Werte der einzelnen Leben subtrahiere man den Wert der verbundenen Leben, und der Rest ist der Wert des längsten."

Wir haben es hier mit einer Verbindungsrente bis zum zweiten Tode zu tun; ihr Barwert ist bekanntlich

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

Dieser Ausdruck entspricht genau der Moivreschen Form.

Sind die Leben gleichen Alters, so gibt Moivre den Barwert durch

$$2\,M' - M'',$$

wo M' eine Leibrente, M'' eine Verbindungsrente für zwei Personen gleichen Alters, M''' für drei gleichaltrige Personen bedeutet.

V.

[1]) „Wenn die Werte dreier einzelnen Leben gegeben sind, den Wert der Rente auf das längste von ihnen zu finden.

„*Lösung:* Es seien M, P, Q die Werte der einzelnen Leben, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{PQ}$ die Werte aller Lebensverbindungen zu zweien, $\overline{MPQ}$ der Wert der drei verbundenen Leben, dann ist der Wert einer Rente auf das längste von ihnen

$$M + P + Q - \overline{MP} - \overline{MQ} - \overline{PQ} + \overline{MPQ},$$

in Worten also:

„Man bilde die Summe der drei Leben, subtrahiere von dieser Summe die Summe aller Lebensverbindungen zu zweien, addiere zu dem Rest den Wert der drei verbundenen Leben, so ist das Resultat der Wert des längsten der drei Leben."

[1]) Czuber, pag. 9.

Sind alle Personen gleichaltrig, so wird der Barwert der Rente

$$3\,M' - 3\,M'' + M'''.$$

* * *

Mit diesem Problem schliesst das erste Kapitel, welches die Regeln enthält. Die folgenden Kapitel des ersten Teiles sind überschrieben „Von den Anwartschaften", „Von aufeinanderfolgenden Leben", „Von den Überlebenswahrscheinlichkeiten" und „Von den Lebenserwartungen".

Wenn auch die heutige Versicherungsmathematik neue Wege geschaffen hat, so darf nicht vergessen werden, dass die Moivresche Hypothese, von der ihr Schöpfer wohl bewusst war, dass sie nicht in aller Strenge zu Recht bestehe, doch brauchbare Näherungswerte liefert, sobald die Termine nicht zu weit gehalten werden. Ich schliesse mit den Worten Bailys [1]):

„Price und Morgan haben in der letzten Zeit über diese Hypothese viel geredet und besonders der zweite hat sich bei seinen Bemerkungen über ihre Anwendbarkeit sehr streng gezeigt. Es ist wahr, dass man sich nach neuern Beobachtungen nicht immer auf sie verlassen kann, und die bedeutenden, von diesen beiden Männern zur Bestimmung der Werte der Leibrenten nach genauern Beobachtungen ausgeführten Arbeiten, um dadurch die Anwendung von Hypothesen überflüssig zu machen, können die stolzen und geringschätzenden Bemerkungen derselben über die Moivresche Hypothese einigermassen entschuldigen.

„Aber nichtsdestoweniger wird diese Hypothese in der Theorie der Leibrenten noch häufig gebraucht und *sie wird immer ein Denkmal des Genies ihres berühmten Erfinders bleiben.*"

[1]) Baily, die Theorie der Lebensrenten.

Zur mechanischen Ausgleichung.

Von **Friedrich Zalai.**

Unter den Ausgleichungsmethoden hat sich in der letzten Zeit besonders der mechanischen das wissenschaftliche Interesse zugewendet, wie die zahlreichen auf diesem Gebiete in den letzten Jahren veröffentlichten Arbeiten beweisen.

Das Problem der *mechanischen Ausgleichung* lässt sich im wesentlichen darauf zurückführen, dass eine gegebene Funktion (Z) durch eine andere ebenfalls willkürlich vorgegebene Funktion (Y) dargestellt wird. Im nachfolgenden soll nun auf elementarem Wege gezeigt werden, wie eine gegebene Funktion sich linear homogen und symmetrisch durch eine Reihe von Funktionswerten einer anderen ausdrücken lässt.

§ 1. Von der Funktion $Y_{(x)}$ seien nur die Funktionswerte in den äquidistanten Punkten x, $x + 1$, $x + 2$, ... und $x - 1$, $x - 2$, ... gegeben, und in diesen Punkten sei $Y_{(x)}$ als Funktion vom n-ten Grad des Argumentes entwickelbar:

$$Y_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n \tag{1}$$

worin die Koeffizienten reelle oder komplexe Konstante sein können.

Es sei nun die Funktion Z linear, homogen und symmetrisch in den Funktionswerten von y für die gegebenen Punkte x darzustellen:

$$Z_{(x)} = 2\,A_0\,Y_{(x)} + A_1\,[Y_{(x-1)} + Y_{(x+1)}] + A_2\,[Y_{(x-2)} + Y_{(x+2)}] + \ldots + A_p\,[Y_{(x-p)} + Y_{(x+p)}] \tag{2}$$

Unsere Aufgabe bestehe darin, die Koeffizienten A unter gewissen Bedingungen zu bestimmen.

§ 2. Es bezeichne $\triangle$, $\triangle^2 \ldots \triangle^\varrho$ die erste, zweite .... ϱ-te Differenz einer Reihe in aufsteigender Richtung, und $\triangle_1$, $\triangle_1^2$, $\ldots$ $\triangle_1^\varrho$ entsprechend in fallender Richtung, so dass

$$\begin{aligned}
\triangle\, Y_{(x)} &= Y_{(x+1)} - Y_{(x)}\\
\triangle^2\, Y_{(x)} &= \triangle Y_{(x+1)} - \triangle Y_{(x)}\\
&\vdots\\
\triangle^\varrho Y_{(x)} &= \triangle^{\varrho-1} Y_{(x+1)} - \triangle^{\varrho-1} Y_{(x)}\\
&\text{und}\\
\triangle_1\, Y_{(x)} &= Y_{(x-1)} - Y_{(x)}\\
\triangle_1^2\, Y_{(x)} &= \triangle_1\, Y_{(x-1)} - \triangle_1\, Y_{(x)}\\
&\vdots\\
\triangle_1^\varrho Y_{(x)} &\quad \triangle_1^{\varrho-1} Y_{(x-1)} - \triangle_1^{\varrho-1}\, Y_{(x)}
\end{aligned} \tag{3}$$

§ 3. *Stellung der Aufgabe:* Es sind die Koeffizienten A_0, $A_1 \ldots . A_p$ unter der Bedingung zu bestimmen, dass eine gewisse Anzahl $n - \varrho + 1$ der endlichen Differenzen von $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ von der höchsten Differenz an gezählt identisch für die Werte des Argumentes einander gleich seien, d. h.:

$$\begin{aligned}
\triangle^n \quad Z_{(x)} &= \triangle^n\ Y_{(x)}\\
\triangle^{n-1} Z_{(x)} &= \triangle^{n-1}\, Y_{(x)}\\
&\vdots\\
\triangle^\varrho \quad Z_{(x)} &= \triangle^\varrho\, Y_{(x)}
\end{aligned} \tag{4}$$

Berücksichtigen wir, dass, wenn die ϱ-ten Differenzen der beiden Reihen in allen Werten des Argumentes einander gleich sind, auch alle Differenzen höherer Ordnung einander gleich sein müssen, so reduzieren sich die Bedingungen (4) darauf, dass

$$\triangle^\varrho Z_{(x)} = \triangle^\varrho\, Y_{(x)} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

§ 4. Zur Durchführung unserer Aufgabe benötigen wir einiger Hilfssätze, die wir im folgenden ableiten.

Zunächst müssen wir $\triangle^\varrho x^s$ bestimmen:

$$\triangle^\varrho x^s = (x+\varrho)^s - \binom{\varrho}{1}(x+\overline{\varrho-1})^s + \binom{\varrho}{2}(x+\overline{\varrho-2})^s - \ldots + (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho} x^s \tag{5}$$

oder nach Durchführung der Potenzierungen und Vereinigung der Glieder mit gleicher Potenz in x:

$$\triangle^\varrho x^s = x^s\left[\binom{\varrho}{0} - \binom{\varrho}{1} + \binom{\varrho}{2} - \ldots (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho}\right] + \binom{s}{1} x^{s-1} \left[\binom{\varrho}{0}\varrho - \binom{\varrho}{1}\overline{\varrho-1} + \ldots (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho}\overline{\varrho-\varrho}\right] + \ldots + \binom{s}{s}\left[\binom{\varrho}{0}\varrho^s - \ldots (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho}\overline{\varrho-\varrho}^s\right] \tag{6}$$

Setzt man in Gleichung (5)

$$x = 0,$$

so erhält man

$$\triangle^\varrho\, 0^s = \varrho^s - \binom{\varrho}{1}(\varrho-1)^s + \binom{\varrho}{2}(\varrho-2)^s + \ldots + (-1)^\varrho \binom{\varrho}{\varrho}(\varrho-\varrho)^s \tag{7}$$

$\triangle^\varrho\ 0^s$, die ϱ-te Differenz der s-ten Potenzen der natürlichen Zahlenreihe, die mit 0 beginnt, stellt den Koeffizienten des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung (6) dar.

Unter Benützung des durch Gleichung (7) definierten Symbols nimmt die Gleichung (6) die Form an:

$$\triangle^\varrho x^s = \binom{s}{\varrho} x^{s-\varrho} \triangle^\varrho\, 0^\varrho + \binom{s}{\varrho+1} x^{s-\overline{\varrho+1}} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+1} + \ldots + \binom{s}{s} \triangle^\varrho\, 0^s \tag{8}$$

weil wegen $\triangle^\varrho x^\mu = 0$ für $\mu < \varrho$ alle vorausgehenden Glieder wegfallen.

Ganz analog erhält man:

$$\triangle_1^\varrho\, x^s = (-1)^\varrho \binom{s}{\varrho} x^{s-\varrho} \triangle^\varrho\, 0^\varrho + (-1)^{\varrho+1}\binom{s}{\varrho+1} x^{s-\overline{\varrho+1}} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+1} + \ldots + (-1)^s \binom{s}{s} \triangle^\varrho\, 0^s \tag{8*}$$

§ 5. Entwickelt man jetzt

$$\triangle^\varrho\, Y_{(x)} = a_\varrho \triangle^\varrho x^\varrho + a_{\varrho+1} \triangle^\varrho x^{\varrho+1} + \ldots + a_n \triangle^\varrho x^n$$

und verwendet die Beziehungen (8), so ergibt sich

$$\triangle^\varrho\, Y_{(x)} = \sum^{n-\varrho} \mu\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu} + x \sum_1^{n-\varrho} \mu\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^{n-\varrho} \sum_{n-\varrho}^{n-\varrho} \mu\, a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \tag{9}$$

und analog:

$$\triangle_1^\varrho\, Y_{(x)} = \sum_0^{n-\varrho} \mu\, (-1)^{\varrho+\mu} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu} + x \sum_1^{n-\varrho} \mu\, (-1)^{\varrho+\mu-1} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^{n-\varrho} \sum_{n-\varrho}^{n-\varrho} \mu\, (-1)^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \triangle^\varrho\, 0^{\varrho+\mu-\overline{n-\varrho}} \tag{9*}$$

Der Kürze halber bezeichnen wir mit

B_ϱ^λ die Koeffizienten in der Entwicklung von $\triangle^\varrho Y_{(x)}$

$\mathrm{B}_\varrho^\lambda$ diejenigen in der Entwicklung von $\triangle_1^\varrho Y_{(x)}$

so dass

$$B_\varrho^\lambda = \sum_\lambda^{n-\varrho}{}^\mu a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-\lambda}, \tag{10}$$

$$\mathrm{B}_\varrho^\lambda = \sum_\lambda^{n-\varrho}{}^\mu (-1)^{\varrho+\mu-\lambda} a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-\lambda} \tag{10*}$$

Dadurch werden

$$\triangle^\varrho Y_{(x)} = B_\varrho + B_\varrho^1 x + B_\varrho^2 x^2 + \ldots + B_\varrho^\lambda x^\lambda + \ldots + B_\varrho^{n-\varrho} x^{n-\varrho} \tag{11}$$

$$\triangle_1^\varrho Y_{(x)} = \mathrm{B}_\varrho + \mathrm{B}_\varrho^1 x + \mathrm{B}_\varrho^2 x^2 + \ldots + \mathrm{B}_\varrho^\lambda x^\lambda + \ldots + \mathrm{B}_\varrho^{n-\varrho} x^{n-\varrho} \tag{11*}$$

und die Summen der Differenzen gleicher Ordnung

$$\begin{aligned}\triangle^\varrho Y_{(x)} + \triangle_1^\varrho Y_{(x)} &= (B_\varrho + \mathrm{B}_\varrho) + x(B_\varrho^1 + \mathrm{B}_\varrho^1) + \ldots \\ &+ x^\lambda (B_\varrho^\lambda + \mathrm{B}_\varrho^\lambda) + \ldots + x^{n-\varrho} (B_\varrho^{n-\varrho} + \mathrm{B}_\varrho^{n-\varrho}) \\ &= C^\varrho + C_1^\varrho x + \ldots + C_\lambda^\varrho x^\lambda + \ldots + C_{n-\varrho}^\varrho x^{n-\varrho}\end{aligned} \tag{12}$$

worin

$$C_\lambda^\varrho = B_\varrho^\lambda + \mathrm{B}_\varrho^\lambda = \sum_\lambda^{n-\varrho}{}^\mu a_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-\lambda} [1 + (-1)^{\varrho+\mu-\lambda}].$$

§ 6. Unter Benützung der Identitäten:

$$Y_{(x+\mu)} = Y_{(x)} + \binom{\mu}{1} \triangle Y_{(x)} + \binom{\mu}{2} \triangle^2 Y_{(x)} + \ldots + \binom{\mu}{n} \triangle^n Y_{(x)} \tag{13}$$

$$Y_{(x-\mu)} = Y_{(x)} + \binom{\mu}{1} \triangle_1 Y_{(x)} + \binom{\mu}{2} \triangle_1^2 Y_{(x)} + \ldots + \binom{\mu}{n} \triangle_1^n Y_{(x)} \tag{13*}$$

geht ferner die Gleichung (2) über in

$$Z_{(x)} = 2 Y_{(x)} \sum_0^p{}^\mu A_\mu + (\triangle Y_{(x)} + \triangle_1 Y_{(x)}) \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} + \cdots + (\triangle^p Y_{(x)} + \triangle_1^p Y_{(x)}) \sum_p^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{p} \tag{14}$$

Infolge von (12) wird jetzt (14), wenn wir setzen:

$$2Y_{(x)} = 2[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n] = C_0^0 + C_1^0 x + C_2^0 x^2 + \ldots + C_n^0 x^n,$$

gleich:

$$\begin{aligned}Z_{(x)} &= \sum_0^p{}^\mu A_\mu (C_0^0 + C_1^0 x + \ldots + C_n^0 x^n) + \\ &+ \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} (C_0^1 + C_1^1 x + \ldots + C_{n-1}^1 x^{n-1}) + \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ \sum_p^p{}^\mu A_p \binom{\mu}{p} (C_0^p + C_1^p x + \ldots + C_{n-p}^p x^{n-p}) = \\ &= \sum_0^p{}^\eta C_0^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta} + x \sum_0^p{}^\eta C_1^\eta \sum^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta} + x^2 \sum_0^p{}^\eta C^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta} + \ldots + x^\lambda \sum_0^p{}^\eta C_\lambda^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta} \\ &\ldots + x^{n-p} \sum_0^p{}^\eta C_{n-p}^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta} + \ldots + x^n \sum_0^0{}^\eta C_n^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta}\end{aligned} \tag{15}$$

Dadurch haben wir eine Entwicklung von $Z_{(x)}$ nach Potenzen von x gefunden,

$$Z_{(x)} = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \ldots + D_\lambda x^\lambda + \ldots D_{n-p} x^{n-p} + D_{n-p+1} x^{n-p+1} + \ldots + D_n x^n \tag{16}$$

worin

$$D_\lambda = \sum_0^{p-k}{}^\eta C_\lambda^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta}, \begin{cases} k = 0 \text{ für } \lambda \leqq n-p \\ k = \lambda - n + p \text{ für } \lambda > n-p \end{cases}$$

die der Gestalt nach mit (1) übereinstimmt. Daher hat auch $\triangle^\varrho Z_{(x)}$ dieselbe Gestalt wie $\triangle^\varrho Y_{(x)}$ und wir erhalten jenen Wert, wenn wir in $\triangle^\varrho Y_{(x)}$ die Koeffizienten a_λ durch D_λ ersetzen (siehe Gleichung 9):

$$\begin{aligned}\triangle^\varrho Z_{(x)} &= \sum_0^{n-\varrho}{}^\mu D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu} + x \sum_1^{n-\varrho}{}^\mu D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-1} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-1} + \ldots + x^\lambda \sum_\lambda^{n-\varrho}{}^\mu D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-\lambda} \\ &\triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-\lambda} + \ldots + x^{n-\varrho} \sum_{n-\varrho}^{n-\varrho}{}^\mu D_{\varrho+\mu} \binom{\varrho+\mu}{\varrho+\mu-n-\varrho} \triangle^\varrho 0^{\varrho+\mu-n-\varrho}\end{aligned} \tag{17}$$

$$= \mathfrak{B}_\varrho^0 + \mathfrak{B}_\varrho^1 x + \ldots + \mathfrak{B}_\varrho^\lambda x^\lambda + \ldots + \mathfrak{B}_\varrho^{n-\varrho} x^{n-\varrho} \tag{18}$$

§ 7. Greifen wir nun auf die in § 3 gestellte Aufgabe zurück, so muss die Gleichung (α) für alle Punkte x, $x+1$, $x+2, \ldots x-1$, $x-2, \ldots$ erfüllt sein. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (18) und (11) ergeben sich die $n-\varrho+1$ Bedingungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
B_\varrho^0 &= \mathfrak{B}_\varrho^0 \\
B_\varrho^1 &= \mathfrak{B}_\varrho^1 \\
&\cdots\cdots \\
B_\varrho^\lambda &= \mathfrak{B}_\varrho^\lambda \\
&\cdots\cdots \\
B_\varrho^{n-\varrho} &= \mathfrak{B}_\varrho^{n-\varrho}
\end{aligned} \tag{19}
$$

Führt man die angezeigten Operationen wirklich durch, so liefert dies das Gleichungssystem

$$a_\varrho \binom{\varrho}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + a_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho+1} \triangle^\varrho 0^{\varrho+1} + \cdots + a_n \binom{n}{n} \triangle^\varrho 0^n = D_\varrho \binom{\varrho}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + D_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho+1} \triangle^\varrho 0^{\varrho+1} + \cdots + D_n \binom{n}{n} \triangle^\varrho 0^n$$

$$a_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + \cdots + a_n \binom{n}{n-1} \triangle^\varrho 0^{n-1} = D_{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho + \cdots + D_n \binom{n}{n-1} \triangle^\varrho 0^{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n \binom{n}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho = D_n \binom{n}{\varrho} \triangle^\varrho 0^\varrho \tag{20}$$

und geben wir in diesen Gleichungen der Reihe nach den ϱ die Werte

$$n, n-1, \ldots n-\varrho^1+1$$

so sieht man nach einigen Transformationen, dass

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_n \\
D_{n-1} &= a_{n-1} \\
&\cdots\cdots \\
D_\varrho &= a_\varrho
\end{aligned} \tag{21}
$$

sein muss, wodurch die in § 3 aufgestellte Behauptung ihre algebraische Bestätigung findet, dass die Aufgabe gelöst ist, wenn die $n - \varrho + 1$ Bedingungen (4) erfüllt sind.

§ 8. Nun ist

$$D_n = \sum_0^0{}^\eta\, C_n^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta}$$

oder entwickelt:

$$
\begin{aligned}
D_n &= a_n \binom{n}{0} 0^0 \left[1 + (-1)^0\right] \{A_0 + A_1 + \cdots + A_p\} \\
&= 2a_n (A_0 + A_1 + \cdots + A_p)
\end{aligned} \tag{22}
$$

Da aber auch (Gleichung 21)

$$D_n = a_n$$

so ergibt sich als Bedingungsgleichung dafür, dass die Differenzen n-ter Ordnung gleich sind:

$$2(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_p) = 1 \tag{23}$$

Durch rekursives Verfahren lässt sich für D_{n-1} der Wert

$$D_{n-1} = 2a_{n-1}(A_0 + A_1 + \cdots + A_p) \tag{24}$$

finden, und da auch (Gleichung 21)

$$D_{n-1} = a_{n-1}$$

erhalten wir dieselbe Bedingungsgleichung

$$2(A_0 + A_1 + \cdots + A_p) = 1 \tag{23}$$

§ 9. Allgemein ergibt sich (für $2r < p$ nach § 6)

$$D_{n-2r} = \sum_0^{2r}{}^\eta\, C_{n-2r}^\eta \sum_\eta^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{\eta}$$

und nach einigen Transformationen

$$D_{n-2r} = 2a_{n-2r} \binom{n-2r}{0} \sum_0^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{0} + 2a_{n-2r+2} \binom{n-2r+2}{2} \left[\triangle 0^2 \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} + \triangle^2 0^2 \sum_2^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{2}\right] + \cdots + 2a_n \binom{n}{2r} \left[\triangle 0^{2r} \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} + \cdots + \triangle^{2r} 0^{2r} \sum_{2r}^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{2r}\right] \tag{25}$$

Setzen wir

$$M_{2r}^p = \triangle 0^{2r} \sum_1^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{1} + \triangle^2 0^{2r} \sum_2^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{2} + \cdots + \triangle^{2r} 0^{2r} \sum_{2r}^p{}^\mu A_\mu \binom{\mu}{2r} \tag{26}$$

und berücksichtigen wir, dass

$$\triangle^\varphi 0^{2r} = \varphi^{2r} - \binom{\varphi}{1}(\varphi-1)^{2r} + \binom{\varphi}{2}(\varphi-2)^{2r} - \cdots \pm \binom{\varphi}{\varphi} 0^{2r} \tag{27}$$

so wird nach einigen Umformungen:

$$M_{2r}^p = A_1 + \left[\binom{2}{1} \triangle 0^{2r} + \binom{2}{2} \triangle^2 0^{2r}\right] A_2 + \cdots + \left[\binom{p}{1} \triangle 0^{2r} + \binom{p}{2} \triangle^2 0^{2r} + \cdots + \binom{p}{2r} \triangle^{2r} 0^{2r}\right] A_p \tag{28}$$

und wegen

$$\binom{p}{0} \triangle^0 0^n + \binom{p}{1} \triangle 0^n + \binom{p}{2} \triangle^2 0^n + \cdots + \binom{p}{n} \triangle^p 0^n = p^n \tag{29}$$

ist

$$M_{2r}^p = A_1 + 2^{2r} A_2 + 3^{2r} A_3 + \cdots + p^{2r} A_p \tag{30}$$

Führt man nun (30) in (25) ein, so wird

$$D_{n-2r} = 2a_{n-2r} \binom{n-2r}{0} M_0^p + 2a_{n-2r+2} \binom{n-2r+2}{2} M_2^p + \cdots + 2a_n \binom{n}{2r} M_{2r}^p \tag{31}$$

und da auch

$$D_{n-2r} = a_{n-2r} \tag{32}$$

ist, so gelangt man durch das rekursive Verfahren des § 8 zum Bedingungssystem

$$M_0^p = \frac{1}{2}$$
$$M_2^p = 0 \qquad (33)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_{2r}^p = 0$$

oder wegen (30):

$$\begin{aligned} 2(A_0 + A_1 + \ldots + A_p) &= 1 \\ A_1 + 2^2 A_2 + \ldots + p^2 A_p &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 + 2^{2r} A_2 + \ldots + p^{2r} A_p &= 0 \end{aligned} \qquad (34)$$

Dieses System von $r+1$ Gleichungen mit $p+1$ Unbekannten ist eindeutig lösbar für $p = r$. Ist $p > r$, so gibt es unendlich viele Lösungen, die Aufgabe ist im allgemeinen, wenn nicht noch andere Bedingungen hinzutreten, nicht eindeutig lösbar. Ist endlich $p < r$ so lassen sich beliebige $p+1$ Gleichungen unter den vorliegenden $r+1$ herausgreifen: für diese erhält man eine eindeutige Lösung, die auch für alle übrigen Gleichungen gilt, nur wenn alle Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} A_0 - \frac{1}{2} A_1 & A_2 & \ldots & A_p \\ 0 \quad A_1 & 2^2 A_2 & \ldots & p^2 A_p \\ \cdot \quad \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 \quad A_1 & 2^{2r} A_2 & \ldots & p^{2r} A_p \end{matrix} \right\| \qquad (35)$$

verschwinden. (Spezieller Fall des § 11).

§ 10. Die Gleichungen (34) stellen die Bedingungen dafür dar, dass alle Differenzen von der n-ten bis zur n-$2r$-ten unverändert bleiben, wenn mit Gleichung (1) die durch Gleichung (2) verlangte Transformation vorgenommen wird.

Es soll nun gezeigt werden, dass dieselben Bedingungsgleichungen Geltung behalten, wenn auch noch die n-$2r$-1-ten Differenzen der beiden Funktionen $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ identisch gleich sein sollen.

Es ist

$$D_{n-2r-1} = \sum_0^{2r+1}{}^{\eta}\, C^{\eta}_{n-2r-1} \sum_{\eta}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} = \qquad (36)$$

$$= C^0_{n-2r-1} \sum_0^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{0} + C^1_{n-2r-1} \sum_1^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{1} + \ldots.$$
$$+ C^{2r+1}_{n-2r-1} \sum_{2r+1}^{p}{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{\eta} \qquad (37)$$

$$= 2a_{n-2r-1}\binom{n-2r-1}{0} \sum_0^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{0} + 2a_{n-2r+1}$$
$$\binom{n-2r+1}{2} \triangle 0^2 \sum_1^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{1} + \ldots + 2a_{n-1}\binom{n-1}{2r}$$
$$\triangle 0^{2r} \sum_1^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{1}$$
$$+ 2a_{n-2r+1}\binom{n-2r+1}{2} \triangle^2 0^2 \sum_2^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{2} + \ldots.$$

$$+ 2a_{n-1}\binom{n-1}{2r} \triangle^2 0^{2r} \sum_2^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ 2a_{n-1}\binom{n-1}{2r} \triangle^{2r} 0^{2r} \sum_{2r}^p{}^{\mu} A_\mu \binom{\mu}{2r} \qquad (38)$$

und analog wie in § 9, erhält man

$$D_{n-2r-1} = 2a_{n-2r-1}\binom{n-2r-1}{0} M_0^p + 2a_{n-2r+1}$$
$$\binom{n-2r+1}{2} M_2^p + \ldots + 2a_{n-1}\binom{n-1}{2r} M_{2r}^p \qquad (39)$$

und da

$$D_{n-2r-1} = a_{n-2r-1}$$

sein muss, so ergeben sich wieder die früheren Bedingungsgleichungen (33) und (34), was zu beweisen war.

§ 11. Setzen wir $n - 2r = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, d. h., suchen wir die notwendigen Bedingungen dafür, dass die Differenzen aller Ordnungen der beiden Funktionen $Y_{(x)}$ und $Z_{(x)}$ gleich werden, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 2(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_p) &= 1 \\ A_1 + 2^2 A_2 + \ldots + p^2 A_p &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 + 2^{2k} A_2 + \ldots + p^{2k} A_p &= 0 \end{aligned} \qquad (40^*)$$

worin k die ganze der beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ ist.

Da eine Funktion vom Grade $\begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$ auch $\begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$ Differenzen hat, so zeigt dieses Gleichungssystem, dass sich Funktionen $Y_{(x)}$ beliebiger Ordnung auf die durch Gleichung (2) bedingte Weise reproduzieren lassen.

§ 12. Man kann aber auch $Z_{(x)}$ durch $Y_{(x)}$ und die Ableitungen dieser Funktion darstellen, wenn man die in den vorausgehenden Paragraphen gefundenen Resultate verwertet[1]). Drückt man in (16) die D_λ durch die M_λ^p aus den Gleichungen (31) und (39) aus so ist

---

* Zum selben Gleichungssystem gelangt auch *Landré* in Ehrenzweigs Assekuranz-Jahrbuch XXII. „Ausgleichung mittels der Theorie des Minimums". Den „Versuch einer allgemeinen Theorie der mechanischen Ausgleichungsmethoden" unternimmt *Altenburger* im Februarheft des 3. Bandes der Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten. 1907.

[1]) Dabei ist vorausgesetzt, das $Y_{(x)}$ differenzierbar ist. Doch gilt die Formel auch allgemein, man muss nur unter $Y^{(2r)}(x)$ die entsprechenden Koeffizienten verstehen:

$$(2r)!\left[\binom{n}{2r} a_n x^{n-2r} + \binom{n-1}{2r} a_{n-1} x^{n-2r-1} + \ldots + \binom{2r}{2r} a_{2r}\right]$$

$$Z_{(x)} = 2M_0^p\,[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0]$$
$$+ 2M_2^p \left[\binom{n}{2} a_n x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_{n-1} x^{n-3} + \ldots\right.$$
$$\left. + \binom{n-2r+1}{2} a_{n-2r+2} x^{n-2r} + \ldots + \binom{2}{2} a_2\right] + \ldots$$
$$+ 2M_{2r}^p \left[\binom{n}{2r} a_n x^{n-2r} + \binom{n-1}{2r} a_{n-1} x^{n-2r-1} + \ldots\right.$$
$$\left. + \binom{2r}{2r} a_{2r}\right] + \ldots \tag{41}$$

und daher

$$Z_{(x)} = 2M_0^p\, Y_{(x)} + 2M_2^p \frac{1}{2!} Y_{(x)}^{\mathrm{II}} + 2M_4^p \frac{1}{4!} Y_{(x)}^{\mathrm{IV}} + \ldots$$
$$+ 2M_{2r}^p \frac{1}{(2r)!} Y_{(x)}^{(2r)} + \ldots + 2M_{2t}^p \frac{1}{(2t)!} Y_{(x)}^{(2t)} \tag{42}$$

worin t die ganze der beiden Zahlen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ ist.

Da die Bedingungsgleichungen die Gestalt haben

$$M_0^p = \frac{1}{2} \quad M_2^p = M_4^p = \ldots = M_{2r}^p = 0$$

so ist

$$Z_{(x)} = Y_{(x)} + 2M_{2r+2}^p \frac{1}{(2r+2)!} Y_{(x)}^{(2r+2)} + \ldots + 2M_{2t}^p$$
$$\frac{1}{(2t)!} Y_{(x)}^{(2t)} \tag{43}$$

Diese Gleichung sagt aus, das $Z_{(x)}$ vom selben Grade wie $Y_{(x)}$ ist und dass die Abweichungen sich durch eine parabolische Kurve darstellen lassen, welche vom Grad $n-2r-2$ ist.

Führt man Gleichung (43) mit Hilfe von (30) über in

$$Z_{(x)} = Y_{(x)} + 2\left[A_1 \left\{\frac{Y_{(x)}^{(2r+2)}}{(2r+2)!} + \frac{Y_{(x)}^{(2r+4)}}{(2r+4)!} + \ldots\right.\right.$$
$$\left. + \frac{Y_{(x)}^{(n)}}{n!}\right\} + \ldots + A_p \left\{\frac{p^{2r+2}}{(2r+2)!} Y_{(x)}^{(2r+2)} + \ldots + \frac{p^n}{n!}\right.$$
$$\left.\left. Y_{(x)}^{(n)}\right\}\right] \tag{44}$$

und wenn man mit

$$\Psi_{(x,\,p)}^{(2r+2)} = \frac{p^{2r+2}}{(2r+2)!} Y_{(x)}^{(2r+2)} + \ldots \frac{p^n}{n!} Y_{(x)}^{(n)};\; n = 2k \tag{45}$$

bezeichnet, so vereinfacht sich die Schreibweise von (43) in

$$Z_{(x)} = Y_{(x)} + 2\,[A_1 \Psi_{(x,\,1)}^{(2r+2)} + A_2 \Psi_{(x,\,2)}^{(2r+2)} + \ldots + A_p$$
$$\Psi_{(x,\,p)}^{(2r+2)}] \tag{46}$$

Der Fehler, der durch Einsetzung von $Z_{(x)}$ an Stelle von $Y_{(x)}$ ensteht, ist durch die Differenz

$$|Y_{(x)} - Z_{(x)}| = 2\,[A_1 \Psi_{(x,\,1)}^{(2r+2)} + A_2 \Psi_{(x,\,2)}^{(2r+2)} + \ldots + A_p$$
$$\Psi_{(x,\,p)}^{(2r+2)}] \tag{47}$$

gegeben.

§ 13. Verwendet man die Bezeichungsweise des letzten Paragraphen und nimmt für die Gleichung (43)

$$n = 2r + 2$$

so ist

$$|Y_{(x)} - Z_{(x)}| = 2M_n^p \frac{1}{n!} Y_{(x)}^{(n)} = 2M_n^p \frac{n!}{n!} a_n = 2M_n^p\, a_n \tag{48}$$

d. h.: Wenn man eine Funktion $Y_{(x)}$ vom Grade $2r+2$ in der Weise in eine andere $Z_{(x)}$ überführt, dass die Differenzen bis auf die $2r+2te$ unverändert bleiben, so unterscheiden sich die Werte der neuen Funktion von denen der alten um einen konstanten Wert: d. h. es erfolgt eine parallele Transformation.

Ist

$$n = 2r + 3$$

so ist

$$|Y_{(x)} - Z_{(x)}| = 2M_{n-1}^p \frac{1}{n!} Y_{(x)}^{(n)} = 2M_{n-1}^p \frac{1}{n!} [(n+1)!\, a_{n+1}$$
$$x + n!\, a_n] = 2M_{n-1}^p\, [(n+1)\, a_{n+1}\, x + a_n] \tag{49}$$

Es erfolgt eine parabolische Transformation.

Ist $Y_{(x)}$ als Potenzreihe gegeben, d. h. ist

$$n = \infty,$$
$$Y_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

so erscheint auch $Z_{(x)}$ in dieser Form:

$$Z_{(x)} = 2M_0^p\, Y_{(x)} + 2M_2^p\, Y_{(x)}^{\mathrm{II}} + \ldots + 2M_{2r}^p\, Y_{(x)}^{(2r)} + \ldots \tag{50}$$

§ 14. Man kann die Aufgabe noch dahin erweitern, dass zu den früher aufgestellten Bedingungen die hinzugefügt wird, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird:

$$[(Y - Z)^2] = \text{Minimum}$$

oder

$$\left[4\,[A_1 \Psi_{(x,\,1)}^{(2n+r)} + A_2 \Psi_{(x,\,2)}^{(2n+r)} + \ldots + A_p \Psi_{(x,\,p)}^{(2n+r)}]^2\right]$$
$$= [X^2] = \text{Minimum}. \tag{51}$$

Es ist daher die Aufgabe zu lösen:

$$[X^2] + k_0 N_0^p + k_2 M_2^p + k_4 M_4^p + \ldots + k_{2r} M_{2r}^p$$
$$= \text{Minimum} \tag{52}$$
$$N_0^p = M_0^p - \frac{1}{2}$$

d. h. es muss

$$\frac{d\,[X^2]}{d\,A_0} + k_0 \frac{d\,N_0^p}{d\,A_0} + k_2 \frac{d\,M_2^p}{d\,A_0} + \ldots k_{2r} \frac{d\,M_{2r}^p}{d\,A_0} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{53}$$
$$\frac{d\,[X^2]}{d\,A_p} + k_0 \frac{d\,N_0^p}{d\,A_p} + k_2 \frac{d\,M_2^p}{d\,A_p} + \ldots k_{2r} \frac{d\,M_{2r}^p}{d\,A_p} = 0$$

und nach durchgeführter Differenziation

$$2X\, \Psi_{(x,\,1)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} = 0$$
$$2X\, \Psi_{(x,\,2)}^{(2n+r)} + \frac{k_0}{2} + k_2 + \ldots + k_{2r} = 0$$

$$2X\,\Psi^{(2n+r)}_{(x,\,3)} + \frac{k_0}{2} + k_2\,2^2 + \ldots + k_{2r}\,2^{2r} = 0$$

$$\ldots \qquad (54)$$

$$2X\,\Psi^{(2n+r)}_{(x,\,p)} + \frac{k_0}{2} + k_2\,p^2 + \ldots + k_{2r}\,p^{2r} = 0$$

Diese Gleichungen liefern eine eindeutige Lösung für die Werte der Koeffizienten $A_1 \ldots A_p$, als Funktionen der k, deren Anzahl $r+1$ ist. Führt man diese in Gleichung (52) ein, so erhält man die k Werte, die, in (54) eingeführt, die endgültigen Werte der $A_1 \ldots A_p$ bestimmen.

Diese Aufgabe soll lediglich zeigen, wie die vorliegenden Entwicklungen sich praktisch verwerten lassen. Daher wurde auch der leichteren Durchführbarkeit halber davon abgesehen, für die einzelnen Abweichungen verschiedene Gewichte zu verwenden, was bei einer strengen Durchführung der Aufgabe erforderlich wäre [1]).

§ 15. Die Gleichung (16) zeigt, dass bei Wiederholung des Verfahrens, indem man Z ebenso behandelt wie Y, immer wieder Resultate von der Form der Gleichung (16) erhalten werden, worin die Koeffizienten D^s_λ, nach s-maliger Iteration, analog aufgebaut sind wie die D_λ.

§ 16. In den vorausgehenden Untersuchungen wurden die Voraussetzungen auf ein möglichst geringes Ausmass eingeschränkt. Wesentlich ist nur die Forderung, dass die behandelten Funktionen endliche Differenzen besitzen, d. h. also, dass sie innerhalb des Intervalls keine unendlichen Sprünge machen. Die Behandlung der Aufgabe könnte noch in der Richtung eine Verallgemeinerung erfahren, dass man von der Bedingung der Homogenität, der Symmetrie und der Äquidistanz der gegebenen Funktionswerte absieht, wodurch natürlich die Durchführbarkeit der Aufgabe keinen Abbruch erlitte, wohl aber eine bedeutend höhere Komplikation der Formeln einträte.

---

[1]) Auf die Bedeutung der Gewichte hat insbesondere *Graf* in Heft 1 (1904) der Versicherungswissenschaftlichen Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatversicherungsanstalten unter „Eine vorteilhafte Methode zur Ausgleichung von Sterbe-Beobachtungen nach der Gompertz-Makehamschen Formel" hingewiesen.

Die Verpflichtungen der schweizerischen Lebensversicherungsgesellschaften zur Hinterlage der Prämienreserve im Ausland.

Von Dr. **Hans Kœnig**, Direktionssekretär der schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt in Zürich.

Gegenüber den Lebensversicherungsgesellschaften besteht die vornehmste Pflicht der Staatsaufsicht darin, die Garantien zur Erfüllung der übernommenen Verpflichtungen zu wahren, also vor allem die Deckungskapitalien in ihrem Bestande zu erhalten.

Der Staat kann diese Aufgabe verschiedentlich lösen. Einmal dadurch, dass er die Gesellschaften in ihrer gesamten Geschäftsführung einer intensiven technischen und finanziellen Beaufsichtigung unterstellt, sie aber im übrigen nicht beengt. Es ist dies im allgemeinen das System der schweizerischen Aufsichtsbehörde.

Der Staat kann aber auch neben der Beaufsichtigung noch direkte, reale Sicherstellung der gefährdeten Interessen verlangen. Auf diesem Boden stehen die deutsche, französische und italienische, sowie die im Entwurf liegende österreichische Aufsichtsgesetzgebung.

Uns interessieren hier vorwiegend die gesetzgeberischen Erlasse in *Deutschland* und *Frankreich,* da in diesen beiden Ländern die schweizerischen Gesellschaften zurzeit einer intensivern Staatsaufsicht unterstellt sind. Es werden deshalb eingehender nur die Bestimmungen des deutschen und französischen Aufsichtsgesetzes über die Privatversicherungsgesellschaften erörtert, während die *italienischen* Vorschriften und die Bestimmungen des *österreichischen* Entwurfes nur summarisch berührt werden. Sodann sind hier nur *die Verpflichtungen zur Hinterlage der Prämienreserve, der Umfang dieser Verpflichtungen* und die *Art und Weise der Durchführung, sowie deren Folgen* zu besprechen.

Als *ausser* den Rahmen unserer Betrachtung fallend erachten wir die Frage, in welchen *Werten* (Wertschriften, Hypotheken etc.) die Lebensversicherungsgesellschaften ihre Geldanlagen zu machen haben.