Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung.

Von Dr. L. Gustav Du Pasquier, Professor an der Universität in Neuenburg.

I. Eine aus $l_n^{\overline{aa}} = z_n$ gleichaltrigen aktiven Personen bestehende Versicherungsgemeinschaft B_a verändere sich aus d r e i Ursachen: 1. durch Absterben der Mitglieder; 2. durch Invalidwerden derselben; 3. infolge Reaktivierung der Invaliden. Die invalid Gewordenen bilden mit der Zeit eine zweite Versicherungsgemeinschaft B_i, deren Mitgliederanzahl anfänglich $l_n^{\overline{ii}} = \zeta_n = 0$ ist. Dieser zweite Bestand B_i möge sich ebenfalls aus d r e i Ursachen verändern: 1. weil er fortwährend aus den Reihen der Aktiven Zuwachs erhält; 2. durch Absterben der Mitglieder; 3. infolge Reaktivierung derselben. Der Inbegriff der zwei Bestände B_a und B_i soll eine geschlossene, d. h. von Ein- und Auswanderungen freie, Gesamtheit bilden.

Nach Ablauf einer bestimmten Zeit bestehe die erste Versicherungsgemeinschaft B_a aus $l_x^{\overline{aa}} = z_x$ Mitgliedern, die zweite, B_i, aus $l_x^{\overline{ii}} = \zeta_x$ Personen. Es ist der Zusammenhang zwischen den betreffenden Anzahlen zu untersuchen.

II. Die mathematisch strenge Behandlung dieses Problems erheischt die Einführung folgender sechs Ausscheideordnungen:

a) für den Versicherungsbestand B_a der Aktiven:

1. die tatsächlich sich einstellende Reihe
$$l_n^{\overline{aa}},\ l_{n+1}^{\overline{aa}},\ \ldots\ldots,\ l_x^{\overline{aa}},\ \ldots\ldots\ 0 \quad (\textit{Reihe der } z_x);$$
2. diejenige Ausscheideordnung, die sich ergeben würde, wenn n u r die Sterblichkeit einwirkte, wenn also jedes invalid werdende Mitglied des Bestandes sofort durch ein neues, gleichaltriges, aktives ersetzt würde:
$$l_n^{\overline{aa}},\ {}'l_{n+1}^{\overline{aa}\,(\mu)},\ \ldots\ldots,\ {}'l_x^{\overline{aa}\,(\mu)},\ \ldots\ldots\ 0$$
$$(\textit{Reihe der } z_x^{(\mu)});$$
3. diejenige Ausscheideordnung, die sich einstellen würde, wenn n u r die Invalidierungsursachen auf den Bestand einwirkten, wenn also jedes mit Tod abgehende Mitglied sofort durch ein neues, gleichaltriges, aktives Mitglied ersetzt würde:
$$l_n^{\overline{aa}},\ {}'l_{n+1}^{\overline{aa}\,(\nu)},\ \ldots\ldots,\ {}'l_x^{\overline{aa}\,(\nu)},\ \ldots\ldots\ 0 \quad (\textit{Reihe der } z_x^{(\nu)});$$

b) für den Versicherungsbestand B_i der Invaliden:

4. die tatsächlich sich einstellende Reihe
$$l_n^{\overline{ii}} = 0,\ l_{n+1}^{\overline{ii}},\ \ldots\ldots,\ l_x^{\overline{ii}},\ \ldots\ldots\ 0$$
$$(\textit{Reihe der } \zeta_x);$$
5. diejenige Ausscheideordnung, die sich ergeben würde, wenn auf den betreffenden Bestand von Invaliden n u r die Sterblichkeit einwirkte, wenn also jedes wieder in die Reihen der Aktiven übertretende Mitglied sofort durch ein neues, gleichaltriges, invalides ersetzt würde:
$${}'l_x^{\overline{ii}\,(\mu)},\ {}'l_{x+1}^{\overline{ii}\,(\mu)},\ \ldots\ldots\ 0 \quad (\textit{Reihe der } \zeta_x^{(\mu)});$$
6. die Ausscheideordnung, die eintreten würde, wenn ausschliesslich Reaktivierung auf den Bestand einwirkte, was man sich dadurch realisiert denken kann, dass jeder mit Tod abgehende Invalide sofort durch einen neuen gleichaltrigen Invaliden ersetzt wird:
$${}'l_x^{\overline{ii}\,(\varrho)},\ {}'l_{x+1}^{\overline{ii}\,(\varrho)},\ \ldots\ldots\ 0 \quad (\textit{Reihe der } \zeta_x^{(\varrho)}).$$

III. Jede dieser sechs Ausscheideordnungen gibt Anlass zur Einführung bestimmter Intensitätsfunktionen und bestimmter Wahrscheinlichkeitsgrössen. Aus der Reihe der z_x leitet man in bekannter Weise ab:
$$\mu_x^{\overline{aa}},\ \nu_x,\ p_x^{\overline{aa}},\ q_x^{\overline{aa}},\ \text{usw.}$$

Aus der Reihe der $z_x^{(\mu)}$: ${}'\mu_x^{\overline{aa}},\ {}'p_x^{\overline{aa}\,(\mu)},\ {}'q_x^{\overline{aa}\,(\mu)},\ \ldots\ldots$

„ „ „ „ $z_x^{(\nu)}$: ${}'\nu_x,\ {}'p_x^{\overline{aa}\,(\nu)},\ {}'i_x,\ \ldots\ldots$

„ „ „ „ ζ_x: $\mu_x^{\overline{ii}},\ \varrho_x,\ p_x^{\overline{ii}},\ q_x^{\overline{ii}},\ \ldots\ldots$

„ „ „ „ $\zeta_x^{(\mu)}$: ${}'\mu_x^{\overline{ii}},\ {}'p_x^{\overline{ii}\,(\mu)},\ {}'q_x^{\overline{ii}\,(\mu)},\ \ldots\ldots$

„ „ „ „ $\zeta_x^{(\varrho)}$: ${}'\varrho_x,\ {}'p_x^{\overline{ii}\,(\varrho)},\ {}'r_x,\ \ldots\ldots$

(Die „partiellen Grössen“ [von Karup und andern Autoren „unabhängige“ Grössen genannt] sollen stets durch einen Akzent links oben gekennzeichnet werden.)

IV. Setzt man jede der 6 Funktionen z_x, $z_x^{(\mu)}$, $z_x^{(\nu)}$, ζ_x, $\zeta_x^{(\mu)}$, $\zeta_x^{(\varrho)}$ als differenzierbar voraus (Kontinuitätshypothese), so lässt sich beweisen, dass ${}'\mu_x^{\overline{aa}} = \mu_x^{\overline{aa}}$, ${}'\mu_x^{\overline{ii}} = \mu_x^{\overline{ii}}$, usw.

In Worten: Die einem bestimmten Alter entsprechende Sterbeintensität ist unabhängig davon, ob ein Zugang oder ein Abgang von Mitgliedern aus irgendwelchen Ursachen erfolgt, solange die Kontinuitätshypothese gilt; und ganz allgemein: die Differenzierbarkeit obiger Funktionen ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass jede der Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x, ϱ_x, bei festgehaltenem x, auch dann unverändert bleibt, wenn die gleichzeitige Wirkung aller drei Veränderungsursachen (Sterben, Invalidierung, Reaktivierung) berücksichtigt wird. Ein ähnlicher Satz gilt aber nicht von den „partiellen Wahrscheinlichkeiten": $'p_x^{\overline{aa}}$, $'p_x^{\overline{aa}(\nu)}$, usw.

V. Setzt man die Differenzierbarkeit der Funktionen $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ voraus, so wird die Wechselwirkung der beiden Versicherungsbestände B_a und B_i aufeinander durch folgendes System von simultanen Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,l_x^{\overline{aa}}}{dx} &= l_x^{\overline{ii}} \cdot \varrho_x - l_x^{\overline{aa}}\left(\mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x\right) \\ \frac{d\,l_x^{\overline{ii}}}{dx} &= l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x - l_x^{\overline{ii}}\left(\mu_x^{\overline{ii}} + \varrho_x\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es gilt also, zwei Funktionen z und ζ derart zu bestimmen, dass

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \zeta \cdot \Phi(x) - z(f(x) + F(x)) \\ \frac{d\zeta}{dx} &= z \cdot F(x) - \zeta(\varphi(x) + \Phi(x)) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(erste Ausdrucksform);

oder eine Funktion z, welche der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \cdot k_1(x) + z \cdot k_2(x)$$

genügt (zweite Ausdrucksform); oder eine Funktion v von der Eigenschaft, dass

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + g(x),$$

unter $g(x)$ eine beliebige Funktion verstanden (dritte Ausdrucksform).

VI. Die obigen Gleichungen sind im allgemeinen, mit Hilfe der bekannten elementaren Funktionen, nicht in geschlossener Form integrierbar.

VII. In einigen Spezialfällen kann man das obige Gleichungssystem (1) in geschlossener Form integrieren. Unter den von mir behandelten Spezialfällen seien hier nur die zwei folgenden erwähnt:

1. Der Fall, in welchem keine Reaktivierung stattfindet. Es ergeben sich dabei teils schon bekannte Beziehungen, z. B. die zuerst von J. Karup in anderer Bezeichnung aufgestellte Formel:

$$p_x^{\overline{aa}} = {'p_x^{\overline{aa}(\mu)}} \cdot {'p_x^{\overline{aa}(\nu)}},$$

teils solche, die bis jetzt noch nicht aufgestellt wurden und die von den Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit und der Invalidität abhängig sind und auch vom angestrebten Genauigkeitsgrad, z. B.:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {'p_x^{\overline{ii}(\mu)}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {'p_x^{\overline{ii}(\mu)}} \cdot \frac{1 + {'p_x^{\overline{aa}(\mu)}}}{1 + {'p_x^{\overline{ii}(\mu)}}},$$

oder:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = {'p_x^{\overline{ii}(\mu)}} \cdot \left\{ l_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot \left(1 + \frac{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x}{2}\right)\right\}$$

2. Der Fall, in welchem die vier Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x, ϱ_x als während der Dauer eines Jahres konstant angesehen werden. Der Zusammenhang zwischen $l_x^{\overline{aa}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ lässt sich dann mit Hilfe der Hyperbelfunktionen in einfacher Weise darstellen. Aus den strengen Formeln leitet man leicht Näherungsformeln ab, je nach dem erstrebten Genauigkeitsgrade. Als zu den einfachsten gehörend zitiere ich z. B. die folgenden:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot (1 - \sigma)\left(1 + \frac{1}{x - n}\right).$$

Dabei ist $\sigma = \frac{1}{2}\left(\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_x^{\overline{ii}} + \nu_x + \varrho_x\right)$, und n bedeutet das niedrigste Alter, in welchem der Eintritt von Erwerbsunfähigkeit im betrachteten Versicherungsbestande überhaupt konstatiert wird; mit andern Worten: n bedeutet dasjenige Alter, in welchem alle Versicherten noch aktiv sind.

$$l_{x+1}^{\overline{aa}} = l_x^{\overline{aa}} \cdot (1 - \sigma)(1 + k),$$

$$\text{wobei} \quad k = \sigma - \mu_n^{\overline{aa}} - \nu_n.$$

Letztere Formel liefert zwar für die Anzahlen $l_x^{\overline{aa}}$ der Aktiven eine geometrische Progression, solange man σ und k konstant hält. Man kann ihnen aber sehr wohl von Jahr zu Jahr wechselnde Werte beilegen und so dem tatsächlichen Verlauf möglichst nahe kommen. Für die jüngeren Alter wird man diese Konstanz, ohne erheblichen Fehler, auf einen längeren Zeitraum ausdehnen können und das Produkt $(1 - \sigma)(1 + k)$ nur für Zeitabschnitte von z. B. fünf Jahren neu berechnen. Die entsprechende Aktivitätsordnung setzt sich dann aus einer Serie von geometrischen Progressionen zusammen.

Auch für den Fall, dass die Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x, ϱ_x nicht als konstant angesehen werden, habe ich Integrabilitätsfälle des Gleichungssystems (1) gefunden und behandelt.

In einem zweiten Teile sollen mit Hülfe der gefundenen Beziehungen Formeln abgeleitet werden, die es gestatten, Rentenbarwerte und Prämien zu berechnen.