rechterseits der Ausdruck für den Barwert der Aktivitätsrente eines x-jährigen Aktiven $[\mathfrak{a}_a(x)]$. Man kann also statt (1) auch schreiben

$$(2) \qquad \mathfrak{a}(x) = \frac{l_a(x)}{l(x)} \left\{ \mathfrak{a}_a(x) + \frac{\sum v^x l_i(x)}{D_a(x)} \right\},$$

indem identisch $D_a(x) : D(x) = l_a(x) : l(x)$ ist.

Welche Bedeutung kommt aber dem zweiten Gliede in der Klammer der Formel (2) zu? Um dies beantworten zu können, wolle man dasselbe vermöge an der Hand liegenden Beziehungen transformieren.

Zwischen den Zahlen $l_i(x)$, $i(x)$ und $q(x)$ besteht bekanntlich die Relation

$$(3) \quad l_i(x+k+1) = l_i(x+k)\{1-q(x+k)\} + i(x+k),$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Durch sukzessive Anwendung dieser Formel erhält man, $k = 0, 1, 2, \ldots$ setzend, die Beziehungen

$$(3') \qquad l_i(x+1) = l_i(x)\{1-q(x)\} + i(x)$$

$$l_i(x+2) = l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\} + i(x)\{1-q(x+1)\} + i(x+1)$$

$$l_i(x+3) = l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\} + i(x)\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\} + i(x+1)\{1-q(x+2)\} + i(x+2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_i(x+k+1) = l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}\ldots\{1-q(x+k)\} + i(x)\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\}\ldots\{1-q(x+k)\} + \ldots + i(x+k-1)\{1-q(x+k)\} + i(x+k).$$

Ersetzt man in der Summe $\sum v^x l_i(x)$ die Werte $l_i(x+1)$, $l_i(x+2), \ldots$ durch die eben abgeleiteten Ausdrücke und behält die Ordnung nach steigenden Potenzen von v, so erhält man die Reihe

$$\frac{\sum v^x l_i(x)}{v^x} = l_i(x)$$

$$+ v \left[l_i(x)\{1-q(x)\} + i(x) \right]$$

$$+ v^2 \left[l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\} + i(x)\{1-q(x+1)\} + i(x+1) \right]$$

$$+ v^3 \left[l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\} + i(x)\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\} + i(x+1)\{1-q(x+2)\} + i(x+2) \right]$$

$$+ v^4 \left[l_i(x)\{1-q(x)\}\ldots\{1-q(x+3)\} + i(x)\{1-q(x+1)\}\ldots\{1-q(x+3)\} + i(x+1)\{1-q(x+2)\}\{1-q(x+3)\} + i(x+2)\{1-q(x+3)\} + i(x+3) \right]$$

$$+ v^5 \left[\ldots \right] + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Summe rechterseits des Gleichheitszeichens lässt sich aber auch nach steigenden Werten des Argumentes x der Zeichen $i(x)$ ordnen, und zwar folgendermassen:

$$l_i(x)\left[1 + v\{1-q(x)\} + v^2\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\} + \ldots + v^{\omega-x}\{1-q(x)\}\ldots\{1-q(\omega-1)\}\right]$$

$$+ i(x)\,v\left[1 + v\{1-q(x+1)\} + v^2\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\} + \ldots + v^{\omega-x}\{1-q(x+1)\}\ldots\{1-q(\omega-1)\}\right]$$

$$+ i(x+1)\, v^2 \Big[1 + v\{1-q(x+2)\} + v^2\{1-q(x+2)\}\{1-q(x+3)\} + \ldots + v^{\omega-x}\{1-q(x+2)\}\ldots\{1-q(\omega-1)\}\Big] + \ldots + i(\omega-1)\, v^{\omega-x},$$

was man kürzer auch schreiben kann

$$(4)\quad l_i(x)\Big[1 + v\{1-q(x)\} + v^2\{\ldots\}\{\ldots\} + \ldots\Big] + \sum_{k=0}^{\omega-x-1} i(x+k)\, v^{k+1}\Big[1 + v\{1-q(x+k+1)\} + v^2\{1-q(x+k+1)\}\{1-q(x+k+2)\} + \ldots\Big]$$

Die Wahrscheinlichkeit $q(x)$ ist *per definitionem* gegeben durch das Verhältnis

$$q(x) = \frac{l_u(x) - l_u(x+1)}{l_u(x)};$$

hieraus folgt allgemeiner

$$q(x+k) = \frac{l_u(x+k) - l_u(x+k+1)}{l_u(x+k)},$$

und

$$1 - q(x+k) = \frac{l_u(x+k+1)}{l_u(x+k)} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Die eben abgeleitete Formel ergibt sukzessive die Beziehungen

$$1-q(x+k+1) = \frac{l_u(x+k+2)}{l_u(x+k+1)},$$

$$1-q(x+k+2) = \frac{l_u(x+k+3)}{l_u(x+k+2)},$$

$$1-q(x+k+3) = \frac{l_u(x+k+4)}{l_u(x+k+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und es ist demzufolge

$$\{1-q(x+k+1)\}\{1-q(x+k+2)\} = \frac{l_u(x+k+3)}{l_u(x+k+1)}$$

$$\{1-q(x+k+1)\}\{1-q(x+k+2)\}\{1-q(x+k+3)\} = \frac{l_u(x+k+4)}{l_u(x+k+1)}$$

$$\{1-q(x+k+1)\}\ldots\{1-q(x+k+4)\} = \frac{l_u(x+k+5)}{l_u(x+k+1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man diese Brüche für die Produkte in den Ausdruck (4) ein, so erhält die erste Klammer desselben den Wert

$$1 + v\frac{l_u(x+1)}{l_u(x)} + v^2\frac{l_u(x+2)}{l_u(x)} + v^3\frac{l_u(x+3)}{l_u(x)} + \ldots,$$

d. h.

$$\frac{1}{l_u(x)}\Big\{l_u(x) + v\, l_u(x+1) + v^2 l_u(x+2) + \ldots + v^{\omega-x} l_u(\omega)\Big\},$$

oder, indem man den Zähler und den Nenner mit v^x multipliziert,

$$\frac{\Sigma\, v^x l_u(x)}{v^x l_u(x)} = \frac{\Sigma\, D_u(x)}{D_u(x)} = \mathfrak{a}_u(x),$$

und die zweite Klammer übergeht in die Summe

$$1 + v\frac{l_u(x+k+2)}{l_u(x+k+1)} + v^2\frac{l_u(x+k+3)}{l_u(x+k+1)} + v^3\frac{l_u(x+k+4)}{l_u(x+k+1)} + \ldots = \frac{1}{l_u(x+k+1)}\sum_{n=1}^{-x-k} v^n l_u(x+k+n),$$

oder, indem man den Zähler als auch den Nenner mit v^{x+k+1} multipliziert

$$= \frac{\Sigma\, l_u(x+k+1)}{l_u(x+k+1)} = \mathfrak{a}_u(x+k+1). \qquad (5)$$

Die letzten Resultate zusammenfassend, erhält man die Beziehung

$$\frac{\Sigma\, v^x l_i(x)}{v^x} = l_i(x)\,\mathfrak{a}_u(x) + \sum_{k=0} i(x+k)\, v^{k+1}\mathfrak{a}_u(x+k+1),$$

d. h.

$$\Sigma v^x l_i(x) = v^x l_i(x)\,\mathfrak{a}_u(x) + \Sigma\, i(x)\, v^{x+1}\mathfrak{a}_u(x+1).$$

Dividiert man nun noch diese Gleichung beiderseits durch $D_a(x)$, so erhält man die Relation

$$\frac{\Sigma\, v^x l_i(x)}{D_a(x)} = \frac{v^x}{D_a(x)}\, l_i(x)\,\mathfrak{a}_u(x) + \frac{1}{D_a(x)} \cdot \Sigma\, i(x)\, v^{x+1}\,\mathfrak{a}_u(x+1),$$

wobei das zweite Glied rechterseits des Gleichheitszeichens bekanntlich den Wert der Anwartschaft auf Invalidenpension von jährlich 1 eines x-jährigen Aktiven angibt. Somit wird schliesslich

$$\frac{\Sigma\, v^x l_i(x)}{D_a(x)} = \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\,\mathfrak{a}_u(x) + \mathfrak{a}_i(x)$$

und zufolge (2)

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{l_a(x)}{l(x)}\{\mathfrak{a}_a(x) + \mathfrak{a}_i(x)\} + \frac{l_i(x)}{l(x)}\,\mathfrak{a}_u(x). \qquad (6)$$

Dies ist die fundamentale Beziehung zwischen den Barwerten der Leibrente, Aktivitätsrente, Invaliditätsrente und der Anwartschaft auf Invalidenpension.

Aus der Formel (6) lässt sich der Barwert der Anwartschaft auf Invalidenpension ohne weiteres berechnen; es wird

$$l(x)\,\mathfrak{a}(x) = l_a(x)\,\mathfrak{a}_a(x) + l_a(x)\,\mathfrak{a}_i(x) + l_i(x)\,\mathfrak{a}_u(x), \qquad (7)$$

woraus sich, zufolge der Relation $l(x) = l_a(x) + l_i(x)$, die Gleichung

$$\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}(x) - \mathfrak{a}_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{\mathfrak{a}(x) - \mathfrak{a}_u(x)\} \qquad (8)$$

ergibt.

Die „praktische" Formel

$$\mathfrak{a}_i(x) = \mathfrak{a}(x) - \mathfrak{a}_a(x)$$

ist daher mathematisch sicher nicht korrekt und wäre zu tatsächlichen Berechnungen von Tafeln für Versicherungsanstalten nur dann verwendbar, wenn der Rest

(9) $$\frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{a(x)-a_u(x)\},$$

absolut genommen, für jedes x so klein wäre, dass er vernachlässigt werden dürfte.

Die Formel (8) kann man auch auf logische Art einfach ableiten. Damit $l(x)$ Menschen eine Rente von jährlich 1 ihr Leben lang beziehen, hat man entweder denselben die Lebensrente zu sichern, oder den $l_a(x)$ Aktiven unter ihnen die Aktivitätsrente und zugleich die Anwartschaft auf Invalidenpension und den $l_i(x)$ Invaliden die Invaliditätsrente zu erkaufen. Der Barwert der ersteren Leistung ist

$$l(x)\,a(x),$$

der Wert der zweiten ist

$$l_a(x)\,a_a(x)+l_a(x)\,a_i(x)+l_i(x)\,a_u(x);$$

indem man in beiden Fällen dasselbe leistet, so kann man setzen

$$l(x)\,a(x)=l_a(x)\,a_a(x)+l_a(x)\,a_i(x)+l_i(x)\,a_u(x).$$

Dies ist aber eben die oben strikt mathematisch abgeleitete Formel (7).

Der Fehler, den man begeht, indem man die Formel

(10) $$a(x)=a_a(x)+a_i(x)$$

ansetzt, besteht offenbar darin, dass man so argumentiert: Wenn ich mich auf eine Aktivitätsrente von jährlich 1 versichere und noch die Anwartschaft auf Invalidenpension von jährlich 1 bezahle, so beziehe ich mein Leben lang die jährliche Rente 1. Wenn ich den Betrag $a(x)$ oder $a_a(x)+a_i(x)$ bezahle, erziele ich beidesmal denselben Effekt: die Lebensrente. Also ist

$$a(x)=a_a(x)+a_i(x).$$

Dies ist aber nicht der Fall; es kann zwar $a(x)$ aus naheliegenden Gründen nicht grösser sein als die Summe von $a_a(x)$ und $a_i(x)$, die Leibrente könnte jedoch kleiner sein als diese Summe. Und dies findet, wie man gesehen hat, auch wirklich statt.

Um nun zu entscheiden, ob die Differenz zwischen dem korrekten Werte der Anwartschaft $a_i(x)$ und dem aus der „praktischen“ Formel berechneten, d. h. das Restglied (9) so klein ist, dass es einfach vernachlässigt werden dürfte, muss man sich den Sachverhalt an wirklichen Beispielen klarlegen. Dabei hat man entweder die direkte Berechnung der Werte von (9) durchzuführen, oder man kann sich darüber auch so klar werden, dass man die aus der Formel

$$a_i(x)=\frac{1}{D_a(x)}\sum i(x)\,v^{x+1}\,a_u(x+1) \qquad (11)$$

berechneten Werte der Anwartschaft $a_i(x)$ mit den durch die Formel (10) gegebenen Werten von $a_i(x)$ vergleicht und deren Differenzen bildet.

In der Tafel I befinden sich in der ersten Spalte die Werte von $a_i(x)$, berechnet nach der Formel (11) bei Zugrundelegung der Brune-Fischerschen Sterbetafeln [1]), in der zweiten die Werte von $a_i(x)$ berechnet aus der Formel (10) und in der dritten die Differenzen zwischen diesen zwei Resultaten, und zwar für x=25—35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 und berechnet für Renten von jährlich 100.

Der Unterschied beträgt somit bei

$x=25$ bereits 21 Fr. 20 Ct.
$x=40$ schon 110 Fr. 10 Ct.
$x=60$ sogar 293 Fr. 40 Ct.

zu ungunsten der Versicherungskasse bei einer Versicherung auf 1000 Fr. jährlicher Invalidenpension eines derzeit Aktiven — welcher Betrag wohl ein Existenzminimum darstellt — wenn man die Anwartschaft $a_i(x)$ nach der Formel (10) berechnen wollte.

Nachdem man sich an diesem Beispiel über die approximative Grösse des Restes (9) halbwegs orientiert hat, sollen nun im zweiten Beispiel die Werte von

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{a(x)-a_u(x)\}$$

direkt berechnet werden.

Den Ausführungen seien die Sterbetafeln von E. Zimmermann zu Grunde gelegt, und es handle sich speziell um das Nichtzugspersonal der Eisenbahnen (also $l(21)=99\,072$, $l(22)=98\,188$, u. s. w.). In der Tafel II befinden sich in der ersten Spalte die Differenzen $a(x)-a_a(x)$, also die vermeintlichen Werte der Anwartschaft auf Invalidenpension von jährlich 100, berechnet nach der Formel (10), in der zweiten dieselben Barwerte, berechnet aber nach der strikten Formel (11), in der dritten die Differenzen dieser beiden Wertereihen, also die wahrscheinlichen Werte des Restes (9), in der vierten die zur Bildung von (9) nötigen Differenzen $a(x)-a_u(x)$ und in der fünften die nach der Formel (9) direkt berechneten Werte des gesuchten Restgliedes. Wenn man nun die Spalten (3) und (5) vergleicht, so findet man, dass die darin enthaltenen Zahlen fast identisch sind; der kleine Unterschied, der dabei vorkommt, stammt offenbar davon, dass man bei der wirklichen Berechnung von $a_i(x)$ als Summe von Summen nach (11) die erhaltenen Zahlen ungleich oft approximiert hat, als es bei der Ausführung der Berechnung des Restes (9) geschah. Der genauere Wert von $a_i(x)$ ist mit grosser Wahrscheinlichkeit der nach der Formel (9) berechnete, d. h. die Summe der Spalten (1) und (5). Dies beweist der Umstand, dass $a_i(20)$ identisch sein soll mit $a(20)-a_a(20)$,

[1]) Entnommen dem Werke „Der Pensionsfond“ von F. Falkowicz, Prag 1892.

was eben auch die Spalten (1) + (5) beweisen, dagegen aber $(1)_{20} = (2)_{20} + 0.03$ ist, welcher kleine Unterschied (0.03) eben durch die fortwährende Approximation zu siebenstelligen Zahlen bei der Berechnung von (2) entstanden sein mag, und welcher als Fehlbetrag auch in den Zeilen $x = 21, 22, 23, \ldots$ zu merken ist.

In graphischer Darstellung findet man die Werte des Restgliedes in der beigefügten Figur 1. Es ist dies das graphische Bild sowohl der Spalte (5) als auch (2). Denn der Unterschied zwischen beiden ist so klein, dass die den Spalten (2) und (5) entsprechenden Idealkurven, die man sich ohne Breite zu denken hat, eben in die Breite des gezeichneten Streifens selbst hineinfallen. Man sieht hieraus, dass man die Formel (6) nicht nur zur genauen Kontrolle der Werte der Misen $\mathfrak{a}_i(x)$ gebrauchen kann, sondern auch zu deren präziser Berechnung. Vor allem geht aber daraus klar hervor, dass die Formel (10) auch vom praktischen Standpunkte aus nicht haltbar ist; denn bei einer Versicherung eines Aktiven auf 1000 Fr. jährlicher Invalidenpension würde die Versicherungskasse jedesmal um einen ansehnlichen Betrag weniger einnehmen, als wirklich erforderlich ist, und die Tafel zeigt, dass diese Fehlbeträge beständig mit dem Alter des zu versichernden Aktiven wachsen, so dass z. B. bei einem fünfzigjährigen Manne das Minus bereits 198 Fr. 60 Ct. (d. i. $5^2/_5$ % des korrekten Nettopreises), bei einem siebzigjährigen sogar 438 Fr. 10 Ct. (d. i. $11^1/_2$ % des korrekten Nettopreises) ausmacht (siehe auch Figur 2). Dies scheinen aber jedenfalls Beträge zu sein, die die Leistungsfähigkeit der Versicherungskassen wesentlich beeinträchtigen könnten.

Ein Vorteil der Formel (8) besteht darin, dass man es zur Berechnung eines bestimmten Barwertes nicht nötig hat, alle vorhergehenden auszurechnen, vom höchsten, in der diesbezüglichen Invaliditätstafel vorkommenden Alter angefangen, wie es eben die Berechnung nach der Formel (11) notwendig macht, sondern nur die zu einem Alter x gehörenden Werte von $\mathfrak{a}(x)$, $\mathfrak{a}_a(x)$, $\mathfrak{a}_u(x)$, $l_a(x)$ und $l_i(x)$ zu kennen; insbesondere also in den Fällen, wo es sich darum handelt, sich an einzelnen Werten darüber zu orientieren, in welchem Verhältnis nach verschiedenen Invaliditätstafeln zu berechnende Anwartschaften zu einander stehen würden. Man kann schliesslich die Werte des Restgliedes (9) dazu benützen, um sich darüber Klarheit zu verschaffen, inwiefern die nach der Formel (11) berechneten Werte approximativ genau sind. Denn die Spannung zwischen diesen Werten und den Werten der Differenz $\mathfrak{a}_i(x) + \mathfrak{a}_a(x) - \mathfrak{a}(x)$, worin der Barwert $\mathfrak{a}_i(x)$ durch die Formel (11) gegeben ist, gibt die engen Grenzen an, innerhalb deren der Wert der Anwartschaft auf Invalidenpension festgelegt werden kann, ohne seinen ursprünglichen Grad von Genauigkeit zu verlieren. Man sieht leicht ein, dass auf diese Art die Genauigkeit der approximativen Berechnung noch erhöht werden könnte.

II. Todesfallversicherung eines Aktiven mit Auszahlung bloss bei vorangegangener Invalidität. Ableitung einer fundamentalen Beziehung zwischen den einmaligen Prämien der Todesfallversicherung.

Es mögen die Bezeichnungen

$$l(x),\ l_a(x),\ l_i(x),\ l_u(x),\ i(x),\ v,\ D(x),\ D_a(x),\ D_u(x),\ q(x)$$

dieselbe Bedeutung haben, wie im ersten Abschnitt, und es sei weiter

$d(x)$ die Anzahl der im x-ten Lebensalter aus den $l(x)$ lebenden Männern überhaupt hervorgehenden Toten, d. h. $d(x) = l(x) - l(x+1)$;

$d_a(x)$ die Anzahl der im x-ten Lebensalter aus den $l_a(x)$ Aktiven hervorgehenden Toten;

$d_i(x)$ die Anzahl der im x-ten Lebensjahre verstorbenen Invaliden, die aus einer Anfangszahl von Aktiven hervorgegangen sind;

$d_u(x)$ die Anzahl der auf Grund der Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden jeweilig am Schlusse des x-ten Lebensjahres verstorbenen invaliden Männer (Sterbetafel der Invaliden), d. h. $d_u(x) = l_u(x) - l_u(x+1)$;

$C(x)$ die diskontierte Zahl der im x-ten Lebensalter verstorbenen Männer überhaupt, d. h. $C(x) = v^x d(x)$;

$C_a(x)$ die diskontierte Zahl der im x-ten Lebensalter verstorbenen Aktiven, d. h. $C_a(x) = v^x d_a(x)$;

$C_i(x)$ die diskontierte Zahl der im x-ten Lebensjahre verstorbenen Invaliden, d. h. $C_i(x) = v^x d_i(x)$;

$C_u(x)$ die diskontierte Zahl der im x-ten Lebensjahre verstorbenen Invaliden der Dekremententafel, d. h. $C_u(x) = v^x d_u(x)$;

$A(x)$ die einmalige Prämie (der Barwert) der Versicherung von 1 eines x-jährigen Menschen auf Todesfall;

$A_a(x)$ die einmalige Prämie der Versicherung von 1 eines x-jährigen Aktiven auf Todesfall;

$A_u(x)$ die einmalige Prämie der Versicherung von 1 eines x-jährigen Invaliden auf Todesfall;

$A_i(x)$ der Barwert der Anwartschaft auf Todesfallversicherung eines derzeit aktiven Mannes, mit Auszahlung bloss nach vorangegangener Invalidität.

Zwischen den Barwerten A, A_a, A_u, A_i soll nun eine einfache Relation, wie es im Abschnitt I zwischen den Werten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{a}_u$, $\mathfrak{a}_i$ geschah, arithmetisch abgeleitet werden.

Wenn die $i(x)$ Invaliden, die jährlich aus der Anzahl $l_a(x)$ der Aktiven hervorgehen, jeder von dem der Invalidisierung nächsten Jahre ab, auf eine Todesfallprämie von 1, deren Barwert mit $A_u(x)$ bezeichnet wurde und die also *zu Anfang* des x-ten Jahres im Ablebensfalle bereits fällig ist, versichert sein wollen, so hat offenbar der Versicherungsfond folgende Barzahlungen zu leisten:

zu Ende des Invalidisierungsjahres x den Betrag
$$i(x)\,A_u(x+1)$$
zu Ende des 2. Jahres, des $x+1$-ten, den Betrag
$$i(x+1)\,A_u(x+2)$$
zu Ende des 3. Jahres, des $x+2$-ten, den Betrag
$$i(x+2)\,A_u(x+3)$$
. . . . . .
zu Ende des n-ten Jahres, des $x+n-1$-ten, den Betrag
$$i(x+n-1)\,A_u(x+n).$$

Die Summe der Werte dieser im 1., 2., 3., ... n-ten Jahre zu leistenden Zahlungen, auf die Gegenwart diskontiert, ist durch den Ausdruck
$$\sum_{k=0} i(x+k)\,v^{k+1}\,A_u(x+k+1)$$
gegeben. Wenn nun alle Aktiven vom Alter x die Anwartschaft auf eine solche einmalige Todesfallprämie, deren Wert mit $A_i(x)$ bezeichnet wurde, erwerben wollen, so haben sie einen Betrag zu erlegen, welcher dem eben berechneten Wert aller zukünftigen, von der Versicherungskasse zu leistenden Prämienzahlungen gleichkommen muss. Es ist also
$$l_a(x)\,A_i(x) = \sum_k i(x+k)\,v^{k+1}\,A_u(x+k+1)$$
oder, wenn man beiderseits mit v^x multipliziert und dann durch $D_a(x)$ dividiert,
$$A_i(x) = \frac{1}{D_a(x)} \sum i(x)\,v^{x+1}\,A_u(x+1).$$
Diese Formel stellt ein vollständiges Analogon der Formel (11) im I. Abschnitte dar. $A_i(x)$ ist also der Barwert der Anwartschaft auf Todesfallprämie eines Aktiven mit Auszahlung *bloss* nach vorangegangener Invalidität, und zwar eine solche Prämie, die bereits zu Anfang des dem Invalidisierungsjahre folgenden Jahre fällig ist und im Falle des Ablebens des Versicherten unverzüglich zur Auszahlung gelangt.

Die Anzahl der im x-ten Lebensalter Verstorbenen besteht aus der Anzahl der als aktiv und der Anzahl der als invalid Gestorbenen, d. i.
$$d(x) = d_a(x) + d_i(x).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit v^x, so erhält man die Beziehung
$$C(x) = C_a(x) + C_i(x),$$
und, indem man von einem Anfangswert x bis zum höchsten vorkommenden Alter summiert, die Relation
$$\Sigma\, C(x) = \Sigma\, C_a(x) + \Sigma\, C_i(x),$$
aus welcher weiter nach Division durch $D(x)$ resp. $D_a(x)$ und Multiplikation mit $D_a(x)$ die Formel
$$\frac{\Sigma\, C(x)}{D(x)} = \frac{D_a(x)}{D(x)} \left\{\frac{\Sigma\, C_a(x)}{D_a(x)} + \frac{\Sigma\, C_i(x)}{D_a(x)}\right\} \qquad (12)$$
folgt. Die linke Seite dieser Gleichung ist bekanntlich der Ausdruck für den Wert der Versicherung 1 eines x-jährigen Menschen auf Todesfall, das erste Glied in der Klammer rechterseits die einmalige Prämie der Versicherung 1 eines derzeit Aktiven auf Todesfall. Demzufolge erhält die Relation (12) die Form
$$A(x) = \frac{l_a(x)}{l(x)} \left\{A_a(x) + \frac{\Sigma\, C_i(x)}{D_a(x)}\right\}. \qquad (13)$$

Es handelt sich wieder darum, die Bedeutung des zweiten Gliedes der Klammer kennen zu lernen. Hierzu sind vorerst einige Beziehungen zu verifizieren.

Von den $l_a(x)$ Aktiven gehen $i(x)$ Personen, die das ganze x-te Lebensalter durchleben, als invalid hervor, $d_a(x)$ sterben während ihrer Aktivität; sind nun im nächsten Jahre bloss $l_a(x+1)$ aktiv, so ist offenbar
$$l_a(x+1) = l_a(x) - i(x) - d_a(x),$$
also
$$d_a(x) = l_a(x) - \left\{l_a(x+1) + i(x)\right\}.$$

Nun ist aber
$$l(x) - l(x+1) = d_x = l_a(x) - l_a(x+1) + l_i(x) - l_i(x+1)$$
$$= d_a(x) + l_i(x) - l_i(x+1) + i(x)$$
und vermöge der Gleichung (3')
$$= d_a(x) + l_i(x)\,q(x) = d_a(x) + d_i(x).$$
Folglich ist notwendigerweise identisch zu setzen
$$d_i(x) = l_i(x)\,q(x).$$
Mittelst der Substitution $x+k$ für x erhält man die allgemeinere Beziehung
$$d_i(x+k) = l_i(x+k)\,q(x+k) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots,$$
und aus dieser und der Gleichung (3') durch sukzessive Anwendnng für $k = 0$, resp. 1, 2, 3, ... die Relationen
$$d_i(x+1) = l_i\left\{1 - q(x)\right\} q(x+1) + i(x)\,q(x+1)$$
$$d_i(x+2) = l_i(x)\left\{1 - q(x)\right\}\left\{1 - q(x+1)\right\} q(x+2) +$$
$$+ i(x)\left\{1 - q(x+1)\right\} q(x+2) + i(x+1)\,q(x+2)$$

$$d_i(x+3)=l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\}$$
$$q(x+3)+i(x)\{1-q(x+1)\}\{1-q(x+2)\}q(x+3)$$
$$+i(x+1)\{1-q(x+2)\}q(x+3)+i(x+2)q(x+3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_i(x+k+1)=l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}\ldots\{1$$
$$-q(x+k)\}q(x+k+1)+i(x)\{1-q(x+1)\}\ldots\{1$$
$$-q(x+k)q(x+k+1)+\ldots+i(x+k-1)\{1$$
$$-q(x+k)\}q(x+k+1)+i(x+k)q(x+k+1).$$

Die Summe $\frac{1}{v^x}\Sigma d_i(x)$ besteht aus den Gliedern $d_i(x)+v\,d_i(x+1)+v^2 d_i(x+2)+v^3 d_i(x+3)+\ldots$; führt man in diese Reihe die eben abgeleiteten Werte für $d_i(x)$, $d_i(x+1)$, $d_i(x+2)$, ... ein, so erhält man den Ausdruck

$$l_i(x)q(x)+v\left[l_i(x)\{1-q(x)\}q(x+1)+i(x)q(x+1)\right]$$
$$+v^2\left[l_i(x)\{1-q(x)\}\{1-q(x+1)\}q(x+2)+i(x)\{1\right.$$
$$\left.-q(x+1)\}q(x+2)+i(x+1)q(x+2)\right]$$
$$+v^3\left[l_i(x)\{1-q(x)\}\ldots\{1-q(x+2)\}q(x+3)+i(x)\{1\right.$$
$$-q(x+1)\}\ldots q(x+3)+i(x+1)\{1-q(x+2)\}$$
$$\left.q(x+3)+i(x+2)q(x+3)\right]$$
$$+v^4\left[l_i(x)\{1-q(x)\}\ldots\{1-q(x+3)\}q(x+4)+\ldots\right.$$
$$\left.+i(x+3)q(x+4)\right]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder kürzer geschrieben

$$(14)\quad l_i(x)\left[q(x)+v\{1-q(x)\}q(x+1)+\ldots\right]$$
$$+\sum_{k=0}i(x+k)v^{k+1}\left[q(x+k+1)+v\{1-q(x+k+1)\}\right.$$
$$q(x+k+2)+v^2\{1-q(x+k+1)\}\{1-q(x+k+2)\}$$
$$\left.\cdot q(x+k+3)+\ldots\right]$$

Die Sterbenswahrscheinlichkeit $q(x)$ ist bekanntlich gleich dem Bruche

$$q(x)=\frac{l_u(x)-l_u(x+1)}{l_u(x)}=\frac{d_u(x)}{l_u(x)}$$

Des weitern ist, wie im ersten Abschnitt,

$$1-q(x+k)=\frac{l_u(x+k+1)}{l_u(x+k)}$$

für $k=0, 1, 2, \ldots$, so dass man hat

$$\frac{\Sigma d_i(x)}{v^x}=l_i(x)\left[\frac{d_u(x)}{l_u(x)}+v\frac{l_u(x+1)}{l_u(x)}\cdot\frac{d_u(x+1)}{l_u(x+1)}+\right.$$
$$\left.+v^2\frac{l_u(x+1)\,l_u(x+2)\,d_u(x+2)}{l_u(x)\,l_u(x+1)\,l_u(x+2)}+\ldots\right]$$
$$+\sum_{k=0}i(x+k)\,v^{k+1}\left[\frac{d_u(x+k+1)}{l_u(x+k+1)}+v\frac{l_u(x+k+2)\,d_u(x+k+2)}{l_u(x+k+1)\,l_u(x+k+2)}\right.$$
$$\left.+v^2\frac{l_u(x+k+2)\,l_u(x+k+3)\,d_u(x+k+3)}{l_u(x+k+1)\,l_u(x+k+2)\,l_u(x+k+3)}+\ldots\right]$$
$$=\frac{l_i(x)}{l_u(x)}\left[d_u(x)+v\,d_u(x+1)+v^2 d_u(x+2)+\ldots\right]$$
$$+\sum_{k=0}i(x+k)\,v^{k+1}\frac{1}{l_u(x+k+1)}\{d_u(x+k+1)+$$
$$+d_u(x+k+2)+d_u(x+k+3)+\ldots\}$$
$$=l_i(x)\frac{\Sigma v^x d_u(x)}{v^x l_u(x)}+\Sigma\left[i(x+k)\,v^{k+1}\cdot\frac{\Sigma v^x d_u(x+k+1)}{v^x l_u(x+k+1)}\right]$$
$$=l_i(x)\frac{\Sigma C_u(x)}{D_u(x)}+\Sigma\left[i(x+k)\,v^{x+1}\cdot\frac{\Sigma C_u(x+k+1)}{D_u(x+k+1)}\right].\quad(15)$$

Da nun

$$\frac{\Sigma C_u(x)}{D_u(x)}=A_u(x)$$

ist, so hat man schliesslich die Formel

$$\frac{\Sigma C_i(x)}{D_a(x)}=\frac{v^x}{D_a(x)}l_i(x)A_u(x)+\frac{1}{D_a(x)}\Sigma i(x)v^{x+1}A_u(x+1).$$

Das letzte Glied dieser Gleichung ist, wie oben gezeigt wurde, der Wert der Anwartschaft auf Todesfallversicherung von 1 eines Aktiven nach vorangegangener Invalidität, so dass man auch schreiben kann

$$\frac{\Sigma C_i(x)}{D_a(x)}=\frac{l_i(x)}{l_a(x)}A_u(x)+A_i(x).$$

Die Gleichung (13) erhält alsdann die Form

$$A(x)=\frac{l_a(x)}{l(x)}\{A_a(x)+A_i(x)\}+\frac{l_i(x)}{l(x)}A_u(x)\quad(16)$$

oder

$$l(x)A(x)=l_a(x)\{A_a(x)+A_i(x)\}+l_i(x)A_u(x).\quad(17)$$

Dies ist die gesuchte einfache Beziehung zwischen der einmaligen Prämie auf Todesfallversicherung von 1 eines x-jährigen Menschen, der Todesfallversicherung eines Aktiven, der Anwartschaft auf Todesfallprämie eines derzeit aktiven Mannes mit Auszahlung bloss nach vorangegangener Invalidität und schliesslich der Todesfallversicherung eines Invaliden. Die Formeln (16) und (17) sind analog gebaut, wie die Formeln (6) und (7). Man kann aus (17) den Barwert $A_i(x)$ leicht berechnen, und zwar wird

$$A_i(x)=A(x)-A_a(x)+\frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{A(x)-A_u(x)\},\quad(18)$$

welche Formel selbstverständlich der Formel (8) analog ist. Auch hier tritt ein Rest, nämlich

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{A(x)-A_u(x)\}\quad(19)$$

auf, und man kann sich leicht überzeugen, dass auch dieser Wert nicht vernachlässigt werden darf. Gleichfalls lässt sich die Beziehung (17) auf einfache logische

Art gewinnen; es scheint jedoch überflüssig zu sein, die Ausführungen der Seite 348 noch einmal zu wiederholen [1]).

Die Formel (18) hat ebenfalls jene Vorteile, von denen bei der Betrachtung der Formel (8) eingehend gesprochen wurde. Denn aus den Gleichungen (8) und (18) folgt einerseits

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)} = \frac{a_i(x) - \{a(x) - a_a(x)\}}{a(x) - a_u(x)} = \frac{\text{„Differenz“}}{a(x) - a_u(x)},$$

anderseits

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)} = \frac{A_i(x) - \{A(x) - A_a(x)\}}{A(x) - A_u(x)},$$

[1]) In einem Aufsatze der „Österreichischen Versicherungszeitschrift“ aus dem Jahre 1904 wird auf p. 67 behauptet: „Es ist *hinlänglich bekannt*, dass sich die einmalige Prämie für diese Versicherung (nämlich $a_i(x)$) am einfachsten darstellen lässt durch die Differenz der sofort beginnenden Leibrente und der sofort beginnenden Aktivenrente, also durch — (im Original andere Bezeichnungsweise) — $a_i(x) = a(x) - a_a(x)$. Eine *ebenso einfache Formel* lässt sich auch für die Versicherung eines Aktiven mit Auszahlung im Todesfalle bei vorangegangener Invalidität aufstellen.“ Und nun heisst es weiter: „Wir finden die Formel $A_i(x) = A(x) - A_a(x)$ — (im Original andere Bezeichnungsweise) — durch folgende Betrachtung:

„Ein x-jähriger Aktiver schliesst folgende Versicherungen bei gleichen Auszahlungssummen ab:

1. Eine Versicherung auf den Todesfall, wenn er als Aktiver stirbt;
2. eine Versicherung auf den Todesfall, bei der nur eine Auszahlung erfolgt, wenn er vor seinem Tode bereits Invalide war.

Da nun bei seinem Tode auf jeden Fall das versicherte Kapital zur Auszahlung gelangt, so hätte er einfach eine Versicherung auf den Todesfall, abgesehen von seiner Eigenschaft als Aktiver, abschliessen können. Es *muss daher* die Gleichheit bestehen $A(x) = A_a(x) + A_i(x)$. Es folge nun der *mathematische (!) Beweis* für die *Richtigkeit* dieser Formel.“

Mit der Zeile 30, p. 68 (1. Spalte) beginnt der mathematische Beweis unrichtig zu sein und führt konsequent weiter zu der unrichtigen Schlussformel. Der vorangehende logische Beweis hat diese weite Lücke: „Falls ich sowohl $A_a(x)$ als $A_i(x)$ einzahle, erziele ich *denselben Effekt*, als wenn ich $A(x)$ eingezahlt hätte. Daher muss ....“ Um denselben Effekt zu erzielen, braucht man auf eine Art mehr Geld auszugeben, als auf eine andere. Dies ist auch hier der Fall. In der Versicherungsrechnung, die sich doch auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung stützt, *müssen eben alle möglichen Fälle berücksichtigt werden*. Dies tut die Kœpplersche Formel nicht. Dagegen sind die überhaupt möglichen Fälle in der Formel (17) enthalten. Ein x-jähriger Mann kann hier unter den $l(x)$ oder $l_a(x)$ oder $l_i(x)$ so oft vorkommen, als es verschiedene Fälle gibt, d. h. er kann als Mensch überhaupt, der sich auf $A(x)$ versichert, oder als Aktiver, der sich auf $A_a(x)$, oder als Aktiver, der sich auf $A_i(x)$, oder schliesslich als Invalider, der sich auf $A_u(x)$ versichert, vorkommen — und mehr Fälle gibt es nicht. *Daher* kann man den Ansatz (17) machen; um aber *sicher zu sein*, dass hiermit auch wirklich alles erschöpft worden ist, bedarf es jedoch immer noch eines *strengen* mathematischen Beweises. — Wie überall in der Mathematik, wird es sich auch in der Versicherungsrechnung zeigen, dass *ihre richtigen Formeln im Grunde nur Identitäten sind.*

d. h. $$\frac{\text{Differenz}}{a(x) - a_u(x)} = \frac{A_i(x) - \{A(x) - A_u(x)\}}{A(x) - A_u(x)}$$

Da sich die Differenzen $A(x) - A_u(x)$ entsprechend den Werten $a(x) - a_u(x)$ ändern, so ändert sich mit wachsendem x auch das Restglied

$$\frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{A(x) - A_u(x)\},$$

welches identisch ist mit der Differenz $A_i(x) - \{A(x) - A_a(x)\}$, entsprechend der „Differenz“. Indem nun

$$A_i(x) - \{A(x) - A_a(x)\} = \frac{A(x) - A_u(x)}{a(x) - a_u(x)} \times \text{Differenz}$$

ist, so kann man auch aus dieser letzten Formel den Wert des Restgliedes (19) abschätzen, da hierzu nur noch die Kenntnis von $A(x)$ und $A_u(x)$ notwendig ist; so z. B. in dem zweiten Beispiel des ersten Abschnittes, wo sowohl die „Differenzen“ als auch die Werte $a(x) - a_u(x)$ bereits aus den Tafeln bekannt sind.

Nachträglicher Zusatz.

Von Herrn Universitätsprofessor Ch. Moser, Direktor des eidgenössischen Versicherungsamtes in Bern, bin ich nachträglich freundlich darauf aufmerksam gemacht worden, dass derselbe die Formel (8) bereits in seinem Gutachten „*Untersuchungen und Materialien zur Beurteilung der sechs Entwürfe für eine Hülfskasse des Personals der eidgenössischen Verwaltungen*“ (Bern 1901) benutzt habe. Die Aufstellung derselben geschieht dortselbst *auf logische Art* auf S. 60—61, und enthält noch den Fall der Reaktivierung in sich, welcher in dieser Abhandlung als ausgeschlossen betrachtet wird. So erhielt der Herr Autor die Beziehung

$$a_i(x) = a(x) - a_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}\{a(x) - a_a(x) - a_r(x)\}, \quad (3')$$

wobei $a_r(x)$ — im Original etwas andere Bezeichnungsweise — den Barwert der vorauszahlbaren Jahresrente 1 für einen Invaliden, wenn die Rente während der auf die Reaktivierung folgenden Dauer der Aktivität zu entrichten ist. Nun bemerkt der Herr Verfasser, dass man im allgemeinen, der geringen Wahrscheinlichkeit einer Reaktivierung wegen, $a_r(x) = 0$ setzen dürfe, worauf dann die in diesem Aufsatze mit (8) numerierte Gleichung *als approximative Beziehung* erhalten wird. Demgemäss ist aber dortselbst die Prämie $a_i(x)$ resp. $a_u(x)$ als „Barwert“ der vorauszahlbaren Jahresrente 1 für einen Aktiven resp. Invaliden, wenn die Rente *während der Dauer der Invalidität* zu entrichten ist, definiert. Wenn es nun keine Reaktivierten gibt — und alle bekannten Tafeln sind unter diesem Gesichtspunkte aufgestellt worden —, so geht $a_i(x)$ resp. $a_u(x)$ in den Barwert u. s. w., *wenn die Rente*

von dem auf das Invalidisierungsjahr folgenden Jahre (je zu Beginn des Jahres) *angefangen bis zum Ableben des Versicherten zahlbar ist*, über, wie es eben in diesem Aufsatze [siehe die Formel (3)] vorausgesetzt wurde. Die Beziehung (8) wird dann *keine approximative*, sondern eine reine Gleichung und, wie man sah, im Grunde genommen eine Identität. Der mathematische Beweis der Gleichung (3′) bedarf nur einer kleinen Modifikation in dem hier gegebenen Schlussverfahren (Abschnitt I) für die Beziehung (8), und liegt an der Hand.

Daselbst (S. 61) wird noch bemerkt, dass sich eine ähnliche Relation wie (8) in der Arbeit: „*Über die Höhe der finanziellen Belastung, welche durch die Altersversorgung der eidgenössischen Beamten und Angestellten voraussichtlich hervorrufen wird*", von Dr. G. Schärtlin findet. In dieser Arbeit (Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrg. 25 (1889), p. 273 u. ff.) wird auf S. 285 erklärt: „Da wir erst nach Vollendung der Arbeit *zur Einsicht gelangt sind*, dass zwischen den vier Rentenwerten die Beziehung (5) — eine analoge Gleichung zu (8) — stattfinden muss, haben wir den Wert $a_i(x)$ direkt bestimmt." Eine logische oder mathematische Begründung jener Formel wird aber in der Arbeit überhaupt nicht versucht.

Tafel I.

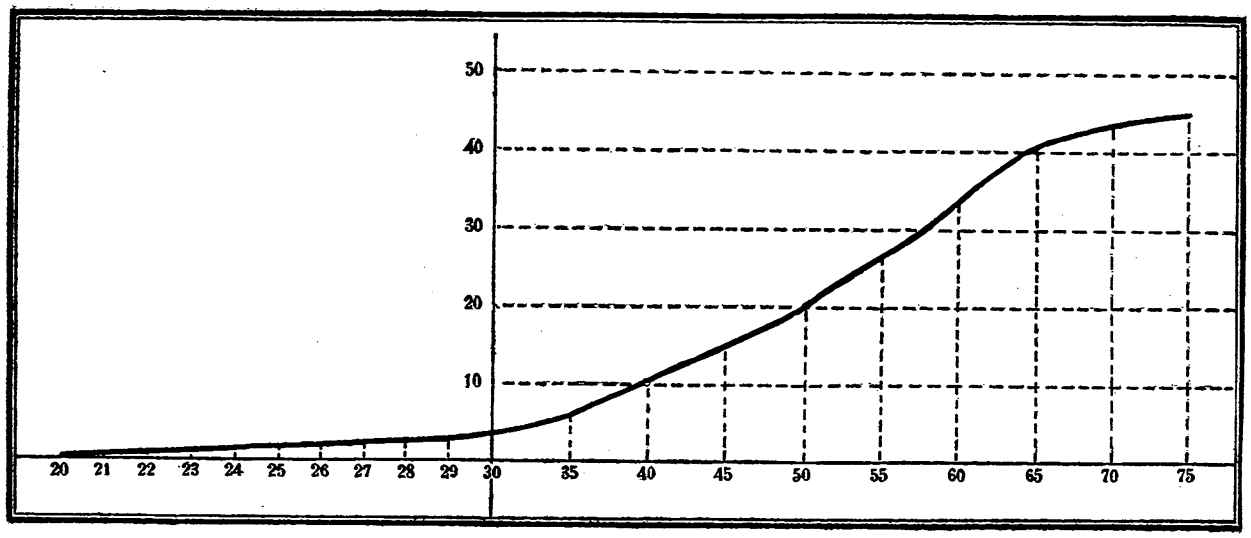
0	1	2	3	0
25	133.16	131.04	2.12	25
26	138.29	136.06	2.23	26
27	143.57	141.17	2.40	27
28	148.98	146.31	2.67	28
29	154.48	151.47	3.01	29
30	160.11	156.67	3.44	30
31	165,85	161.88	3.97	31
32	171.72	167.22	4.50	32
33	177.78	172.66	5.12	33
34	184.02	178.14	5.58	34
35	190.43	183.63	6.80	35
40	224.54	213.53	11.01	40
45	260.10	246.43	13.67	45
50	293.41	275.64	17.77	50
55	317.90	294.738	23.162	55
60	324.95	295.610	29.340	60
65	313.96	292.846	21.114	65

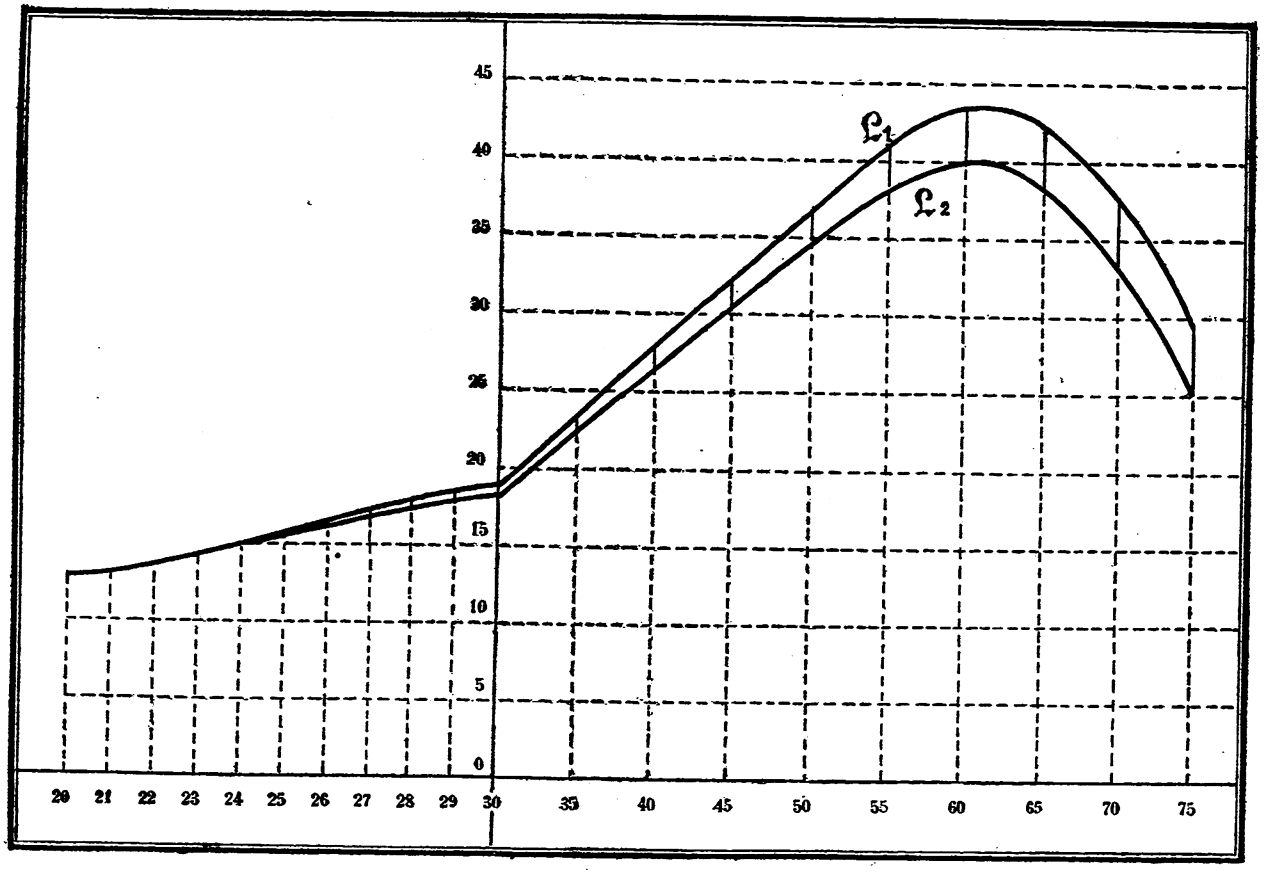
Tafel II.

Alter	$a(x) - a_a(x)$	$a_i(x)$	Differenz	$a(x) - a_u(x)$	Restglied	Alter
0	1	2	3	4	5	0
20	129.50	129.47	— 0.03	1 185.6	0.00	20
21	134.86	135.07	+ 0.21	1 150.3	0.23	21
22	140.35	140.82	0.47	1 116.4	0.49	22
23	145.96	146.71	0.75	1 081.0	0.77	23
24	151.69	152.74	1.05	1 035.5	1.07	24
25	157.53	158.92	1.39	1 010.0	1.41	25
26	163.50	165.26	1.76	975.0	1.77	26
27	169.63	171.75	2.12	940.7	2.15	27
28	175.88	178.42	2.54	907.8	2.56	28
29	182.31	185.28	2.97	876.7	2.99	29
30	188.98	192.36	3.38	847.5	3.41	30
35	224.16	230.53	6.37	705.2	6.41	35
40	262.49	272.96	10.47	542.3	10.53	40
45	304.63	319.36	14.73	386.4	14.83	45
50	347.86	367.61	19.75	260.8	19.86	50
55	381.88	408.32	26.44	162.3	26.44	55
60	397.89	430.93	33.04	91.3	33.00	60
65	381,09	422.33	41.24	46.44	41.17	65
70	335.09	379.16	44.07	18.66	43.81	70
75	249.74	295.05	45.31	6.18	45.07	75

Figur I.

Werte des Restgliedes.



Figur II.

$\mathfrak{L}_1$ = Linie der Barwerte $\mathfrak{a}_i(x)$; $\mathfrak{L}_2$ = Linie der Werte $\mathfrak{a}(x) - \mathfrak{a}_a(x)$.