

Les travaux de Léonard Euler concernant l'assurance.

Par L.-Gustave Du Pasquier, Docteur ès sciences, agrégé à l'École polytechnique fédérale.

En ce moment où le monde mathématique tout entier se prépare „à s'acquitter enfin d'une dette qui devrait être payée depuis longtemps“, savoir : à publier une édition complète des œuvres d'Euler, c'est avec un intérêt tout particulier qu'on apprendra ce que le plus grand de tous les mathématiciens suisses a fait spécialement pour l'assurance dont on étend toujours plus les applications et dont l'importance augmente d'année en année. On ignore malheureusement beaucoup trop que, dans ce domaine aussi, les travaux de Léonard Euler firent époque. Il n'est guère un chapitre dans l'histoire du progrès des mathématiques où ce grand nom ne se rencontre; il marque aussi une étape dans les annales de la théorie des hasards. L'influence que ce géomètre à l'esprit universel exerça sur la science actuarielle provient tout d'abord de ceux de ses travaux qui se rapportent spécialement à ce sujet et que nous allons analyser de près; cette influence est due ensuite aux progrès qu'il fit faire au calcul des probabilités; enfin, elle ne réside pas moins dans le développement immense qu'il apporta à l'analyse mathématique tout entière.

Comme preuve de cette influence considérable, je citerai la fameuse „formule sommatoire d'Euler“. On la trouve entre autres dans ses *Institutiones calculi differentialis*, Pars II, cap. V, § 130 (pag. 430). Je la transcris ici sous la forme sous laquelle Euler l'a déduite :

$$Sz = \int z dx + \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} \\ + \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 6} \cdot \frac{d^5 z}{dx^5} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 8} \cdot \frac{d^7 z}{dx^7} \\ + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10} \cdot \frac{d^9 z}{dx^9} - + \dots$$

Elle fut aussi démontrée, indépendamment d'Euler et peu après lui, par le célèbre mathématicien anglais Mac Laurin. Comme exemple d'application de cette formule dans la science actuarielle, je me contenterai de mentionner les rentes payables par versements partiels, m fois par an. (V. „Institute of actuaries' text book, Part II,“ chap. 9 et chap. 24.) Mais il est encore nombre d'autres cas où cette formule sommatoire d'Euler-

Mac Laurin est employée utilement, souvent avec des notations différentes, quelquefois même sous un autre nom. La technique de l'assurance et beaucoup de recherches théoriques s'y rapportant, rendent cette formule indispensable aux actuaires.

Léonard Euler ne fut pas le premier à concevoir la notion de ce que nous appelons aujourd'hui „assurance“. L'idée d'assurer un intérêt pouvant tomber sous le coup d'événements imprévus, l'idée de supprimer ainsi les conséquences d'un malheur ou du moins de les atténuer, cette idée surgit et fut réalisée bien avant Euler. — Comme premier exemple, je citerai l'assurance maritime; des documents permettent d'en affirmer l'existence officielle déjà au 14^me siècle. — Comme deuxième exemple se présente l'assurance contre l'incendie; sa première forme fut sans doute celle de la mutualité; son origine doit être cherchée dans la formation d'associations contre l'incendie appelées „guildes“ dans le nord de l'Europe. Cependant, les secours réciproques que les corps de métiers ou autres corporations si nombreuses du moyen-âge accordaient à leurs compagnons, lorsque ceux-ci étaient frappés par un malheur de quelque nature que ce fût, tel que : incendie, perte de bétail, mort, etc., ne méritaient guère la dénomination d'„assurance“, car c'étaient en quelque sorte des secours spontanés qui n'étaient point mathématiquement calculés, des secours auxquels manquait cette base technique où l'on tient compte exactement de ce que chacune des deux parties donne et reçoit. — Comme troisième exemple, je mentionne les „caisses pour les morts“ ou „fraternités“. Elles fonctionnaient en petit, basées sur le principe de la mutualité : toutes les fois qu'un membre mourait, chacun des autres sociétaires payait une certaine cotisation, fixée d'avance, égale pour tous; la somme d'argent ainsi recueillie était remise à la famille du défunt. Mais toutes les associations reposant sur ces principes n'ont pu vivre que pendant un nombre restreint d'années et ont toujours dû finir par se dissoudre. C'est qu'il leur manque la base technique et mathématique, seule base solide et équitable à la fois. Voilà pourquoi elles ne peuvent pas exister à la longue. — Un quatrième exemple d'institutions rentrant dans le domaine

qui nous occupe et existant déjà avant l'époque d'Euler est fourni par ces associations à héritage mutuel que l'on a souvent appelées „tontines“. Elles doivent ce nom à un médecin napolitain : Lorenzo Tonti, qui vivait sous Louis XIV et que le régime du cardinal Mazarin amena en France vers 1650. La question de savoir si Tonti a le premier imaginé cette forme de rentes viagères n'est pas encore définitivement tranchée ; mais c'est lui qui l'a introduite en France où elle s'est beaucoup répandue après 1653. Cependant, il manquait alors à ces sortes d'établissements la base statistique et mathématique indispensable à toute institution loyale et solide d'assurance sur la vie.

Dans la première moitié du 18^me siècle (Euler est né à Bâle le 15 avril 1707 et mort à St-Pétersbourg le 18 septembre 1783) eut lieu une reprise générale des applications du calcul des probabilités aux matières civiles et politiques. Le signal en fut donné en Angleterre. Les Anglais sont, comme on sait, les premiers hommes de l'univers pour passer des idées aux faits, pour traduire les théories en institutions ; ils y ont souvent donné l'exemple. Ils montrèrent bien leur caractère d'hommes d'affaires et leur génie dans l'initiative qu'ils prirent d'appliquer au domaine de la vie pratique et de l'utilité la théorie des hasards, inventée en France un demi-siècle auparavant par Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Les premières compagnies d'assurance sur la vie furent fondées en Angleterre, à l'époque même où Léonard Euler vint au monde.

Ce n'est donc pas Euler qui créa les premiers établissements d'assurance. Mais c'est lui qui exposa les bases statistiques et mathématiques indispensables à la prospérité de ces institutions avec cette clarté remarquable qui caractérise son style, sous une forme simple, accessible même aux lecteurs non géomètres. C'est lui qui a contribué en une très grande mesure à répandre dans le public l'idée de ces utiles établissements, à vulgariser sur le continent les secrets d'algèbre nécessaires à posséder pour constituer une société d'assurance. — Euler se mêla dans la mesure qui appartient à son génie aux travaux d'analyse qui illustraient de toute part le calcul des probabilités ; dès qu'il parut à son tour dans la lice, entre Daniel Bernoulli et Laplace, il attira sur lui les regards de tous les savants. Vers le milieu de sa vie, il consacra une part de son universelle attention à l'étude de la théorie des hasards. On le vit s'occuper de la résolution de questions très difficiles de jeux. L'algèbre, dans ces curieuses études, s'étendit, s'assouplit, fit entre ses mains les plus heureux progrès.

Pas moins de 14 travaux, dont 10 en langue française et 4 en latin, en outre plusieurs lettres, témoignent de l'activité de Léonard Euler dans le

domaine du calcul des probabilités. Il a montré son goût et sa grande aptitude pour l'application du calcul aux événements de la vie civile tout spécialement dans 4 travaux qui ont un intérêt particulier pour les actuaires, parce qu'ils traitent exclusivement de l'assurance, de ses bases statistiques et mathématiques. — Les deux premiers furent écrits à l'époque où il vivait à Berlin (1741—1766) et présentés en 1760 à l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin ; ils ne furent imprimés qu'en 1767, après qu'Euler eût quitté la capitale prussienne, acceptant l'honneur d'un appel à l'Académie impériale des Sciences de St-Pétersbourg ; ils se trouvent insérés dans le tome 16^me des „Mémoires de l'Académie... de Berlin“, p. 144—175. — Le premier mémoire est intitulé : „*Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain*“ et comprend 21 pages in-quarto. — Le deuxième mémoire, faisant suite au premier, comprend 11 pages et porte comme titre : „*Sur les rentes viagères*“. — Les deux autres travaux se rapportant à la science actuarielle ont été rédigés par Euler en 1776, après qu'il fût devenu aveugle ; c'est du moins l'indication que donne Nicolas de Fuss, qui fut pendant de longues années son secrétaire émérite et plus tard son successeur à l'Académie impériale des Sciences de St-Pétersbourg. Le troisième travail, l'œuvre principale d'Euler sur l'assurance, se compose de trois parties au fond indépendantes l'une de l'autre et est intitulé : „*Éclaircissements sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler. Par Mr. Nicolas Fuss. Adjoint de l'Académie Impériale des Sciences.*“ A St-Pétersbourg, de l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences“. Cet ouvrage comprend 72 pages in-quarto. Sur le travail lui-même ne se trouve aucune indication relative à l'époque de la publication. Nicolas Fuss a noté le 16 mai 1776 comme date d'exhibition du travail. Il en fut imprimé une traduction allemande : Altenbourg, 1782. — Le quatrième mémoire d'Euler sur l'assurance porte comme titre : „*Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis. Quantum duo coniuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur*“. („Solution d'une question se rapportant au calcul des probabilités. Combien deux époux doivent payer pour qu'après le décès de chacun d'eux, il soit payé à leurs héritiers une certaine somme d'argent.“) Ce travail ne fut imprimé qu'en 1785, dans les „*Opuscula analytica Leonhardi Euleri*“, t. II, pag. 315—330. Nicolas de Fuss a noté le 10 juillet 1776 comme date d'exhibition de ce travail ; mais l'œuvre fut prête bien

avant, du moins en manuscrit, puisque A. G. Kästner put en publier en 1770 déjà une traduction allemande avec annotations.

Mentionnons le fait que le style d'Euler se distingue par une très grande clarté. Sa langue est d'une netteté remarquable et souvent imagée. Pour déduire une loi générale ou pour démontrer une formule, il avance toujours pas à pas, et l'on suit chaque pas avec la plus grande facilité, pour ainsi dire en jouant. La façon dont Euler traite un sujet n'a pas cette brièveté extrême, cette grande concision à laquelle les mathématiciens modernes sont en général habitués. Suivre la pensée de l'auteur ne vous coûte presque aucun effort; même pour des laïques, la lecture de ses œuvres est une vraie jouissance. — Après ces remarques générales, nous allons rendre compte des quatre travaux indiqués ci-dessus, analysant leur contenu et faisant quelques comparaisons avec l'état de choses moderne.

Le premier mémoire, auquel du reste Euler renvoie quelquefois dans les travaux ultérieurs, contient des „Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain“. L'auteur fait d'abord ressortir que les très nombreuses questions dont la solution dépend de la longueur, de la vie humaine se réduisent en somme à un nombre relativement restreint de questions fondamentales. A son tour, la réponse à ces questions fondamentales sera très différente suivant qu'on consultera tel registre des naissances et des morts, ou tel autre; voilà pourquoi l'auteur se propose de traiter ces questions d'une façon générale et indépendamment de toute liste spéciale; il sera aisé d'en faire alors l'application à chaque endroit que l'on voudra. Toutes ces questions fondamentales dépendent elles-mêmes en dernier lieu de deux hypothèses: la première se rapporte à la mortalité, la deuxième à la natalité ou multiplication du genre humain.

Dans la première partie de son mémoire, Euler s'occupe de „l'hypothèse de la mortalité“. Comme il emploie dans ses travaux ultérieurs se rapportant à ce sujet toujours les mêmes notations, nous allons les faire connaître ici, d'autant plus qu'elles sont très bien choisies. Considérons un nombre quelconque d'enfants tous nés en même temps, et désignons par N ce nombre (Euler emploie sans doute avec intention l'initiale du mot Nouveau-né). Nous donnerons à ce nombre N que les actuaires de langue anglaise et allemande appellent „radix“, le nom d'„index de la table de mortalité“. Désignons en outre, avec Euler, respectivement par (1) N , par (2) N , par (3) N , par (x) N le nombre de ceux d'entre ces nouveaux-nés qui seront encore en vie au bout

de 1 an, de 2 ans, de 3 ans, de x ans.

Les symboles (1), (2), (3), constituent alors une série de fractions dont chacune est plus petite que la précédente, puisque le nombre des survivants diminue d'année en année. La plus grande (1) étant moindre que l'unité, toutes les autres le sont également. „Ces signes généraux“, dit Euler, „auront pour chaque climat et chaque manière de vivre des valeurs particulières.“ Mais l'auteur opère avec ces symboles eux-mêmes, sans leur attribuer des valeurs numériques déterminées, d'où il résulte que ses recherches et les résultats qu'il trouve conservent un caractère de grande généralité. Si l'on voulait employer les notations modernes, devenues internationales depuis le 2^me congrès universel des actuaires, réuni à Londres en 1898, il y aurait lieu de remplacer

la série N , (1) N , (2) N , (x) N
par l_0 , l_1 , l_2 , l_x .

Les fractions (1), (2), (3), (n)
par p_0 , $p_0 p_1$, $p_0 p_1 p_2$, $p_0 p_1 p_2 \dots p_{n-1}$,
ou encore par ${}_0p_0$, ${}_1p_0$, ${}_2p_0$, ${}_np_0$.

En effet, si l'on choisit l_0 nouveaux-nés comme „index de la table de mortalité“, l_x signifie le nombre de ceux qui atteignent l'âge de x ans, $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ représente la probabilité qu'une personne d'âge x vive encore pendant 1 année, enfin ${}_n p_x$ désigne la probabilité qu'une personne âgée de x ans soit encore en vie au bout de n années. — Euler appelle „hypothèse de mortalité“ l'ensemble des fractions (1), (2), (3), On peut, en effet, connaissant la série de ces fractions, construire immédiatement une table de mortalité ayant un „index“ quelconque. Euler traite ensuite les questions fondamentales suivantes, devenues classiques:

Première question: Etant donné un certain nombre M d'hommes dont chacun ait le même âge m , trouver combien en seront probablement encore en vie après n années. Le nombre cherché est $\frac{(m+n)}{(m)} M$. En notations modernes, c'est la formule

$$l_{m+n} = l_m \cdot {}_n p_m.$$

Deuxième question: La probabilité qu'un homme âgé de m ans soit encore en vie au bout de n années est $\frac{(m+n)}{(m)}$. En notations modernes:

$${}_n p_m = p_m \cdot p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \dots \cdot p_{m+n-1}.$$

Troisième question: La probabilité qu'une personne âgée de m ans vivra encore pendant n années, puis mourra dans le cours de la $(n+1)$ ^e année, est donnée par l'expression $\frac{(n) - (n+1)}{(m)}$; en notations modernes:

$${}_n | q_m = p \cdot p_{m+1} \cdot \dots \cdot p_{m+n-1} (1 - p_{m+n}) = {}_n p_m \cdot q_{m+n}.$$

Dans la *quatrième question*, Euler détermine „la vie probable“ d'une personne quelconque, âgée de m ans. „C'est le terme auquel cette personne peut espérer de parvenir, de sorte qu'il est également probable qu'elle meure avant ce terme qu'après.“ Il correspond au moment où le nombre primitif l_m des hommes ayant tous le même âge m , se trouve réduit exactement à la moitié; car alors, la personne en question peut se trouver avec la même probabilité dans celle des deux moitiés qui est déjà morte, ou dans celle qui est encore en vie.

Cinquième question: Déterminer les rentes viagères qu'il est juste de payer à des hommes d'un âge quelconque m , tous les ans, jusqu'à leur mort, pour une somme a qu'ils auront avancée d'abord. Supposons que M hommes ayant tous le même âge m s'adressent en même temps au même assureur, et que chacun d'eux paie de suite la somme a ; cela fournira à l'assureur un fonds égal à $M \cdot a$; supposons ensuite ce fonds placé à intérêts composés, et que le taux de cet intérêt soit tel qu'une somme S devienne λS au bout d'une année, par le fait que l'intérêt s'ajoute au capital. Dans ce cas, la valeur actuelle d'une somme S , échue dans n années seulement, sera $\frac{S}{\lambda^n}$ (en notation moderne: $S \cdot v^n$); soit enfin x la rente que l'assureur doit payer annuellement à chacune des M personnes tant qu'elle sera en vie; on conclut de ces hypothèses l'équation :

$$a = \frac{x}{(m)} \left\{ \frac{(m+1)}{\lambda} + \frac{(m+2)}{\lambda^2} + \frac{(m+3)}{\lambda^3} + \dots \right\}.$$

On en tirera la valeur cherchée x , puisque toutes les autres grandeurs figurant dans cette égalité sont connues ou supposées connues. Euler démontre cette formule en posant que le fonds entier $M \cdot a$ dont l'assureur dispose actuellement doit être égal à la somme de toutes les rentes futures qu'il devra vraisemblablement payer, chacune étant escomptée au temps présent. Il s'agit ici d'annuités payables à terme échu.

Sixième question: Quand on paie actuellement la somme a pour qu'un nouveau-né reçoive chaque année une rente viagère x à partir du moment où il aura atteint l'âge de n ans, le montant x de cette rente se déterminera par l'équation

$$a = x \left\{ \frac{(n)}{\lambda^n} + \frac{(n+1)}{\lambda^{n+1}} + \frac{(n+2)}{\lambda^{n+2}} + \dots \right\}$$

Pour démontrer cette formule, Euler emploie la même méthode que dans la question précédente. „Toutes ces questions se résoudreont donc facilement, dès qu'on connaîtra les valeurs des fractions (1), (2), (3),... Celles-ci dépendent autant du climat que de la manière

de vivre; on a même remarqué que ces valeurs sont différentes pour les deux sexes; de sorte qu'on ne saurait rien déterminer en général.“ Après ces considérations, Euler donne une table contenant les valeurs de toutes ces fractions (1), (2), (3),... „telles qu'on les tire des observations de M. Kerseboom“, expliquant pourquoi ces valeurs sont sûrement trop grandes, du moins pour les bas âges.

La deuxième partie du mémoire traite de la multiplication du genre humain. „Trois cas sont à considérer“, dit Euler, „le premier, où le nombre des hommes demeure constamment le même; le second, où il augmente tous les ans; le troisième, où il diminue tous les ans. Mais il est possible de réunir ces trois cas en un seul: si M marque le nombre de tous les hommes qui vivent à présent, et $m \cdot M$ le nombre de ceux qui vivront au bout d'une année, le premier cas aura lieu si $m = 1$, le second cas, si $m > 1$, et le troisième, si $m < 1$; de sorte que le coefficient m renferme tous les cas.“ Euler sait très bien que les phénomènes démographiques sont extrêmement complexes, que, par exemple, la natalité peut suivre d'autres lois que la mortalité, si tant est que la notion de „lois“ soit applicable ici. De même qu'on peut considérer l'hypothèse de la mortalité à elle seule, sans avoir égard à la natalité, on peut également représenter la natalité sans que la loi de mortalité y soit mêlée, puisque ces deux principes de la mortalité et de la propagation sont indépendants l'un de l'autre. Euler indique aussi comment on pourrait essayer d'exprimer une telle hypothèse par une formule mathématique; mais il ne développe pas cette formule; l'endroit en question, § 13 et § 14, n'est pas rédigé avec la clarté qui distingue partout ailleurs à un si haut degré le style d'Euler; l'extrême complication des phénomènes se reflète quelque peu dans leur description.

Afin d'avoir une base bien déterminée pour ses recherches, Euler suppose qu'il y a proportionnalité directe entre le nombre de tous les vivants et le nombre des enfants qui naissent chaque année, en plus, que les règles de mortalité et de natalité ne varient pas, mais restent constantes dans le cours des âges. Euler se rend très bien compte que ce sont là des suppositions arbitraires; il les appelle lui-même „l'hypothèse de la multiplication“. Il découle immédiatement de ces suppositions que toute population pour laquelle l'hypothèse eulérienne de la multiplication est valable, varie en progression géométrique, ou bien reste stationnaire. En effet: soit N le nombre des enfants nés pendant le cours d'une année, et $n \cdot N$ celui des nouveaux-nés de l'année suivante; par hypothèse, les causes qui ont changé le nombre

N en $n \cdot N$ subsistent; donc, il y aura la troisième année de nouveau n fois plus de naissances que l'année précédente, c'est-à-dire $n \cdot n N = n^2 N$ naissances; de même la 4^e année, il y en aura de nouveau n fois plus, c'est-à-dire $n^3 N$, et ainsi de suite; donc effectivement, les nombres des naissances annuelles ou bien resteront constants, lorsque $n = 1$, ou bien constitueront une progression géométrique, ou croissante, ou décroissante, selon que $n > 1$ ou $n < 1$. Euler suppose en outre que son hypothèse de la multiplication est encore valable pour le nombre total de la population, que ce nombre aussi ou bien reste constant, ou bien varie en progression géométrique. Dans ce cas, l'augmentation du nombre des habitants est complètement déterminée par le rapport 1 : n .

Si l'on considère 100 ans comme limite supérieure de la durée de la vie humaine, tous les habitants actuels seront morts au bout d'un siècle; par conséquent, ceux qui vivent à un moment donné sont tous nés dans le courant des 100 années qui ont précédé ce moment. Ceci donne lieu au tableau suivant:

dans l'année considérée	Nombre des naissances	Après 100 ans, il en vivra encore
	N	$(100) \cdot N$
après 1 an	$n \cdot N$	$(99) \cdot n \cdot N$
" 2 ans	$n^2 \cdot N$	$(98) \cdot n^2 \cdot N$
" 3 "	$n^3 \cdot N$	$(97) \cdot n^3 \cdot N$
⋮	⋮	⋮
" 99 "	$n^{99} \cdot N$	$(1) \cdot n^{99} \cdot N$
" 100 "	$n^{100} \cdot N$	$n^{100} \cdot N$

Désignons par M le chiffre que la population actuelle aura atteint au bout d'un siècle; nous aurons: $M = (100) \cdot N + (99) \cdot n \cdot N + (98) \cdot n^2 \cdot N + \dots + (1) \cdot n^{99} \cdot N + n^{100} \cdot N$.

Or, dans 100 ans, le nombre des naissances s'élèvera à $n^{100} \cdot N$; partant, le rapport du nombre de tous les vivants au nombre des naissances pendant le cours d'une année sera

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{(1)}{n} + \frac{(2)}{n^2} + \frac{(3)}{n^3} + \dots$$

Cette égalité permet d'exprimer d'une deuxième manière la loi qui régit la variation du nombre de la population, en supposant l'hypothèse eulérienne juste; cette équation indique par exemple combien d'enfants naissent, en moyenne, par an et par 1000 habitants, tandis que la première expression de cette loi, „l'hypothèse de la multiplication“, indique seulement que chaque année, il y a n fois plus de naissances que l'année précédente, et qu'à chaque moment, le nombre des habitants est n fois plus grand qu'il n'était une année auparavant. La formule ci-dessus établit une liaison entre ces deux indications: elle permet

de calculer $\frac{M}{N}$ lorsqu'on connaît n , ou inversement, à condition toutefois que la loi de mortalité, c'est-à-dire la valeur de chacune des fractions (1), (2), (3),..., soit connue. — Euler traite ensuite les questions suivantes:

Première question: Les hypothèses de mortalité et de natalité étant données, si l'on connaît le nombre M de tous les vivants, trouver combien il y en aura de chaque âge.

Deuxième question: Les mêmes choses étant données, trouver le nombre des personnes qui mourront vraisemblablement pendant le cours d'une année.

Troisième question: Connaissant le nombre N des naissances ainsi que le nombre O des enterrements qui arrivent pendant le cours d'une année, trouver le nombre M de tous les vivants ainsi que leur augmentation annuelle n , pour une hypothèse de mortalité donnée.

Quatrième question: Les mêmes choses étant données que dans la question précédente, trouver combien de chaque âge il y aura vraisemblablement parmi les morts.

Cinquième question: Connaissant le nombre de tous les vivants et celui des naissances, ainsi que les nombres des morts de chaque âge pendant le cours d'une année, trouver la loi de la mortalité. — Désignons par N le nombre des naissances, et par O le nombre des enterrements qui arrivent dans le cours d'une année; posons ensuite le nombre de tous les vivants, y compris les N enfants nés cette année, égal à M . Par la méthode développée dans les questions 3^e et 4^e ci-dessus, on connaîtra d'abord la multiplication annuelle: $n = \frac{M-O}{M-N}$. Soit ensuite pour cette année:

d_0 le nombre de ceux qui sont morts avant l'âge d'un an;
 d_1 " " " " " " " entre 1 et 2 ans;
 d_2 " " " " " " " 2 " 3 "

Tous ces nombres sont supposés connus; on peut les tirer directement des registres mortuaires pour l'année considérée. Or, d'après la 4^e question, l'on a

$$d_0 = \{ 1 - (1) \} N \quad \text{d'où } (1) = 1 - \frac{d_0}{N}$$

$$d_1 = \left\{ (1) - (2) \right\} \frac{N}{n} \quad \text{ " } (2) = 1 - \frac{d_0 - nd_1}{N}$$

$$d_2 = \left\{ (2) - (3) \right\} \frac{N}{n^2} \quad \text{ " } (3) = 1 - \frac{d_0 - nd_1 - n^2 d_2}{N}$$

.

Cette 5^e question est d'une importance capitale pour la construction d'une table de mortalité. La mé-

thode développée par Euler permet de se procurer immédiatement une telle table : il suffit d'un recensement de la population et d'une liste mortuaire pour l'année qui suit ce recensement général. Il est vrai que cette méthode est basée sur l'hypothèse que le nombre total des habitants varie en progression géométrique, et que l'expérience ne confirme pas cette hypothèse. Les statistiques, on le sait, prouvent que la population augmente, si l'on envisage la totalité du genre humain. Mais la loi de cette augmentation, si tant est que „loi“ il y a, n'est ni simple, ni immuable. Il s'agit donc seulement de construire une table de mortalité qui corresponde à l'état de choses actuel, une table que l'on puisse par conséquent employer dans les applications du calcul des probabilités. La méthode préconisée par Euler permet de l'obtenir par des moyens très simples.

En terminant, Euler marque encore une fois les hypothèses sur lesquelles il a basé toutes ses déductions, puis fait une mention élogieuse des travaux de Jean-Pierre Süßmilch, alors conseiller du Consistoire. On sait que Süßmilch publia en 1741 un ouvrage intitulé : „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechtes, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen.“ („L'ordre divin prouvé dans les variations du genre humain, par la naissance, la mort et la propagation des hommes“.) Cet ouvrage contient une table de mortalité en vogue pendant longtemps, mais dont on ne peut plus se servir aujourd'hui dans la pratique de l'assurance. Süßmilch fit pour l'Allemagne l'analogue de ce que Halley a fait en 1693 pour l'Angleterre, et de ce que fit Deparcieux en 1746 pour la France.

Le deuxième travail dû à la plume de Léonard Euler et se rapportant à la science actuarielle porte le titre : *Sur les rentes viagères*. Dans le § 1, il est désigné comme faisant suite au mémoire précédent : „Recherches générales...“ Euler fait d'abord ressortir les deux facteurs principaux qui jouent effectivement un rôle fondamental dans toute institution d'assurance : l'un est la table de mortalité sur laquelle l'assureur base ses calculs ; l'autre est le taux auquel il pourra faire valoir l'argent qui lui aura été versé. — Pour ce qui est du premier, Euler remarque très justement „qu'on a raison de considérer les rentiers comme une espèce plus robuste“, que l'entrepreneur risquerait sans doute beaucoup s'il voulait se régler sur la mortalité des hommes en général ; il faut en exclure tous ceux dont la constitution ne semble pas promettre une longue vie, car les faibles de santé ou ceux qui croient ne pas vivre longtemps, ne s'achètent pas de rente viagère. C'est pour cette raison que l'auteur

choisit la liste de Kerseboom, liste tirée d'observations faites uniquement sur des personnes qui ont joui de rentes viagères.

Pour ce qui est du taux de l'intérêt, il faut que l'entrepreneur puisse placer assez bien le capital qui lui est fourni par les rentiers, „car autrement, il ne saurait accorder que des rentes si médiocres que personne ne voudrait les acquérir“. Euler prend 5 % comme base de ses calculs, et il pense que l'assureur pourra très facilement placer ses fonds à ce taux. Dans un autre travail sur les caisses de prévoyance, Euler choisit même 6 % comme base de ses calculs. Halley avait aussi admis un intérêt annuel de 6 % pour calculer ses tables. On peut juger par ces données combien la situation du marché monétaire anglais, en 1693, différait de celle d'aujourd'hui ; Halley cite un emprunt royal anglais qui avait été émis peu de temps auparavant et qui accordait 14 %. On comprend qu'en face de tels faits, Halley soit arrivé à la conclusion qu'on devait déconseiller aux personnes de s'acheter des rentes viagères. Euler raconte „qu'autrefois, la ville d'Amsterdam a payé 10 % de rente à toutes les personnes au-dessous de 20 ans ; donc pour 1000 florins, elle leur payait 100 florins chaque année“, et il ajoute : „cette rente est si riche que la ville en aurait souffert une perte très considérable, si elle-même n'avait gagné presque 10 % par an du fonds que cette entreprise lui a procuré“.

Euler met en garde contre le raisonnement suivant qui a souvent été fait : pour déterminer le prix d'une rente viagère, on calcule pour l'âge en question „la vie probable“ (voir page 448) ; alors, si l'on considère actuellement un grand nombre de personnes ayant toutes le même âge, il en mourra autant avant ce terme qu'après ; on suppose ensuite que toutes les personnes considérées atteignent précisément cet âge-là, puis meurent toutes à la fois ; et c'est là-dessus qu'on fixe le prix des rentes ; on estime alors que le profit que l'entrepreneur retire du côté de ceux qui meurent avant ce terme est précisément compensé par la perte que lui causent ceux des rentiers qui survivent à ce terme. Euler montre que ce raisonnement cloche : on n'y tient pas compte de la valeur actuelle des rentes échues dans l'avenir.

Nous allons exposer ici la méthode d'Euler, devenue classique, en employant cependant autant que possible les notations modernes internationales : considérons l_0 nouveaux-nés, et marquons par l_1, l_2, \dots, l_x , le nombre de ceux qui en seront encore en vie au bout de 1, 2, \dots, x années respectivement ; désignons ensuite par r la rente viagère annuelle qu'une personne âgée de x ans veut se procurer, et par a_x le prix que l'assureur en exige actuellement. Pour déter-

miner ce prix a_x , supposons qu'un grand nombre de personnes, nombre que nous désignons par l_x , toutes du même âge de x ans, se présentent en même temps chez le même assureur et demandent la même chose. La somme qu'elles déboursent à présent entre les mains de l'entrepreneur sera $l_x \cdot a_x$, et ce capital, placé à intérêts composés, doit être un juste équivalent de la dépense dont l'assureur se charge, c'est-à-dire suffisant pour fournir toutes les rentes qu'il aura à payer dans la suite. Or, de ces l_x personnes, il y en aura probablement encore en vie : l_{x+1} au bout d'une année, l_{x+2} au bout de deux ans, L'entrepreneur devra donc vraisemblablement payer :

après 1 an, la somme de $r \cdot l_{x+1}$
 „ 2 ans, „ „ „ $r \cdot l_{x+2}$

jusqu'à ce que tous les rentiers soient morts. Il faut encore réduire chacun de ces paiements au temps présent. Or, la valeur actuelle d'une somme S échue dans n années est égale à $S \cdot v^n$, où $v = \frac{1}{1+i}$, et où i représente l'intérêt qu'un capital de „1“ rapporte en une année; p. ex. pour 5 % : $v = \frac{1}{1,05} = \frac{20}{21}$ (v. page 448). En calculant d'après cette règle la valeur actuelle de chacun des paiements que l'assureur aura vraisemblablement à effectuer, on obtient pour somme de ces valeurs actuelles

$$r \cdot l_{x+1} \cdot v + r \cdot l_{x+2} \cdot v^2 + r \cdot l_{x+3} \cdot v^3 + \dots$$

Cette somme doit être égale à la recette précédente $l_x \cdot a_x$, d'où l'équation

$$a_x = \frac{r}{l_x} (v \cdot l_{x+1} + v^2 \cdot l_{x+2} + v^3 \cdot l_{x+3} + \dots)$$

Toutes les grandeurs figurant au second membre de cette égalité sont connues; on peut donc en tirer la valeur cherchée a_x .

Euler remarque que l'entrepreneur devra hausser le prix des rentes ainsi calculé; il saisit souvent l'occasion de faire ressortir la différence entre la prime pure que donne la formule mathématique et le prix brut que l'assureur indiquera dans ses tarifs. Comme justification de cette différence, l'auteur indique d'un côté: les frais de gestion et „les dépenses particulières qu'un tel établissement exige“, d'un autre côté: les écarts entre la mortalité effective et celle indiquée par la table, oscillations plus ou moins considérables que l'institution doit être en état de supporter. Euler explique ensuite quelques artifices permettant d'abrégier beaucoup les calculs. Il montre à cette occasion combien il est grand maître dans cet art. Enfin, il communique une table qui marque les prix d'une rente via-

gère de 100 écus pour tous les âges x , de 0 à 94 ans. — Une deuxième table montre combien de pour cent un rentier retire de l'argent qu'il a ainsi remis à l'assureur; le minimum est de $6\frac{1}{3}$ % et correspond à l'âge de 10 ans; si le rentier était âgé de plus de 55 ans au moment où il s'achetait la rente viagère, le fonds qu'il abandonne à l'établissement lui rapporte plus de 10 %, à 90 ans: $55\frac{1}{2}$ %.

Euler discute ensuite la question: serait-il avantageux pour un Etat de fonder un tel établissement d'assurance pour se procurer de l'argent? „Si l'Etat peut trouver des fonds à 5 % tant qu'il lui en faut, il ferait assurément fort mal, s'il voulait établir dans ce but de telles rentes viagères,“ voilà la conclusion à laquelle Euler arrive; „mais“, ajoute-t-il, „on peut imaginer une autre espèce de rente qui serait peut-être plus goûtée, quoique également fondée sur le pied de 5 %; je veux parler de rentes qui ne doivent commencer à courir qu'après 10 ou même vingt ans, et l'on comprend aisément que le prix de telles rentes sera fort médiocre, et partant capable d'attirer le public.“ Euler considère ici les rentes différées dont l'usage est si répandu et que presque toutes les sociétés d'assurance sur la vie accordent. Il démontre la formule permettant de calculer la valeur actuelle $n|a_x$ d'une rente viagère différée de n années, payable annuellement à une personne d'âge x ; puis il explique de nouveau quelques artifices de calcul; enfin, prenant 5 % comme taux et la table de mortalité de Kerseboom comme base, il calcule 2 tables: la première donnant le prix d'une rente différée de 10 ans, la seconde celui d'une rente différée de 20 ans, en supposant qu'au moment du paiement de la prime, l'âge du rentier soit de 0, 5, 10, 15, 80 ans. „Il semble qu'il serait toujours avantageux pour un enfant nouvellement né de pouvoir lui assurer, moyennant le prix de 3500 écus, une rente fixe annuelle de 1000 écus, quoiqu'elle ne commence à être payée que lorsque l'enfant aura atteint l'âge de 20 ans.“

De tous les travaux que Léonard Euler a consacrés à la science actuarielle, le principal est intitulé: „*Éclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler.* Par Mr. Nicolas Fuss. Adjoint de l'Académie Impériale des Sciences.“ Cette œuvre d'un haut intérêt, très originale dans sa dernière partie, forme un tout composé de 3 grands chapitres. Même des laïques la liront avec profit et sans difficulté, car le style d'Euler et sa manière d'exposer le sujet se distinguent par une très grande clarté. Nous

pourrons être plus bref dans l'analyse, vu que plusieurs paragraphes sont une répétition de ce qui a été dit précédemment, quelquefois avec des notations un peu modifiées.

La première partie traite „d'un établissement public pour payer des pensions à des veuves, fondé sur les principes les plus solides de la probabilité“. Euler commence par démontrer la formule d'escompte d'une somme placée à intérêts composés (v. page 451). Puis il envisage le cas suivant : un mari, âgé de a ans, voudrait assurer à sa femme, dont l'âge est de b ans, une pension annuelle se montant à p roubles ; à cet effet, il se déclare prêt à payer immédiatement une somme x , et en outre, chaque année une prime égale à z , jusqu'à sa mort. A partir de ce décès, sa veuve devra jouir de la pension annuelle de p roubles jusqu'à ce qu'elle meure à son tour. Si c'est par contre le mari qui survit à la femme, les primes déjà versées restent propriété de l'établissement qui n'est ainsi tenu à aucun paiement vis à vis du veuf. — En introduisant de cette façon les grandeurs x et z , Euler donne une preuve de son fin sens mathématique ; en posant ce cas, on peut en effet résoudre d'un seul coup trois problèmes différents et qui sont généralement traités séparément dans les livres sur les bases mathématiques de l'assurance : supposons résolu le problème général avec x et z quelconques ; on aura une certaine équation établissant une liaison entre ces grandeurs x et z et les autres données du problème ; cette liaison trouvée, si l'on pose après coup $z = 0$, cela signifie que le mari veut payer de suite le prix entier de la pension assurée à sa veuve, et l'on a alors déterminé la valeur actuelle de cette pension. Si, au contraire, on pose $x = 0$, cela signifie que le mari veut acheter la pension de sa veuve par annuités payables à terme échu, et le montant de chacune de ces annuités est alors déjà trouvé ; si enfin l'on pose $x = z$, cela signifie que le mari veut assurer la pension à sa veuve en versant des primes payables d'avance, et il se trouve qu'on a également déterminé le montant de celles-ci.

Pour résoudre le problème général, Euler envisage un grand nombre de maris tous âgés de a ans et dont les femmes ont également toutes le même âge b ; tous ces maris sont supposés se présenter en même temps chez le même assureur pour procurer à leur veuve la pension annuelle viagère de p roubles, pension commençant à courir à la fin de l'année dans laquelle le mari sera mort. Euler passe alors successivement d'une année à l'autre, déterminant chaque fois le nombre probable des couples encore vivants et le nombre probable des veuves, puis déduisant de là combien d'argent l'établissement recevra vraisemblablement chaque année, et combien il sera obligé de déboursier, en

réduisant tant la recette que la dépense au temps présent, selon la règle d'escompte rapportée ci-dessus. L'auteur effectue d'une façon très claire cette décomposition du budget futur de l'assureur, et cela pour les quatre premières années, afin de faire ressortir bien nettement la loi de formation des différents postes. Le lecteur est ainsi conduit pas à pas et sans effort sensible à l'équation finale

$$x + C \cdot z = (B - C) \cdot p \quad 1)$$

„De cette manière, l'établissement sera mis parfaitement d'accord avec les règles de la plus rigoureuse équité, de sorte que personne, de quelque état ou de quelque condition que ce soit, ne saurait trouver aucun sujet de se plaindre.“ — Les lettres B et C sont ici des abréviations pour les séries suivantes :

$$B = \frac{(b+1)}{(b)} \cdot v + \frac{(b+2)}{(b)} \cdot v^2 + \frac{(b+3)}{(b)} \cdot v^3 + \dots$$

$$C = \frac{(a+1)}{(a)} \cdot \frac{(b+1)}{(b)} \cdot v + \frac{(a+2)}{(a)} \cdot \frac{(b+2)}{(b)} \cdot v^2 + \frac{(a+3)}{(a)} \cdot \frac{(b+3)}{(b)} \cdot v^3 + \dots$$

En supposant que l'établissement puisse faire valoir ses fonds au taux de 6 % l'an, Euler a calculé 10 grandes tables qui contiennent entre autres les valeurs de B et de $(B-C)$ pour tous les âges de la femme de cinq ans en cinq ans, donc pour $b = 15, 20, 25, \dots, 90$. L'âge a du mari est supposé dans une première table : égal à celui de la femme ($a = b$), dans une autre table : de 5 ans plus élevé ($a = b + 5$), dans une troisième : de 10 ans plus élevé ($a = b + 10$), etc. Euler profite de l'occasion pour expliquer de nouveau plusieurs artifices de calcul permettant d'abrégier considérablement les opérations. — Il serait très facile, en faisant usage de ces tables, de résoudre l'équation 1) trouvée ci-dessus, en prenant l'une ou l'autre des deux quantités x et z à volonté ; cependant, Euler va encore plus loin, pour les besoins de la pratique : il pose $z = 0$ et calcule une nouvelle table „des prix que chaque mari doit payer, tout à la fois au commencement, tant par rapport à son âge qu'à celui de sa femme, pour assurer à celle-ci une pension de 100 roubles“. Puis il pose $x = z$ et communique une deuxième grande table où est marqué le paiement qu'un mari doit faire au commencement de chaque année, pendant toute sa vie, afin qu'après sa mort, sa femme puisse jouir d'une pension annuelle de 100 roubles tant qu'elle vivra. Euler montre qu'on peut varier d'une infinité de manières les versements à faire pour assurer une telle pension de 100 roubles. „Ainsi, quand le mari paiera dès le commencement la somme $\frac{1}{2} x$ qui est la valeur d'une pension de 50 roubles,

il doit outre cela payer tous les ans encore $\frac{1}{2} z$, comme équivalent de l'autre moitié de 50 roubles; en général, quand il veut payer au commencement la somme de nx , où n marque une fraction quelconque, il sera tenu de verser outre cela, chaque année, la somme de $(1 - n) \cdot z$; l'établissement pourra laisser chaque mari décider librement quelle valeur il voudra donner à la fraction n . Rien n'empêche même qu'on ne prenne n plus grand que l'unité, par exemple $n = 2$. Au lieu de verser alors encore quelque chose, on retirera tous les ans une certaine somme de l'établissement, même dès la première année. Mais ce paiement ne durera qu'autant que le mari et la femme seront en vie tous deux, vu qu'avec la mort de la femme, toute obligation est éteinte, tandis qu'après la mort du mari, la veuve parviendra à la jouissance de la pension de 100 roubles.

Euler montre encore plusieurs applications de l'équation 1) ci-dessus, et l'on est émerveillé de la perspicacité avec laquelle il sait en tirer toujours de nouvelles. Finalement, il résume encore une fois ses résultats numériques en deux grands tableaux et ne manque pas l'occasion d'indiquer certaines lois que son œil exercé aperçoit dans les nombres de ces tableaux. „Enfin, il est clair que dans toutes ces déterminations, le lien du mariage entre les deux personnes dont il s'agit n'entre en aucune considération;“ ces mêmes tables pourront donc servir à résoudre le problème général suivant: quel prix doit-on payer, quand il s'agit de procurer à une personne B dont l'âge est de b ans, une rente viagère annuelle, mais qui ne doit commencer qu'après la mort d'une autre personne A dont l'âge est de a ans. — Pour terminer, Euler remarque que toutes ces tables sont calculées sur une parfaite égalité entre la recette et la dépense; en réalité, on doit ou augmenter les prix, ou diminuer les rentes de quelques pour cent, d'abord pour subvenir aux frais d'administration qu'un tel établissement entraîne, mais surtout et avant tout „pour prévenir tous les accidens extraordinaires qui ne peuvent être calculés“. La nécessité d'établir une réserve est nettement exprimée à cette occasion.

La deuxième partie de l'ouvrage principal d'Euler sur la science actuarielle est intitulée: *Sur l'établissement d'une caisse pour les morts*, et comprend 15 pages. „On parle beaucoup, depuis quelque temps, d'un tel établissement.“ Charles Gouraud, dans son „Histoire du calcul des probabilités“ (1848), page 77, dit qu'il s'agit d'une compagnie allemande alors sur le point de se constituer „et qu'Euler discute et corrige avec le plus grand soin les statuts erronés de cette compagnie.“ Quoi qu'il en soit, la dite société devait se composer de 550 membres; chacun d'eux s'engageait

à payer 2 roubles à la caisse commune toutes les fois que l'un des membres mourrait; de la somme de 1100 roubles ainsi recueillie, 1000 étaient versés aux héritiers du défunt, tandis que les 100 roubles restant servaient à l'entretien d'une église et à couvrir les frais de gestion qu'un tel établissement occasionne nécessairement. Tout sociétaire défunt devait sans retard être remplacé par un nouveau membre, afin que le nombre total des adhérents fût constamment de 550. On voit immédiatement qu'un très grand avantage est du côté de ceux qui viendront à mourir bientôt, sans avoir payé beaucoup à la société, tandis que cette contribution de 2 roubles finira par tomber fort à charge à ceux qui survivront aux autres. Euler décrit d'une façon saisissante et en un langage persuasif comment une telle „caisse mortuaire“ se développera, quelles phases elle traversera. Il montre qu'au bout d'un certain nombre d'années, la société aura de très grandes difficultés à recruter de nouveaux membres, surtout des jeunes; il arrivera un moment où les sociétaires restant ne pourront plus espérer qu'après leur mort, leur famille reçoive la somme stipulée de 1000 roubles, quoi qu'ils aient fidèlement rempli les conditions de la société et déboursé peut-être le double de cette somme. Une telle „assurance“ n'est ni bon marché, ni équitable.

L'histoire de ces „caisses mortuaires“ ou „fraternités“ a complètement donné raison à Euler. Elles se sont constituées par centaines, et sous des dénominations diverses; mais aucune n'a pu exister à la longue sur des bases si insuffisantes. Rien n'est moins conforme à la justice que de faire contribuer dans une même proportion des hommes qui, suivant l'ordre de la nature, sont appelés à des longévités très différentes. Euler a fort bien reconnu ce grand défaut; il a vu que c'était la base mathématique et technique qui manquait à la stabilité et à l'équité de ces associations. Il écrit: „Cependant, notre intention n'est pas de détourner aucun de ceux qui voudront entrer dans cette société de leur louable dessein, puisque le bien public et surtout les intérêts d'une église sont en jeu, et comme il s'agit d'une œuvre quasi pieuse, on ne doit pas regarder si près aux lois d'une juste équité; nous n'avons rapporté toutes ces incongruités que pour former un nouveau plan d'un tel établissement qui soit fondé sur les principes les plus solides de la probabilité, en sorte qu'aucun ne puisse avoir raison de se plaindre, puisque chacun paiera précisément autant que le bénéfice qu'il aura à espérer après sa mort, doit être évalué suivant les lois de la plus rigoureuse équité.“

Voyant très clairement que la contribution d'un sociétaire doit dépendre de son âge, mais que le nombre des membres n'a pas besoin de rester constant, pourvu

qu'il ne devienne pas trop petit, Euler met le problème suivant en tête de ses recherches ultérieures: Supposé qu'une personne d'âge a veuille assurer après sa mort la somme de 100 roubles à ses héritiers, on demande de déterminer le prix que cette personne sera tenue de payer à la caisse de la „fraternité“, „selon les règles de la plus sévère équité.“ — Euler établit alors le budget des recettes et des dépenses probables de la caisse, et pose qu'elles doivent se tenir exactement en équilibre; à cet effet, après avoir démontré à nouveau la formule d'escompte (voir page 451), il suppose qu'un grand nombre de personnes, toutes âgées de a ans, nombre qu'il désigne par N , se présentent à la fois comme membres de la même „fraternité“, que chacune paie immédiatement à son entrée la somme de x et, outre cela, encore annuellement une prime de z , tant qu'elle sera en vie. Puis Euler suit ces N personnes de même âge pendant tout le cours de leur vie, d'une année à l'autre; il détermine pour chaque année quelles recettes et quelles dépenses elles procureront vraisemblablement à la caisse commune, en ayant soin de calculer la valeur actuelle de chaque somme, par l'application de la formule d'escompte, et en supposant que l'administration de la caisse puisse faire valoir les fonds à 6% l'an. „Cette supposition est absolument nécessaire pour diminuer les prix que chacun sera obligé de payer dans chaque cas, lesquels, sans cette condition, deviendraient trop considérables pour qu'un tel établissement fût goûté du public.“ L'auteur établit ce budget très en détail, et avec une clarté magistrale, pour les 4 premières années; on voit alors nettement les lois de la progression, tant des recettes que des dépenses, et l'on arrive ainsi à l'équation finale

$$2) \quad (a) \cdot x + P \cdot z = 100 (a) - P \cdot 100 i$$

Dans cette égalité, le symbole (a) possède la signification expliquée ci-dessus (v. page 447); $100 i$ est le taux annuel de l'intérêt, p. ex., dans le cas de 6% admis par Euler, $100 i = 6$; enfin, P est une abréviation pour la série

$$P = (a + 1) \cdot v + (a + 2) \cdot v^2 + (a + 3) \cdot v^3 + \dots$$

„De cette façon, on déterminera les quantités x et z selon les règles de la plus parfaite équité.“ — L'une des 2 grandeurs, x ou z , peut être prise à volonté; de l'égalité 2), on tirera ensuite la valeur de l'autre. — Euler développe les deux cas principaux par rapport au paiement que chacun doit faire, suivant qu'il veut verser dès le commencement, à son entrée, le prix entier des 100 roubles assurés à ses héritiers après sa mort ($z = 0$), ou qu'il préfère répartir ce paiement en primes annuelles payables par anticipation,

c'est-à-dire au commencement de chaque année, tant qu'il vivra ($x = z$). Euler explique à cette occasion de nouveau quelques artifices permettant d'abrégier considérablement les calculs. Enfin, il communique une table numérique qui marque pour chaque âge de cinq ans en cinq ans, donc pour $a = 0, 5, 10, 15, \dots, 90$, combien une personne d'âge a doit payer, ou à la fois en un versement unique, ou par primes annuelles, pour assurer à ses héritiers la somme de 100 roubles, échue dès qu'elle mourra. „Quoique nous ayons supposé qu'un tel établissement puisse faire valoir ses fonds à 6% par an, nous avons, pour calculer les tables numériques, fixé les intérêts à 5%; car il faut considérer que la caisse doit toujours être fournie d'une somme considérable d'argent comptant, pour être en état de payer sur le champ les 100 roubles stipulés en cas de mort, et que cette somme en argent comptant ne produit pas d'intérêts. De cette manière, nous procurerons à la caisse un avantage assez considérable pour qu'elle puisse soutenir les frais qu'un tel établissement occasionne.“ La nécessité d'établir une réserve est ici encore exprimée à plusieurs reprises: „Les prix ainsi calculés sont déterminés selon les règles de la plus parfaite équité. On comprendra aisément que pour les mettre en pratique, il faut les augmenter de quelques pourcent, afin de mettre la caisse entièrement à l'abri des évènements extraordinaires qui pourroient arriver.“

Quant aux résultats contenus dans les tables numériques, Euler renvoie (page 48) à son mémoire latin que nous avons cité à la page 446 ci-dessus. Il serait cependant inexact d'en conclure, comme Charles Gouraud semble l'indiquer (v. l. c. page 77), qu'il est nécessaire d'avoir étudié ou lu ce mémoire latin pour comprendre celui „sur l'établissement d'une caisse pour les morts“. Ces deux travaux sont indépendants l'un de l'autre, chacun forme un tout; même les artifices de calcul sont expliqués dans les deux. Cette citation d'Euler doit sans doute être interprétée en ce sens: „dans le travail latin, j'ai seulement exposé les principes du calcul, sans donner des résultats numériques; je communique ici les résultats auxquels conduit ce calcul“. Les tables en question forment en effet la fin de son mémoire sur les caisses mortuaires ou fraternités.

Nous passons à l'analyse du seul travail qu'Euler ait écrit *en latin* sur la science actuarielle; il y traite un problème analogue au précédent, mais un peu plus compliqué. Il s'agit de nouveau d'une assurance au décès, mais ici, le capital assuré n'est échu qu'à la mort du dernier survivant d'un couple marié. Ce travail, comprenant 16 pages in-quarto, porte le titre latin que nous avons déjà indiqué à la page 6 et dont voici la traduction française: „*Solution d'une question se*

rapportant au calcul des probabilités. Combien deux époux doivent payer pour qu'après le décès de chacun d'eux, il soit payé à leurs héritiers une certaine somme d'argent.⁴ L'auteur commence par démontrer la formule d'escompte (voir page 451) et par reproduire la table de mortalité de Kerseboom, après avoir expliqué ses notations. Puis il suppose qu'un grand nombre de maris, tous d'âge a et dont les femmes sont également toutes âgées de b ans, se présentent en même temps et avec la même demande chez le même assureur; Euler désigne ce nombre par N . Il résume de nouveau, d'une façon magistrale, les possibilités les plus variées en un seul cas, en posant que chaque couple paie immédiatement la somme de x à la caisse de l'établissement et, en outre, encore une prime annuelle de z jusqu'à ce que les deux époux soient décédés; en échange, l'établissement s'engage à verser à leurs héritiers la somme de 1000 roubles, immédiatement après la mort du dernier survivant de ces deux époux. — Euler établit de nouveau une sorte de budget, notant exactement d'un côté, ce que l'institution, d'après les règles de la probabilité, devra payer aux assurés, et d'un autre côté, ce que ceux-ci lui verseront, en réduisant toutes les sommes au temps présent par l'application de la formule d'escompte. Il arrange ce budget de façon à ce qu'il y ait équilibre exact entre les recettes et les dépenses futures probables. A cet effet, il détermine pour la première année, puis pour la deuxième, puis en général pour la $(n + 1)^e$, les quatre nombres suivants: celui des couples encore vivant, celui des veufs, celui des veuves, celui des couples tout à fait éteints. Les trois premiers de ces nombres donnent les recettes probables, puisqu'ils indiquent combien de fois la prime de z est versée à la caisse; le quatrième nombre indique la dépense probable. En escomptant chaque somme, Euler a la précaution de supposer que tous les versements, de 1000 roubles chacun, que l'établissement effectue aux héritiers, doivent se faire au commencement de l'année, car, dit-il, les sommes en question doivent se trouver en argent comptant dans la caisse, à disposition immédiate, et ne rapportent par conséquent point d'intérêts. — Par cette méthode simple et naturelle qui consiste à établir un préavis des recettes et dépenses futures probables, Euler arrive facilement à l'équation finale:

$$3) \quad x + z \cdot \left(\frac{P}{(a)} + \frac{Q}{(b)} - \frac{R}{(a) \cdot (b)} \right) = 1000 \left(1 - \frac{i \cdot P}{(a)} - \frac{i \cdot Q}{(b)} + \frac{i \cdot R}{(a) \cdot (b)} \right)$$

La signification des symboles (a) , (b) , est celle indiquée précédemment (v. p. 447). Les lettres P , Q , R sont des abréviations pour les séries suivantes :

$$\begin{aligned} P &= (a + 1) \cdot v + (a + 2) \cdot v^2 + (a + 3) \cdot v^3 + \dots \\ Q &= (b + 1) \cdot v + (b + 2) \cdot v^2 + (b + 3) \cdot v^3 + \dots \\ R &= (a + 1) \cdot (b + 1) \cdot v + (a + 2) \cdot (b + 2) \cdot v^2 + \\ &\quad (a + 3) \cdot (b + 3) \cdot v^3 + \dots \end{aligned}$$

En notations modernes, $D_a = l_a \cdot v^a$ signifie „le nombre escompté des vivants pour l'âge a^u ”; en plus,

$$D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_{a+1} = N_a$$

représente la somme des nombres escomptés des vivants, et ces grandeurs, comme on sait, jouent un rôle fondamental dans les calculs de toutes les sociétés modernes d'assurance sur la vie opérant sur de solides bases techniques. Or, les séries P , Q , R définies par Euler sont en liaison étroite avec ces grandeurs fondamentales; l'équation 3) ci-dessus devient en notations modernes :

$$x + z \left(\frac{N_a}{D_a} + \frac{N_b}{D_b} - \frac{N_{ab}}{D_{ab}} \right) = 1000 \left[1 - i \left(\frac{N_a}{D_a} + \frac{N_b}{D_b} - \frac{N_{ab}}{D_{ab}} \right) \right]$$

Euler explique encore quelques artifices de calcul; il introduit p. ex. la différence d'âge des deux époux: $d = a - b$, et traite séparément les sept cas où $d = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$; le premier cas correspond à l'hypothèse que mari et femme ont le même âge, le septième à l'hypothèse que le mari a 30 ans de plus que sa femme. — Ce travail latin que nous venons d'analyser, du moins un premier jet de ce travail, était prêt avant l'œuvre principale „Éclaircissemens sur les établissemens publics...⁴ Cela est prouvé d'un côté, par la citation mentionnée ci-dessus, page 454, citation qui se trouve dans l'œuvre principale elle-même (page 48), d'un autre côté par le fait que déjà en 1770 paraissait une traduction libre en allemand, avec annotations, de ce mémoire latin d'Euler. La traduction allemande ¹⁾, publiée dans „*Neues Hamburger Magazin*“, tome 43, pages 3-12, est due à la plume de *A. G. Kästner* et porte le titre „*L. Eulers nötige Berechnung zur Einrichtung einer Witwenkasse*“ („Calcul nécessaire à l'établissement d'une caisse pour les veuves, d'après L. Euler“). Ce fait montre qu'Euler a contribué extrêmement à populariser les sociétés d'assurance en Allemagne aussi, et à les y établir sur d'excellents principes.

La troisième et dernière partie de l'œuvre principale d'Euler sur la science actuarielle traite du „*Plan d'une nouvelle espèce de Tontine*“ et compte 23 pages. Pour faire bien comprendre et apprécier à sa juste valeur ce très curieux travail, remarquable par son ingéniosité, nous commencerons par quelques expli-

¹⁾ *V. G. Valentin*: „Beitrag zur Bibliographie der Eulerschen Schriften.“ *Bibliotheca mathematica*, 1898, pag. 41-50.

cations sur les fameuses tontines. — Les tontines doivent leur nom à *Lorenzo Tonti*, médecin italien, originaire de Naples, né vers 1630. Le régime du cardinal *Mazarin* l'amena en France. Il mourut à Paris vers 1695, dans une misère complète, après avoir eu son temps de grande prospérité. — Pour faciliter l'émission d'un emprunt public, Tonti proposa, en 1653, au cardinal Mazarin la combinaison suivante : l'emprunt devait être divisé en 10 classes; quiconque voulait donner de l'argent à l'Etat s'engageait à verser 300 livres au denier 20, à fonds perdus; en payant cette mise, il acquérait pour lui-même ou pour une personne désignée par lui, le droit à une rente viagère annuelle; le montant de cette rente n'était pas fixe, mais croissait d'année en année, et voici pourquoi : chaque rentier était réparti dans l'une des 10 classes, selon son âge au moment du paiement de la mise; la première classe comprenait tous les rentiers au-dessous de 7 ans; la deuxième classe tous ceux dont l'âge dépassait 7, mais n'atteignait pas encore 14 ans; et ainsi de suite de 7 ans en 7 ans; la dixième classe enfin comprenait tous les rentiers âgés de plus de 63 ans. A la mort de chaque souscripteur, le revenu dont il avait joui devait accroître la part des survivants de sa classe. La somme totale des rentes que l'Etat avait à verser chaque année restait donc constante; on déterminait le montant de la rente d'année en année en divisant cette somme totale et constante par le nombre des survivants, et cela pour chaque classe séparément; de cette façon, la somme constante se répartissait entre un nombre toujours plus petit de rentiers, donc la part de chacun allait en augmentant. Les survivants étaient en quelque sorte les héritiers de ceux qui décédaient dans la même classe; à la fin, dit l'édit royal, „le dernier qui demeure d'une classe reçoit seul le revenu du capital des rentes de la classe“. Après la mort du dernier survivant, toute rente était éteinte au profit de l'Etat à qui les capitaux versés restaient échus. Enfin, le taux primitif de l'intérêt était proportionné à la classe dans laquelle se trouvait le rentier en raison de son âge : les jeunes devaient recevoir les rentes les moins élevées, les classes plus âgées proportionnellement davantage. — Telle était, en substance, la combinaison que Tonti proposa au cardinal Mazarin comme meilleure forme d'un emprunt d'Etat; d'après les plans de Tonti, le capital ne devait pas être remboursé; chacune des 10 classes formait une espèce d'association à héritage mutuel, et après la mort de tous, l'Etat était seul héritier universel.

Mentionnons le fait qu'un édit autorisa cette opération sous le nom de „tontine royale“, mais que le Parlement refusa d'abord d'enregistrer cet édit. Cependant, en 1689, à la suite de guerres qui avaient épuisé

le Trésor, Louis XIV revint à l'idée de Tonti et ouvrit la première tontine d'Etat, bien que toutes les classes n'eussent point été remplies; cette tontine fonctionna du reste jusqu'en 1726 et ne cessa que par le décès de la veuve d'un médecin parisien, âgée de 96 ans, laquelle jouissait au moment de sa mort d'un revenu de 73,500 livres de rentes. — Depuis, plusieurs tontines furent créées en France, dans les grands embarras financiers; ce n'est que tard que l'on s'aperçut combien ce mode d'emprunt est onéreux. De France, le système des tontines gagna d'autres pays. On ouvrit même des tontines privées, les premières également en France. La plus vaste tentative de ce genre fut la fameuse „*Caisse Lafarge*“ qui, après un succès momentané très grand, tomba en déconfiture et causa beaucoup de malheur, entre autres parce qu'il lui manquait une bonne base technique.

Euler a clairement reconnu les grands défauts de ces tontines, mais il a aussi conçu l'idée d'une transformation complète de cette institution; il indique cette idée plus qu'il ne la développe dans la troisième partie de son œuvre principale sur la science actuarielle; d'abord, il fait ressortir que les avantages des tontines ordinaires sont contrebalancés par les désavantages suivants :

1. Le nombre des participants est limité, restriction désagréable au public autant que désavantageuse pour l'Etat;
2. La tontine une fois formée et fonctionnant, de nouveaux membres ne peuvent plus y être admis;
3. Les adhérents ne savent jamais à l'avance combien de rentes ils recevront l'année suivante pour leur capital mis à fonds perdus;
4. Le versement à effectuer est fixe et égal pour tout le monde; il s'ensuit qu'on ne peut pas l'adapter à la bourse de personnes dont l'état et la fortune sont très différents, et cela empêche plusieurs d'entrer;
5. La tontine s'éteint avec la mort du dernier membre; l'Etat n'en tire donc qu'un profit passager.

Euler a imaginé une institution qui n'a aucun de ces désavantages; „elle diffère tant de la tontine commune et lui est si préférable que ce n'est qu'à l'égard des rentes croissantes que nous la nommons ainsi“, écrit-il. On peut décrire cette institution de la façon suivante : Imaginons qu'un Etat ouvre à la fois 95 tontines différentes : dans la première ne sont admis que des nouveaux-nés; dans la deuxième, seulement des enfants qui courent la deuxième année de leur vie; dans la troisième, uniquement ceux dont l'âge est compris entre deux et trois ans, et ainsi de suite; la 95^e tontine enfin renferme seulement des personnes âgées

de plus de 94 ans. Le nombre 95 n'est pas essentiel; nous l'avons choisi, parce que c'est cet âge qui est considéré comme limite supérieure de la durée de la vie humaine dans la table de mortalité de Kerseboom dont Euler se sert constamment dans ses calculs; en notations modernes, il faudrait remplacer 95 par ω . — Les 95 tontines que nous venons de mentionner doivent être considérées comme indépendantes l'une de l'autre. — L'année suivante, le même Etat crée de nouveau 95 tontines indépendantes, d'après le même plan, de sorte qu'il y en a maintenant 190 en fonction. La troisième année, il en ouvre de nouveau 95 nouvelles, et ainsi de suite d'année en année. S'il arrivait que dans une certaine classe d'âge, ou même dans plusieurs, aucun membre ne s'annoncé, on créerait cette année-là, moins de 95 tontines nouvelles; il est aussi loisible à l'Etat de réunir plusieurs classes d'âge en un seul groupe, si le nombre des nouveaux participants est trop restreint. — C'est l'ensemble de toutes ces tontines, considéré comme un grand tout, qui constitue le nouvel établissement qu'Euler a en vue. On voit immédiatement qu'il y est donné libre accès en tout temps et à toutes les personnes qui se présentent, sans égard ni à leur âge, ni à leur nombre, ni même à la somme qu'elles déposent. Mais cette institution n'a pas non plus les désavantages énumérés ci-dessus sous chiffres 3., 4., 5. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à se représenter son fonctionnement, p. ex. de la façon suivante: considérons l'une de ces nombreuses tontines partielles, choisie à volonté, mais bien déterminée; disons qu'elle contient N membres, chacun âgé de a ans. Ces N personnes forment une société à héritage mutuel; chaque membre paie, lors de son entrée, une certaine mise, disons 1000 roubles. Le fonds ainsi versé à la caisse commune, ascendant à $1000 \cdot N$ roubles, est placé à un certain taux d'intérêts que nous supposons, avec Euler, être de 5%. Par conséquent, il y aura chaque année une somme constante de $50 \cdot N$ roubles à répartir entre les survivants de la tontine considérée; or, au bout de n années, le nombre primitif N des membres sera vraisemblablement réduit à $\frac{(a+n)}{(a)}$ $\cdot N$ (voir page 447); chacun recevra donc probablement $50 \frac{(a)}{(a+n)}$ roubles. Cette expression montre que la rente de chaque membre est et reste indépendante du nombre des sociétaires, et qu'on peut la calculer à l'avance. Chaque membre tirera en effet une rente annuelle viagère dont le montant sera

$$\begin{aligned} \text{au bout de 1 an:} & \dots\dots\dots 50 \cdot \frac{(a)}{(a+1)} \\ \text{" " " 2 ans:} & \dots\dots\dots 50 \cdot \frac{(a)}{(a+2)} \end{aligned}$$

$$\text{au bout de 3 ans:} \dots\dots\dots 50 \cdot \frac{(a)}{(a+3)}$$

Ces sommes forment effectivement une progression croissante, puisque les valeurs $(a+1)$, $(a+2)$, ... vont en diminuant constamment.

Les considérations que nous venons de faire sont valables pour chacune des nombreuses tontines partielles; il suffit de remplacer a successivement par 1, 2, 3, 4, ... En se basant sur cette formule simple, Euler a calculé une table forte de $8\frac{1}{2}$ pages, „table qui marque combien une personne d'un âge quelconque peut toucher d'intérêts croissans annuels pour un Capital de 1000 Roubles, mis à fond perdu à la manière des Tontines“. Partant de l'idée très juste que les chiffres d'une table de mortalité ne sont pas d'une exactitude absolue, puisque variables, Euler n'a effectué le calcul que pour les âges divisibles par cinq; les valeurs intermédiaires sont simplement interpolées en progression arithmétique; il s'ensuit que sur cinq résultats, l'un est exact, les quatre autres trop élevés; à la longue, cela entraînerait sûrement des déficits. Mais Euler a calculé une deuxième „Table rectifiée à l'usage public“, qui est également forte de $8\frac{1}{2}$ pages, dans laquelle les intérêts croissans sont un peu diminués. A cet effet, Euler admet „que la cinquième partie de tous les membres décédens tourne au profit de l'établissement“. Les rentes croissantes de cette table rectifiée sont donc calculées comme si 80% seulement des décès indiqués par la table de mortalité arrivaient réellement; Euler diminue par conséquent de la cinquième partie l'excès de chaque nombre sur 50; au lieu de 55, la rente n'est que de 54; au lieu de 60, seulement de 58; au lieu de 65, seulement de 62, et ainsi de suite. „Cette diminution des prix doit mettre l'établissement entièrement à l'abri de tous les accidens extraordinaires, et des suites fâcheuses qui pourroient naître de l'incertitude des observations & des registres de mortalité, & de leur diversité, fondée sur la différence du Climat & du genre de vie.“ C'est une mesure de précaution qui permet de former une réserve, d'augmenter ainsi la solidité de la caisse, „et la sureté de la caisse doit entrer en compte avant tout“. — L'auteur analyse ensuite les avantages de son institution. La mise à verser lors de l'entrée n'est pas nécessairement de 1000 roubles; elle dépend entièrement de la volonté et de la fortune du souscripteur, et chacun pourra savoir à l'avance à combien de rentes croissantes il aura droit, pour chaque année jusqu'à la mort, sans avoir à s'inquiéter ni du nombre de pareils acheteurs, ni du nombre de ceux qui décèdent. — „Cette institution“, conclut Euler, „sera très propre à attirer un très grand nombre d'intéressans, nombre qui probable-

ment augmentera toujours au lieu de diminuer; vu que le nombre des morts sera toujours surpassé ou du moins en équilibre avec le nombre des nouveaux reçus. L'établissement sera permanent, tandis que les tontines ordinaires s'éteignent avec la mort du dernier membre; ce sera donc une source inépuisable de revenus, d'où l'Etat pourra tirer profit continuellement, „pourvu que la caisse conserve son crédit dans l'esprit du public“. — L'originalité de cette institution, sa grande ingéniosité, ressortent assez de l'esquisse que nous en avons donnée. Malheureusement, cet ouvrage d'Euler qui exerça une influence considérable, est devenu très rare et difficilement accessible.

Six ans après la publication des „Éclaircissemens...“, il en parut une traduction allemande (due à Kritter; Altenbourg, 1782. V. l'Encyclopédie de J. G. Krünitz, t. 71 [1796]). Si l'écrit français d'Euler fut bientôt entre les mains de tous les géomètres de France, la traduction allemande trouva aussi de très nombreux lecteurs. Cela suscita plusieurs publications sur la doctrine des annuités et la théorie mathématique des assurances sur la vie. Ainsi se répandit dans le public l'idée de ces utiles établissements et la connaissance élémentaire des principes sur lesquels ils reposent. Les tables numériques qu'Euler a calculées n'ont de nos jours plus guère qu'un intérêt historique; par contre, les méthodes excellentes qu'il employa et vulgarisa sont constamment appliquées.

Par les travaux que nous venons d'analyser, Léonard Euler a beaucoup fait pour le progrès de l'assurance et de la science actuarielle; il a contribué énormément à répandre l'idée de ces institutions, à attirer sur elles l'attention générale, à leur donner enfin la base mathématique et technique indispensable à leur équité et à leur stabilité. Du reste, la lecture de ses écrits est une vraie jouissance, grâce à la clarté remarquable du style, grâce à la manière habile de traiter les problèmes, grâce enfin à la sincérité avec laquelle ce grand maître nous indique les voies et moyens par lesquels il est arrivé à ses résultats.

Liste des écrits de Léonard Euler concernant le calcul des probabilités et ses applications.

Les nombres ajoutés en parenthèses rondes () indiquent la date d'impression. Des parenthèses carrées [] signifient qu'il s'agit d'annotations que von Fuss a faites dans son exemplaire personnel; elles se rapportent à la date d'exhibition du travail en question.

1. Dans sa correspondance, Euler a quelquefois traité des questions concernant la théorie des probabilités et ses applications. Les deux lettres à Frédéric II, roi de Prusse (l'une de 1749, l'autre de 1763), se rapportent même exclusivement à ce sujet. Elles

sont insérées dans ses *Opera posthuma*, tome 1, pag. 550—552; 553—554. De tous les travaux d'Euler publiés jusqu'à ce jour, la première de ces lettres peut être considérée comme le plus ancien écrit d'Euler sur les loteries.

2. Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre. *Mém. de Berl. t. 7.* 1751 (1753), pag. 255—270.

[? Berlin 1753, mars 8. — Chez Jacobi: ... dans les jeux de hasard.]

Dans une lettre de C.-G.-J. Jacobi à P.-H. von Fuss, lettre datée de Berlin, du 24 octobre 1847, se trouve en effet la mention d'un mémoire d'Euler ayant comme titre: *Calcul des probabilités dans les jeux de hasard*. Euler a lu ce mémoire à l'Académie des Sciences de Berlin le 8 mars 1753. Par sa remarque transcrite ici entre parenthèses carrées, von Fuss a voulu indiquer que la question de savoir s'il s'agit ici de deux mémoires différents d'Euler, ou si les deux sont identiques, est ouverte.

3. Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon. *Mém. de Berl. t. 20.* 1764 (1766), pag. 144—164. [Berlin 1755, févr. 27; encore une fois 1758, juillet 20.]

Il est impossible de trancher actuellement la question: le mémoire imprimé fut-il présenté deux fois? ou bien le premier mémoire fut-il retiré, puis un second mémoire portant le même titre fut-il présenté plus tard?

4. Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. *Mém. de Berl. t. 16.* 1760 (1767), pag. 144—164.
5. Sur les rentes viagères. *Mém. de Berl. t. 16.* 1760 (1767), pag. 165—175.
6. Réflexions sur une espèce singulière de loterie nommée loterie génoise. *Op. post. t. 1.* (1862), pag. 319—335. Présenté à l'Académie de Berlin le 10 mars 1763.
7. Sur la probabilité des séquences dans la loterie (!) Génoise. *Mém. de Berl. t. 21.* 1765 (1767), pag. 191—230.
8. Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités. *Mém. de Berl. t. 25.* 1769 (1771), pag. 285—302. [1770, nov. 29.]

9. Éclaircissemens sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d'une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au public qu'utile à l'État, calculés sous la direction de Monsieur Léonard Euler. Par Mr. Nicolas Fuss. Adjoint de l'Académie Impériale des Sciences. *A St-Petersbourg.* 4^e, 72 pages. [1776, mai 16.] Il existe une traduction allemande, faite par l'Administrateur Kritter et publiée en 1782 à Altenbourg.
10. Solutio quaestionis ad calculum probabilitatis pertinentis. Quantum duo coniuges persolvere debeant, ut suis haeredibus post utriusque mortem certa argenti summa persolvatur. *Op. anal. t. 2.* (1785), pag. 315—330. [1776, juin 10.] (Solution d'une question se rapportant au calcul des probabilités. Combien deux époux doivent payer pour qu'après le décès de chacun d'eux, il soit payé à leurs héritiers une certaine somme d'argent.)

En 1770 déjà parut dans „Neues Hamburger Magazin“, t. 43, pag. 3—12, une traduction libre de ce mémoire latin, intitulée: „L. Eulers nöthige Berechnung zur Einrichtung einer Witwenkasse“ (Calcul nécessaire à l'établissement d'une caisse pour les veuves, d'après L. Euler). La rédaction allemande est due à A.-G. Kästner.

11. Observationes in praecedentem dissertationem Illustr. Bernoulli. *A. Petr. t. 1.* 1777 I (1778), pag. 24—30. [1776, déc. 5.] (Observations au sujet du mémoire précédent du très Illustre Bernoulli.)

L'écrit en question de Daniel Bernoulli, rédigé également en latin, se trouve dans le même volume et en occupe les 23 premières pages. Il porte comme titre: „Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium, atque verisimillima inductio inde formanda.“ (Le jugement le plus probable de plusieurs observations discordantes entre elles, et la conclusion la plus vraisemblable à tirer de là.)