Mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung.

Von Dr L. Gustav Du Pasquier, Professor an der Universität zu Neuchâtel.

Inhaltsübersicht.

I. Kapitel.

Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichungen.

§ **1.** Die seit einigen Jahrzehnten in Angriff genommene Theorie der Invaliditätsversicherung soll in vorliegender Arbeit auf eine neue Art begründet werden, speziell in bezug auf die Frage, wie die „Reaktivierung", mit der sich schon einige Autoren beschäftigt haben, ohne eine streng begründete Lösung zu geben, zu berücksichtigen sei.

Man betrachte einen *geschlossenen* (das heisst von Ein- und Auswanderungen freien) Bestand von versicherten aktiven Personen gleichen Geschlechtes, die alle zur selben Zeit, in derselben Gegend und unter gleichen Lebensbedingungen, denselben bestimmten Beruf ausüben; wir bezeichnen diesen Bestand mit B_a. Er wird sich im Laufe der Zeit aus *zwei* Ursachen ändern; erstens, weil seine Mitglieder nach und nach absterben; zweitens, weil ein Teil der Mitglieder „invalid" wird und infolgedessen den Beruf nicht mehr ausübt.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es nicht wesentlich, ob der einzelne Versicherte mehr oder weniger unter den Begriff Beamter, oder Angestellter, oder Arbeiter fällt. Ebenso ist die Frage nach der *Ursache* der „Invalidität" offen gelassen, d. h. die Frage, ob eine Ausscheidung infolge vorgerückten Alters stattfindet, also Altersinvalidität (die sogar gesetzlich geregelt sein kann, wie vielfach im Militärwesen, in öffentlichen Verwaltungen, u. s. f.) oder Berufsinvalidität, oder ob Krankheits- oder ob Unfallsinvalidität vorliegt.

Die wegen „Invalidität" aus dem Bestande B_a der Aktiven ausgetretenen Versicherten bilden mit der Zeit einen zweiten Bestand, den wir mit B_i bezeichnen. Dieser letztere, aus lauter „Invaliden" bestehend, wird sich, von Null anfangend, zunächst vermehren, dann mit mehr oder weniger grossen Schwankungen, die von der Sterblichkeit und von der Invalidisierungshäufigkeit abhängen, sich immer mehr verringern und schliesslich aussterben.

Der ganze Vorgang lässt sich durch ein sehr anschauliches physikalisches Bild verdeutlichen. Man denke sich ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Bassin B_a; in der Flüssigkeit schwebend mögen sich, dicht gedrängt, kleine Körnchen in sehr grosser Anzahl befinden. Diese, in ihrem flüssigen Milieu schwebenden Körperchen sollen eine Veranschaulichung des Bestandes der Aktiven sein. Wir setzen voraus, ihre *Anzahl* sei in dem Augenblick, in welchem die Beobachtung des Vorgangs beginnt, eine bekannte und bezeichnen diese Zahl mit l_n^{aa} oder kürzer mit z_n.

Die Tatsache, dass wir einen geschlossenen Bestand voraussetzen, kommt dadurch zum Ausdruck, dass dieses Bassin keinen Zufluss erhält. Dagegen soll sich sein Inhalt aus zwei Ursachen verringern:

1. Durch eine erste, mit einer geeigneten mechanischen Vorrichtung versehene Öffnung gelangt ein Teil des Inhaltes ins Freie. Dadurch soll der Abgang der versicherten Mitglieder durch Tod veranschaulicht werden.

2. Durch eine zweite, mit Abflussrohr versehene Öffnung, in welchem auch eine geeignete, mechanische Pumpvorrichtung funktioniert, gelangt ein weiterer Teil des Inhaltes von B_a in einen danebenstehenden zweiten Behälter B_i. Dadurch soll die Verminderung der Anzahl der Aktiven durch Invalidisierung zum Ausdruck kommen. Um nun auch den Umstand zu berücksichtigen, dass die Sterblichkeit und die Invaliditätshäufigkeit mit wachsendem Alter grösser werden, nehme man etwa an, die beiden Pumpvorrichtungen arbeiten mit der Zeit rascher. Man kann sich jedenfalls den Mechanismus derart eingerichtet denken, dass er die Intensität der Sterblichkeit und die der Invalidität, als Funktionen der Zeit betrachtet, genau wiedergibt.

Ein ähnliches Bild eignet sich für den andern Versicherungsbestand B_i: Man stelle sich jenen zweiten Behälter vor (wir bezeichnen ihn ebenfalls mit B_i), der vom ersten Bassin aus vermittelst des oben erwähnten Verbindungsrohres gespeist wird. Das zweite Bassin B_i möge ebenfalls mit einer Ablaufsvorrichtung versehen sein, durch welche auf mechanischem Wege der Inhalt von B_i nach und nach abfliesst. Dadurch soll die Sterblichkeit der „Invaliden" zum Ausdruck kommen. Es kann wieder vorausgesetzt werden, der Abflussmechanismus sei so eingerichtet, dass er die im Laufe der Zeit sich ändernde Sterbensintensität der „Invaliden" genau widerspiegelt. Man wird zu diesem Zweck den ganzen Mechanismus etwa dadurch ergänzen, dass man annimmt, jeder der beiden Behälter B_a und B_i sei oben durch einen beweglichen, mit dem Mechanismus verbundenen Kolben geschlossen, so dass auf die in den Behältern enthaltenen flüssigen Massen in geeigneter Weise der nötige Druck ausgeübt werde. (Siehe Figur in § 2.) Nach Ablauf einer genügend langen Zeit werden beide Behälter leer sein. — Diese beiden Bassins mit ihren veränderlichen Inhalten ergeben dann ein ziemlich treues Bild dessen, was mit dem ursprünglichen Versicherungsbestande B_a vorgeht.

Die mathematische Untersuchung dieses Vorganges soll einen Teil vorliegender Arbeit bilden. Es gilt, zwei Funktionen aufzustellen, die es ermöglichen, anzugeben, wie viel schwebende Körnchen sich in einem bestimmt, aber beliebig gewählten Zeitpunkt in jedem Behälter befinden und was für ein Zusammenhang zwischen diesen Anzahlen besteht. Die auf den ersten Behälter B_a bezügliche Funktion möge mit $l_x^{aa} = z(x) = z_x$, die auf den zweiten Behälter B_i bezügliche mit $l_x^{ii} = \zeta(x) = \zeta_x$ bezeichnet werden.

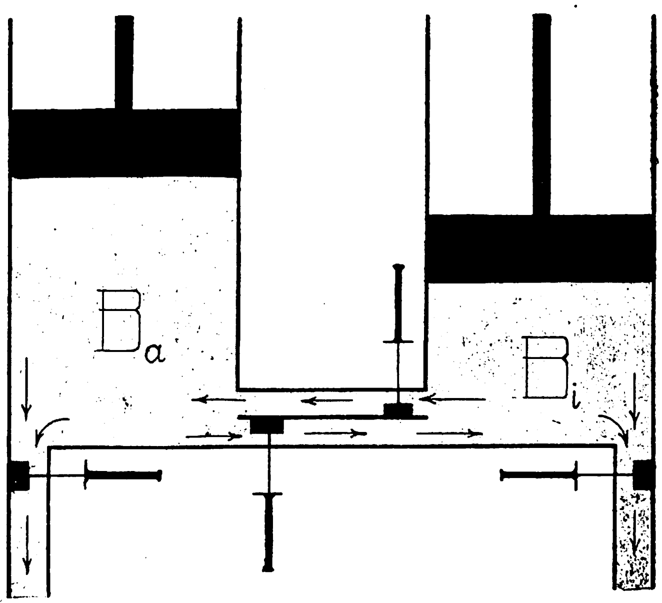
§ 2. Nun kommt es aber oft vor — glücklicherweise —, dass die „invalid" Gewordenen es nicht bis an ihr Lebensende bleiben, sondern teilweise wieder in die Reihen der Aktiven eintreten können. Es hat dann nicht nur der Bestand B_a einen Einfluss auf B_i, sondern auch das Umgekehrte findet statt. Dieser Vorgang (dass nämlich „Invalide" wieder aktiv werden und den Bestand, dem sie ursprünglich angehörten, wieder vermehren) wird *Reaktivierung* genannt.

In den bisherigen Erörterungen über Invaliditätsfragen wurde entweder die Reaktivierung gänzlich vernachlässigt, soweit es sich um theoretische Untersuchungen handelte; oder die Reaktivierten wurden unmittelbar von den Invalidgewordenen in Abzug gebracht, was, streng genommen, nur dann zulässig ist, wenn sich die Invalidenrente *nicht* nach dem Dienstalter richtet; oder aber es wurden willkürliche, mit der Erfahrung mehr oder weniger gut im Einklang stehende, Ansätze gemacht; die Lösungen entbehren jedoch einer strengen Begründung. Mit Ausnahme einer Arbeit von Herrn Hofrat *W. Küttner* (erschienen in der „Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen“, Bd. XXXVI, Seite 1—62, betitelt: „Neuere Untersuchungen über die Invalidität der Steinkohlenbergleute Preussens“, wo, auf Grund der preussischen Knappschaftsstatistik und meines Wissens zum ersten Male, mathematisch begründete Formeln gegeben werden, in denen Reaktivierungswahrscheinlichkeiten figurieren) fehlte bisher eine mathematisch einwandfreie Untersuchung des Einflusses, den die Reaktivierung auf die Veränderung eines Versicherungsbestandes ausübt. Die Frage ist nicht nur theoretisch interessant, sondern auch für die Praxis wichtig, denn diese Reaktivierungen spielen namentlich bei staatlichen Arbeiterversicherungen eine nicht unbeträchtliche Rolle. Auch die Krankenversicherung erhielte durch eine auf dieser Basis ruhende Theorie die mathematisch richtige Grundlage. So habe ich mir, einer Anregung von Herrn Direktor Dr. *G. Schärtlin* Folge leistend, die Aufgabe gestellt, den Einfluss der Reaktivierung vom mathematisch-technischen Standpunkte aus zu studieren, die entsprechenden Aktivitäts- und Invaliditätsordnungen aufzustellen (I. Teil dieser Arbeit) und daran anknüpfend Formeln zur Berechnung von Rentenbarwerten und Prämien abzuleiten (II. Teil).

Den Einfluss der Reaktivierung kann man ebenfalls veranschaulichen. Nehmen wir wieder das obige Bild der beiden nebeneinanderstehenden Behälter B_a und B_i auf, so bedarf es einer kleinen Vervollständigung (siehe Figur). Man stelle sich vor, der zweite Behälter B_i habe, ausser den zwei oben beschriebenen Öffnungen, noch eine dritte mit einem Abflussrohr versehene, in welchem eine geeignete mechanische Pumpvorrichtung funktioniert. Dieses dritte Abflussrohr mündet in den ersten Behälter B_a ein. So gelangt ein Teil des Inhaltes von B_i nach B_a zurück und vermengt sich dort sofort mit dem noch vorhandenen. Wir setzen endlich voraus, dieser Rückfluss vom zweiten Bassin in das erste sei derart geregelt, dass er die Intensität der Reaktivierung in jedem Momente genau wiedergibt.

Unter Berücksichtigung der Reaktivierung stehen die beiden Behälter B_a und B_i in symmetrischer Wechselwirkung zueinander. Jeder von ihnen hat *drei* Öffnungen. Durch eine derselben erhält er Zufluss aus dem andern Behälter (Invalidisierung für B_i, Reaktivierung für B_a); dagegen verringern die beiden andern Öffnungen seinen Inhalt, indem die eine ins Freie abführt (Sterblichkeit), die letzte in den andern Behälter.

Die mathematische Untersuchung der gegenseitigen Einwirkung dieser beiden Bassininhalte aufeinander, bezüglich ihrer jeweiligen Quantität, soll den ersten Teil vorliegender Arbeit bilden. Sie führt nämlich, unter gewissen Voraussetzungen, auf dieselben Gleichungen wie die mathematische Behandlung der Veränderungen, die ein geschlossener Versicherungsbestand erfährt, wenn Invalidisierung und Reaktivierung gleichzeitig berücksichtigt werden. Die Anzahl der Versicherten wird durch die sehr gross vorausgesetzte Anzahl der in der Flüssigkeit schwebenden Körperchen gegeben. Es ist vorteilhaft, die Symmetrie auch in der Bezeichnung hervortreten zu lassen, weil dadurch ein Teil der Rechnung erspart werden kann. Wir werden zu diesem Zwecke späterhin alles, was auf den ersten Behälter B_a Bezug hat, mit lateinischen, und alles, was sich auf B_i bezieht, mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen.



§ **3.** Um das hier vorliegende Problem der mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen, müssen wir zwei wesentliche Voraussetzungen treffen. Die sich einstellenden Erscheinungen führen zu einer Anzahl von Wahrscheinlichkeitsbegriffen, allerdings unter der stillschweigenden Annahme, dass die Bedingungen, welche dem ganzen Erscheinungskomplexe zugrunde liegen, den Wahrscheinlichkeitsbegriff überhaupt zulassen. Herr Professor Dr. *W. Lexis* hat durch ein methodisches Verfahren gezeigt, wie ein Urteil darüber zu erlangen ist, ob und inwieweit diese Voraussetzung erfüllt sei. Wir wollen indessen von dieser Vorfrage absehen und hier *die erste* wichtige *Voraussetzung* treffen: Der untersuchten Massenerscheinung liege ein derartiger Komplex von Bedingungen zugrunde, dass die statistischen Relativzahlen als empirische Werte einer festen Wahrscheinlichkeit, oder einer Funktion dieser Wahrscheinlichkeit, angesehen werden können.

Diese Hypothese schliesst nicht aus, dass die aus der Erfahrung abgeleiteten Sterbens- und Invaliditätswahrscheinlichkeiten allezeit mit Vorsicht anzuwenden sind. Man wird nicht vergessen dürfen, dass diesen Wahrscheinlichkeiten neben der Unvollkommenheit, die sie als Wahrscheinlichkeit *a posteriori* besitzen, noch die andere anhaftet, dass sie, strenge genommen, nur für eine nach Geschlecht, Ort, Zeit, Alterszusammensetzung, Beruf, Zivilstand und sonstigen Lebensbedingungen scharf abgegrenzte, überdies genügend gross vorausgesetzte Gruppe Geltung haben. Nun sind uns von den meisten Ursachen, welche die Invalidität und den Tod herbeiführen, zurzeit weder ihre Wahrscheinlichkeiten, noch die Wahrscheinlichkeiten, welche sie den fraglichen Ereignissen verleihen, bekannt. Im allgemeinen nimmt man an: 1. dass diese Wahrscheinlichkeiten konstant sind; 2. dass die Ursachen immer dieselben bleiben, und 3. dass sie sich gleichmässig über das Beobachtungsgebiet erstrecken. Die dritte Bedingung kann durch genügend scharfe Abgrenzung der Beobachtungsgruppe annähernd erfüllt werden. Eine genaue Prüfung der einschlägigen Verhältnisse ergibt aber, dass die ersten beiden Bedingungen im strengen Sinne wohl niemals erfüllt werden; denn die Fortschritte der medizinischen Wissenschaften und die täglich wachsende Fürsorge für Gesunde und Kranke können unmöglich ohne Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, welche eine Anzahl Ursachen den fraglichen Ereignissen verleiht, bleiben. Auch ist mit Bestimmtheit zu erwarten, dass sich im Laufe der Zeit die Wahrscheinlichkeit von verschiedenen Ursachen erhöhen, von andern vermindern wird, und dass endlich ganz neue Ursachen auftreten werden.

Besonders was Invaliditätsziffern anbelangt, erscheint grosse Vorsicht geboten, denn wir haben es hier mit einem mehr oder weniger dehnbaren und im Laufe der Zeit sich wohl auch ändernden Begriff zu tun. Schon für die Sterblichkeit der Aktiven sind sehr abweichende Werte gefunden worden, und doch ist das Sterben ein bestimmter, von der schwankenden Beurteilung dritter Personen unabhängiger Vorgang. Nicht so das „Invalidwerden“. Hier und da genügt eine Reihe von Dienstjahren, um (als noch vollständig Arbeitsfähiger) in die Klasse der „Invaliden“ eintreten zu können; auch sind die Ansprüche der Betriebsleiter an die Arbeitsfähigkeit des Personals nicht immer dieselben; endlich kommt, bei Anerkennung der „Invalidität“, viel auf die mehr oder weniger nachsichtige Begutachtung der Ärzte an.

Die Änderung der Wahrscheinlichkeiten wird aber im allgemeinen nur klein sein und bald in dem einen, bald in dem andern Sinne stattfinden. Wenn man noch ausdrücklich voraussetzt, dass sich die Ursachen gleichmässig über das Beobachtungsgebiet erstrecken, d. h. dass auf jedes Individuum der Beobachtungsgruppe alle möglichen Ursachen einwirken können, darf angenommen werden, *die relativen Häufigkeiten* fraglicher Ereignisse, d. h. die einmal gefundenen Verhältnisse ihres Eintreffens und Nichteintreffens, seien ein numerischer Ausdruck für die betreffenden Wahrscheinlichkeiten. In diesem Fall rechtfertigt sich die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, besonders wenn darauf Rücksicht genommen wird, dass die gefundenen Werte Funktionen der Zeit sind.

Die zweite wesentliche *Voraussetzung* wird in der „Kontinuitätshypothese“ bestehen, von der man in den meisten Gebieten der angewandten Mathematik Gebrauch macht. Wenn wir das oben herangezogene Bild der beiden Behälter B_a und B_i nochmals benutzen, wird diese zweite Hypothese darin bestehen, dass wir annehmen, die in ihrem Milieu schwebenden Körperchen, welche die Versicherten repräsentieren, seien so dicht gedrängt und derart beschaffen, dass sie den Raum stetig erfüllen und zwischen sich keine Lücken lassen. Mathematisch ausgedrückt: Die beiden am Schlusse von § 1 eingeführten Funktionen $z(x)$ und $\zeta(x)$ werden als *differenziierbar,* demnach auch als *stetig,* vorausgesetzt. (Vergl. Fussnote 1 in § 25.)

§ **4.** Die Wahrscheinlichkeitsgrössen, welche sich auf Sterblichkeit und Invalidität zugleich beziehen, ferner ihre gegenseitige Abhängigkeit, endlich ihre Ableitung aus Beobachtungen, waren in den letzten Dezennien Gegenstand vielfacher Studien und lebhafter Kontroversen. Es war nicht leicht, alle hier massgebenden Grössen scharf zu erkennen, und es konnte auch nicht gleich gelingen, sie so zu definieren, dass sie der empirischen Bestimmung zugänglich wurden. Besonders lebhaft entbrannte die Kontroverse nach dem Bekanntwerden eines von der Gothaer Lebensversicherungsbank im Auftrage des Reichskanzleramtes verfassten Gutachtens über Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse der Reichsbeamten. In diesem von Herrn *Johannes Karup* herrührenden, im Jahr 1875 verfertigten Gutachten, das in Versicherungskreisen bedeutendes Aufsehen erregte, wird die Invaliditätswahrscheinlichkeit als diejenige definiert, „welche zum Ausdruck gelangen würde, wenn die Sterblichkeit für den gegebenen Zeitraum nicht vorhanden wäre“. Diese dort sogenannte „unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit“ würde sich also einstellen, wenn die Herabminderung der Anzahl der Aktiven *nur* durch Invalidisierung, nicht auch durch Tod, erfolgte, unter der Vorstellung also, dass jedes aus der Gruppe der Aktiven infolge Todes ausscheidende Mitglied sofort wieder durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt werde. Bei Ermittlung dieser „unabhängigen“ Invaliditätswahrscheinlichkeit wird demnach so verfahren, dass die sterbenden Aktiven als Ausscheidende, als freiwillig Austretende, betrachtet werden. — Dieser von Herrn *Johannes Karup* konstruierte Begriff der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeit stiess auf lebhaften Widerspruch, namentlich bei *G. Behm* [1]), *J. Dienger* [2]), *K. Heym* [3]) und *H. Zimmermann* [4]). Sie sahen sich veranlasst, diesem Begriff als einem künstlich gebildeten und überflüssigen das Bürgerrecht zu versagen. Wenn man nun auch die Bezeichnung „unabhängige“ Wahrscheinlichkeit für nicht ganz passend hält, unter anderm, weil diese Bezeichnung einem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingebürgerten Sprachgebrauche nicht entspricht und deswegen irreleitend werden könnte, so ist doch, wie einige Autoren [5]) schon gezeigt haben, am Begriffe selbst festzuhalten. Auch vorliegende Arbeit wird den von Herrn *Johannes Karup* eingeführten „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeiten eine neue Stütze verleihen und den Streit um ihre theoretische Berechtigung zu ihren Gunsten entscheiden. Wir werden sie späterhin unter dem Namen „*partieller* Wahrscheinlichkeiten“ [6]) näher erörtern, ein Name, der sich den in der Differentialrechnung eingebürgerten Bezeichnungen anschliesst. Es handelt sich nämlich dort wie hier um eine veränderliche Grösse (hier die Anzahl der lebenden Aktiven), die von *mehreren* ebenfalls veränderlichen Grössen (hier von zweien: Sterbens- und Invalidisierungsintensität) abhängt. Man tut dann bekanntlich so, als wäre eine dieser letzteren Veränderlichen nicht als Veränderliche wirksam, sondern konstant, und betrachtet die Veränderungen, die sich unter dieser vereinfachenden Annahme einstellen. So gelangt man in der Infinitesimalrechnung zu „partiellen“ Veränderungen und „partiellen“ Differentialquotienten, hier zu „partiellen Intensitäten“ und „partiellen Wahrscheinlichkeiten“.

Es sind für den hier in Frage stehenden Begriff, ausser dem Namen „unabhängige“ Wahrscheinlichkeit, noch verschiedene andere vorgeschlagen worden: „neue“, „einfache“, „ideale“, „reine“, „absolute“ Wahrscheinlichkeit. Wenn nun auch der Name nicht die Hauptsache ist, so liegt doch kein Grund vor, sich an eine überall eingebürgerte Bezeichnungsweise nicht anzuschliessen, zumal wenn dieselbe, *mutatis mutandis*, den analogen Sachverhalt ausdrückt. Da in der Differentialrechnung, seit mehr als einem Jahrhundert und in allen Hauptsprachen, nicht von „unabhängigen“, oder „idealen“, oder „reinen“, sondern von „partiellen“ Differentialquotienten gesprochen wird, verdient auch der Name *partieller* Intensitäten und *partieller* Wahrscheinlichkeiten vor den andern den Vorzug.

§ **5.** Unsere Hauptaufgabe werden wir darin erblicken, die zwischen den auftretenden Wahrscheinlichkeitsgrössen bestehenden Beziehungen aufzudecken und zu zeigen, wie man mit ihrer Hülfe Absterbe- und Ausscheideordnungen aufstellen kann.

Um diese Aufgabe mathematisch zu behandeln, betrachten wir eine „fingierte Gesellschaft“, d. h. eine sehr grosse Anzahl *gleichaltriger* Personen desselben Geschlechtes, die am gleichen Orte, zur gleichen Zeit und unter gleichen Lebensbedingungen stehend, sich in den Dienst eines und desselben Berufes gestellt haben. Ihre Anzahl in einem bestimmten Zeitpunkte x bezeichnen wir in üblicher Weise mit $l_x^{\overline{aa}}$, oder abgekürzt mit z_x, oder einfach mit z, falls das Fehlen der Altersangabe x kein Missverständnis herbeiführen kann. Die ursprüngliche Anzahl z_n verringert sich dann nach und nach auf

$$z_{n+1},\ z_{n+2},\ \ldots,\ z_x,\ \ldots,\ z_\omega,\ 0, \qquad (1)$$

unter dem Einfluss von zwei gleichzeitig wirkenden Ursachen: Tod und Invalidisierung. Die nachstehenden Untersuchungen werden zeigen, dass dann unter anderem noch folgende Grössen in Betracht gezogen werden müssen:

[1]) „Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen.“ Berlin, 1876, p. 47—60. Ferner in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 28 (1878), p. 151—167.

[2]) *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 25 (1875), p. 455 bis 459; Bd. 26 (1876), p. 46 bis 48; ebenda p. 109 bis 111; Bd. 28 (1878), p. 195; ebenda p. 258 bis 260.

[3]) „Deutsche Versicherungszeitung“, 1876, Nr. 3 und 61.

[4]) „Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse.“ Berlin, 1886, p. 7 u. f. Ferner vom gleichen Verfasser: „Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik.“ Berlin, 1887, p. 44—53.

[5]) Vergl. *W. Küttner* in „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, begründet von *Schlömilch*, Bd. 25 (1880), p. 11—24; Bd. 31 (1886), p. 246—251.

J. Karup in „*Masius'* Rundschau der Versicherungen“, Bd. 26 (1876), p. 21—29; p. 80—82; p. 141—145; p. 437—451; Bd. 27 (Jahrg. 1877), p. 17—26; Bd. 28 (Jahrg. 1878), p. 219—238; besonders aber in seiner klassischen Arbeit: „Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät am 31. Dezember 1890.“ Dresden, 1893.

W. Lazarus in „*Masius'* Rundschau der Versicherungen“, Bd. 26 (1876), p. 218.

Das oben erwähnte, 1875 von *J. Karup* verfasste „Gutachten“ der Gothaer Lebensversicherungsbank ist übrigens niemals publiziert worden; die darin enthaltenen Resultate, welche hier in Betracht fallen, sind durch die diesbezügliche Polemik bekannt geworden. Vergl. die historische Notiz in § 36.

[6]) Wir werden im allgemeinen in der Bezeichnung einen *partiellen* Vorgang, d. h. einen solchen, bei dem *eine einzige Veränderungsursache* wirksam ist oder als wirksam betrachtet wird, durch einen Akzent links oben andeuten, z. B. $'p_x^{\overline{aa}}$; $'\mu_x^{\overline{aa}}$, u. s. w. Der Akzent rechts oben wird, nach dem allgemein befolgten Vorschlage von *Lagrange*, die Differentiation andeuten.

1. Die Anzahl derjenigen Versicherten, die in einem bestimmten Zeitpunkte x vorhanden wären, wenn auf den ursprünglichen Bestand von $l_n^{\overline{aa}} = z_n$ Personen *nur die Sterblichkeit,* nicht auch die Invalidität, einwirkte, mit andern Worten: Wenn jeder Invalidgewordene sofort durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt würde. Wir bezeichnen diese Anzahl [1]) mit ${}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}}$ oder mit $z_x^{(\mu)}$. Die Reihe

$$z_n, \; z_{n+1}^{(\mu)}, \; z_{n+2}^{(\mu)}, \; \ldots, \; z_x^{(\mu)}, \; \ldots, \; z_{\omega_1}^{(\mu)}, \; 0, \tag{2}$$

ergibt eine Absterbeordnung, die von der tatsächlich eintretenden $z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_\omega$, 0 wohl zu unterscheiden ist [2]).

2. Die Anzahl derjenigen Versicherten, die in einem bestimmten Zeitpunkte x vorhanden wäre, wenn auf den ursprünglichen Bestand von $l_n^{\overline{aa}} = z_n$ Personen *nur die Invalidität,* nicht auch die Sterblichkeit, einwirkte. Wir bezeichnen diese Anzahl [3]) mit ${}^{(\nu)}l_x^{\overline{aa}}$ oder mit $z_x^{(\nu)}$. Sie käme zustande, wenn jeder durch Tod ausscheidende Aktive sofort durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt würde. Die Reihe

$$z_n, \; z_{n+1}^{(\nu)}, \; z_{n+2}^{(\nu)}, \; \ldots, \; z_x^{(\nu)}, \; \ldots \tag{3}$$

stellt eine neue, von den zwei obigen verschiedene Ausscheideordnung dar. Die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen $z_x^{(\nu)}$ schliesslich Null wird, lassen wir hier ganz unerörtert, weil sie für die folgenden Betrachtungen nicht wesentlich ist.

3. Die Anzahl derjenigen Versicherten, welche in einem bestimmten Zeitpunkte x „invalid" sind und aus dem ursprünglichen Bestande der $l_n^{\overline{aa}} = z_n$ Aktiven hervorgingen, infolge Eintretens der Dienstunfähigkeit. Ihre Anzahl bezeichnen wir in üblicher Weise mit $l_x^{\overline{ii}}$, abgekürzt mit ζ_x oder einfach mit ζ, wenn durch das Wegfallen der Altersangabe kein Missverständnis hervorgerufen werden kann. Es ist demnach $l_n^{\overline{ii}} = \zeta_n = 0$, weil wir annehmen, der ursprüngliche Versicherungsbestand sei aus lauter gleichaltrigen Aktiven zusammengesetzt. Die Reihe

$$l_n^{\overline{ii}} = 0, \; l_{n+1}^{\overline{ii}}, \; l_{n+2}^{\overline{ii}}, \; \ldots, \; l_x^{\overline{ii}}, \; \ldots, \; l_{\omega_2}^{\overline{ii}}, \; 0, \tag{4}$$

stellt dann die tatsächlich sich ergebende Absterbeordnung der „Invaliden" dar, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass fortwährend neue Mitglieder, die „invalid" werdenden Aktiven, beitreten.

4. Die Anzahl derjenigen „Invaliden", die in einem gegebenen Zeitpunkt x vorhanden wäre, wenn man einen geschlossenen, anfänglich [3]) aus ${}^{(\mu)}l_n^{\overline{ii}} = \zeta_n^{(\mu)}$ „Invaliden" zusammengesetzten Bestand hätte absterben lassen, *ohne* dass neue Mitglieder hinzutreten. Wir bezeichnen diese Anzahl [3]) mit ${}^{(\mu)}l_x^{\overline{ii}}$, abgekürzt mit $\zeta_x^{(\mu)}$, oder einfach mit $\zeta^{(\mu)}$, wenn die Altersangabe nicht notwendig ist. Die Reihe der Zahlen

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_n^{(\mu)}, \; \zeta_{n+1}^{(\mu)}, \; \zeta_{n+2}^{(\mu)}, \; \ldots, \; \zeta_x^{(\mu)}, \; \ldots, \; 0, \text{ oder} \\ {}^{(\mu)}l_n^{\overline{ii}}, \; {}^{(\mu)}l_{n+1}^{\overline{ii}}, \; {}^{(\mu)}l_{n+2}^{\overline{ii}}, \; \ldots, \; {}^{(\mu)}l_x^{\overline{ii}}, \; \ldots, \; 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

ist dann nichts anderes als die gewöhnliche Mortalitätstafel einer geschlossenen Gesellschaft von $\zeta_n^{(\mu)} = {}^{(\mu)}l_n^{\overline{ii}}$ gleichaltrigen (n-jährigen) Personen unter dem Einflusse der ihnen eigentümlichen (von derjenigen der Aktiven verschiedenen) Sterblichkeit. — Die Zahlen

$$l_x^{\overline{aa}}, \; {}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}}, \; {}^{(\nu)}l_x^{\overline{aa}}, \; l_x^{\overline{ii}}, \; {}^{(\mu)}l_x^{\overline{ii}}, \text{ oder}$$

$$z_x, \quad z_x^{(\mu)}, \quad z_x^{(\nu)}, \; \zeta_x, \quad \zeta_x^{(\mu)}$$

bilden, bei veränderlichem x, fünf auseinanderzuhaltende Reihen. (Vergl. § 19.)

§ 6. Die mathematische Durchführung der Aufgabe erfordert weiter eine Definition der Invalidisierungsintensität, welche einem gegebenen Alter x entspricht. Fassen wir wieder den geschlossenen Versicherungsbestand B_a ins Auge, eine „fingierte Gesellschaft", zusammengesetzt aus $l_x^{\overline{aa}}$ aktiven Personen des Alters x, gleichen Geschlechts, am gleichen Ort und zu gleicher Zeit unter gleichen Lebensbedingungen stehend. Will man die Definition in einwandfreier Weise aufstellen, so dass man aus ihr streng begründete Formeln ableiten kann, so muss man zuerst den Fall betrachten, in welchem eine einzige Verminderungsursache auf den Bestand B_a einwirkt, etwa „Invalidität" allein. Wir werden uns also zunächst an die mit ${}^{(\nu)}l_x^{\overline{aa}}$ oder $z_x^{(\nu)}$ bezeichneten Anzahlen, an die obige Reihe (3), halten und uns vorstellen, jeder sterbende Aktive werde sofort durch einen neuen, mit dem Sterbenden gleichaltrigen Aktiven ersetzt.

Um die Raschheit des Invalidwerdens, die Invalidisierungskraft in irgend einem Alter x, zu messen, hat man folgende drei Grössen gleichzeitig in Betracht zu ziehen:

1. die Menge der Personen des betreffenden Alters x, die aktiv sind; ihre Zahl ist ${}^{(\nu)}l_x^{\overline{aa}} = z_x^{(\nu)}$;
2. die Menge der Invalidisierungsfälle bis zum Alter $x + \Delta x$, d. h. die Anzahl derjenigen unter den $z_x^{(\nu)}$ Aktiven, welche zwischen dem Alter x und dem Alter $x + \Delta x$ invalid werden. Diese Anzahl werde mit $(-\Delta^{(\nu)}l_x^{\overline{aa}}) = (-\Delta z_x^{(\nu)})$ bezeichnet, eine Bezeichnung, die sich von selbst darbietet nach der Gleichung:

[1]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

[2]) Vergl. die Bemerkung am Schlusse von § 23.

[3]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

[3]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

$$z^{(\nu)}_{x+\Delta x} - z^{(\nu)}_x = \Delta z^{(\nu)}_x;^{1)}$$

3. die Grösse der Altersdifferenz Δx.

Man wird berechtigt sein, nachstehende Aussagen zu machen:

Die Invalidisierungskraft ist um so grösser, je mehr Aktive dienstunfähig werden, also, bei festgehaltenen $z^{(\nu)}_x$ und Δx, proportional zu $(-\Delta z^{(\nu)}_x)$. Ferner: die Invalidisierungskraft ist um so grösser, je kleiner die Gruppe der $z^{(\nu)}_x$ Aktiven, aus welcher die Invaliden stammen, also, bei demselben $(-\Delta z^{(\nu)}_x)$ und gleichem Δx, umgekehrt proportional zu $z^{(\nu)}_x$. Und endlich: die Invalidisierungskraft ist um so grösser, je kürzer die Zeitspanne Δx ist, während welcher die $(-\Delta z^{(\nu)}_x)$ Aktiven dienstunfähig werden; sie ist also, bei festgehaltenem $z^{(\nu)}_x$ und gleichem $(-\Delta z^{(\nu)}_x)$, umgekehrt proportional zu Δx zu setzen. Hiernach bildet der Ausdruck

$$-\frac{\Delta^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}}{{}^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}\,.\,\Delta x} \tag{6}$$

ein Mass der Invalidisierungskraft für die Altersstrecke von x bis $(x+\Delta x)$; das Minuszeichen deutet an, dass es sich nur um eine Verminderung des Bestandes an Versicherten handeln kann.

Dieses Mass wird um so zutreffender sein, je kleiner das Zeitintervall Δx angenommen wird. Nun ist der Verkleinerung des Δx eine Grenze gesetzt durch die Menge der beobachteten Personen: würde man Δx so klein wählen, dass auf der Altersstufe $x \ldots (x+\Delta x)$ gar kein Invalidisierungsfall einträte, so ergäbe sich bei jedem Alter die Invaliditätsintensität Null, und dies widerspricht dem Wesen der Grösse. Weil nun die Verminderung des ursprünglichen Versicherungsbestandes B_a, also die Abnahme der anfänglichen Aktivenanzahl ${}^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}$ infolge Dienstunfähigkeit, nicht in stetiger Weise erfolgt, sondern in diskreten Zeitpunkten vor sich geht, so müssen wir die „Kontinuitätshypothese" heranziehen. Man denke sich also, $z^{(\nu)}_x$ sei eine stetige und differenziierbare Funktion des Alters x, deren Werte sich bei ganzzahligen und bei bestimmten gebrochenen Werten von x empirisch bestimmen lassen. Diese als stetig und differenziierbar vorausgesetzte Funktion $z^{(\nu)}_x$ liefert ein um so brauchbareres Bild der allmählichen Abnahme, je grösser der betrachtete Versicherungsbestand ist. Nimmt man für x einen ganz beliebigen Wert, so soll der zugehörige Wert $z^{(\nu)}_x$ oder ${}^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}$ die entsprechende Anzahl der Aktiven bedeuten, etwa in dem Sinne, dass er die Anzahl der Aktiven für den nächstliegenden Wert von x darstellt, für welchen sie empirisch ermittelt ist.

Hält man an diesen Vorstellungen fest, sowie an der Annahme, jeder mit Tod Abgehende werde sofort durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt, so kann man die Altersdifferenz Δx immer kleiner und kleiner werden lassen, kleiner als jede noch so kleine, im voraus angegebene Zahl. Der oben betrachtete Quotient (6) strebt dann einem bestimmten, endlichen Grenzwerte zu, und diesen Grenzwert nennen wir *partielle Invalidisierungsintensität beim Alter x* und bezeichnen sie mit ${}'\nu_x$ (vergl. Fussnote 6 in § 4):

$$
\begin{aligned}
{}'\nu_x = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\Delta^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}}{{}^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}\,.\,\Delta x}\right) &= -\frac{1}{{}^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}}\cdot\frac{d^{(\nu)\prime}\overline{l^{aa}_x}}{dx} \\
&= -\frac{1}{z^{(\nu)}_x}\cdot\frac{dz^{(\nu)}_x}{dx}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Ist nun $z^{(\nu)}_x$ als analytische Funktion von x gegeben, so kann nach dieser Formel ${}'\nu_x$ für jedes Alter x bestimmt werden. Durch diese Voraussetzungen erlangen wir den Vorteil, dass die Hülfsmittel der Analysis auch auf den Vorgang der Invalidisierung anwendbar werden.

§ 7. Es liegt nahe, eine andere Invalidisierungsintensität ν_x zu definieren, bei welcher nicht wie oben die ideelle Reihe (3) der $z^{(\nu)}_x$ zugrunde gelegt wird, sondern die unter dem doppelten Einfluss von Tod und Berufsunfähigkeit sich tatsächlich ergebende Tafel der $\overline{l^{aa}_x}$, d. h. die obige Reihe (1). Man hat dann gleichzeitig folgende Grössen in Betracht zu ziehen:

1. die Menge der Personen des betreffenden Alters x, die aktiv sind; $\overline{l^{aa}_x}$ sei ihre Anzahl. Sie bilden den neuen Versicherungsbestand, den wir jetzt ins Auge fassen. Um nachher die beiden Intensitäten ν_x und ${}'\nu_x$ besser miteinander vergleichen zu können, werden wir annehmen, der *anfängliche* Bestand sei in beiden Fällen von gleichem Umfang, so dass für den Zeitpunkt x die Gleichung $\overline{l^{aa}_x} = z^{(\nu)}_x$ gelten wird;
2. die Menge der Invalidisierungsfälle bis zum Alter $x+\Delta x$; sie möge mit $\left(-{}^{(\nu)}\Delta\overline{l^{aa}_x}\right)$ bezeichnet werden;
3. die Grösse der Altersdifferenz Δx.

---

[1]) Die Gleichung $z_{x+\Delta x} - z_x = \Delta z_x$ schliesst sich an die in der Differenzen- sowie in der Infinitesimalrechnung allüberall eingebürgerte Schreibweise an. Bedeutet nämlich $y = f(x)$ eine beliebige Funktion, so bezeichnet man bekanntlich ihre totale Änderung mit

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Da die Anzahlen $z^{(\nu)}_x$ bei wachsendem x monoton fallen, ist stets $z_{x+\Delta x} \leqq z_x$, also Δz_x (wenn nicht Null) eine negative, und $(-\Delta z_x)$ eine positive Zahl.

Durch ganz dieselben Überlegungen wie in § 6 wird man dazu geführt, den Ausdruck

$$-\frac{{}^{(\nu)}\Delta\, l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}\cdot \Delta x} \qquad (6')$$

als Mass der Invalidisierungskraft für die Altersstrecke $x \ldots\ldots (x+\Delta x)$ zu betrachten (vergl. § 16). Durch den bekannten Grenzübergang gelangt man zur Definition:

$$\nu_x = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{{}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}\cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{l_x^{\overline{aa}}}\cdot\frac{{}^{(\nu)}d l_x^{\overline{aa}}}{dx} \qquad (8)$$

oder kürzer geschrieben: $\nu_x = -\frac{1}{z_x}\cdot\frac{dz_x}{dx}$ (8′)

§ **8.** Es wirft sich nun die Frage auf: welche Beziehung besteht zwischen den beiden Invalidisierungsintensitäten ν_x und $'\nu_x$? Zur Beantwortung dieser Frage muss man die definierenden Ausdrücke (6) und (6′) miteinander vergleichen. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, wie schon oben (in § 7) angedeutet, die beiden Versicherungsbestände, auf welche sie sich beziehen, hätten, *im Zeitpunkte* x, genau denselben Umfang, so dass für diesen Zeitpunkt x die Gleichung

$${}^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}} = l_x^{\overline{aa}} \qquad (9)$$

besteht. Ferner setzen wir auch die Altersdifferenz Δx für beide Bestände gleich gross an. Die zu vergleichenden Ausdrücke haben dann gleichen Nenner, und wir brauchen nur ihre Zähler $\left(-\Delta^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}}\right)$ und $\left(-{}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}\right)$ in Betracht zu ziehen. Jeder Zähler bezeichnet eine Anzahl Personen, die im Alter x aktiv, im Alter $x+\Delta x$ aber dienstunfähig waren und überdies in derselben Zeit aus anfänglich gleich grossen Gesamtheiten hervorgingen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass auf die eine Gesamtheit nur *eine* Verminderungsursache (Invalidität) einwirkte, auf die andere aber deren *zwei* (Tod und Invalidität). Infolgedessen ist:

$$\left(-\Delta^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}}\right) > \left(-{}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}\right)$$

Es wird nämlich nur bei der ersten Gesamtheit jeder mit Tod abgehende Aktive sofort durch einen gleichaltrigen Aktiven ersetzt, und von diesen in die Lücken der Verstorbenen eintretenden neuen Mitgliedern wird auch ein Teil während der Zeit Δx dienstunfähig werden.

Die Differenz ${}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}} - \Delta^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}}$ kann man folgendermassen ermitteln: die Anzahl der während der Zeit Δx aus dem zweiten Bestand infolge Todes ausscheidenden Mitglieder beträgt, wenn $\mu_x^{\overline{aa}}$ die Sterbensintensität der x-jährigen Aktiven bedeutet,

$$g(x) = \int_x^{x+\Delta x} \left(-\mu_x^{\overline{aa}}\right)\cdot l_x^{\overline{aa}}\cdot dx.$$

Ebensoviele neue Mitglieder treten dem ersten Bestande während der Zeit Δx bei, an Stelle der Verstorbenen. Wenn diese $g(x)$ Ersatzmitglieder alle im gleichen Moment, nämlich zu Anfang des Zeitintervalles Δx, dem Versicherungsbestande beiträten, so würden aus ihnen, während der Zeitspanne Δx,

$$h(x) = \int_x^{x+\Delta x} (-\,'\nu_x)\cdot g(x)\cdot dx = \int_x^{x+\Delta x} {}'\nu_x\cdot dx\cdot \int_x^{x+\Delta x} \mu_x^{\overline{aa}}\cdot l_x^{\overline{aa}}\cdot dx$$

Invalide hervorgehen[2]). Da jedoch die $g(x)$ neu Eintretenden nicht alle gleichzeitig und am Anfang des Zeitintervalles Δx hinzukommen, sondern sich erst im Verlaufe desselben allmählich einstellen, je nachdem sich die Todesfälle ereignen, so stammen aus ihnen nicht $h(x)$ Invalide, sondern nur $\theta\cdot h(x)$, wobei θ einen echten Bruch bedeutet:

$$0 < \theta < 1$$

Dieselbe Anzahl: $\theta\cdot h(x)$ stellt die gesuchte Differenz

$${}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}} - \Delta^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}}$$

dar, so dass die Gleichung gilt:

$${}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}} - \Delta^{(\nu)\prime}l_x^{\overline{aa}} = \theta\cdot\int_x^{x+\Delta x} {}'\nu_x\cdot dx\cdot\int_x^{x+\Delta x}\mu_x^{\overline{aa}}\cdot l_x^{\overline{aa}}\cdot dx$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf eine andere Form bringen. Zunächst ist

$$\mu_x^{\overline{aa}}\cdot l_x^{\overline{aa}} = g_1(x)$$

infolge unserer Kontinuitätshypothese eine stetige und differenzierbare Funktion des Alters x. Demnach kann man den Mittelwertsatz der Integralrechnung auf sie anwenden und schreiben:

$$-g(x) = \int_x^{x+\Delta x}\mu_x^{\overline{aa}}\cdot l_x^{\overline{aa}}\cdot dx = \int_x^{x+\Delta x} g_1(x)\cdot dx = \Delta x\cdot g_1(\xi)$$
$$= \Delta x\cdot l_\xi^{\overline{aa}}\cdot\mu_\xi^{\overline{aa}},$$

wobei ξ einen nicht näher angebbaren, aber bestimmten, zwischen x und $(x+\Delta x)$ liegenden Wert bedeutet:

$$x < \xi < x+\Delta x;$$

Die gesuchte Differenz erhält dann die Gestalt:

$$\theta\cdot\int_x^{x+\Delta x}{}'\nu_x\cdot dx\cdot\Delta x\cdot g_1(\xi) = \theta\cdot g_1(\xi)\cdot\Delta x\cdot\int_x^{x+\Delta x}{}'\nu_x\cdot dx,$$

---

[2]) Würde unter dem $\int$-Zeichen ν_x an Stelle von $'\nu_x$ geschrieben, so bliebe doch das Schlussresultat dadurch unbeeinflusst.

da Δx und ξ konstant bleiben, während die unabhängige Veränderliche das Integrationsintervall durchläuft. Weil nun die Grösse

$$'\nu_x = g_2(x)$$

infolge unserer Kontinuitätshypothese ebenfalls eine stetige und differenziierbare Funktion der Zeit ist, so kann man neuerdings den Mittelwertsatz anwenden und schreiben:

$$\int_x^{x+\Delta x} {'\nu_x} \cdot dx = \int_x^{x+\Delta x} g_2(x) \cdot dx = \Delta x \cdot g_2(\eta),$$

wobei auch η einen bestimmten, zwischen x und $(x+\Delta x)$ liegenden Wert bedeutet:

$$x < \eta < x + \Delta x.$$

Die gesuchte Differenz erhält dann die Gestalt:

$$^{(\nu)}\Delta \overline{l_x^{aa}} - \Delta\, ^{(\nu)\prime}\overline{l_x^{aa}} = \theta \cdot \Delta x \cdot g_1(\xi) \cdot \Delta x \cdot g_2(\eta)$$

Durch Division mit $\overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x = {}^{(\nu)\prime}\overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x$ ergibt sich weiter:

$$\frac{^{(\nu)}\Delta \overline{l_x^{aa}}}{\overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x} - \frac{\Delta\, ^{(\nu)\prime}\overline{l_x^{aa}}}{^{(\nu)\prime}\overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x} = \Delta x \cdot \theta \cdot \frac{g_1(\xi) \cdot g_2(\eta)}{\overline{l_x^{aa}}}$$

$$= \Delta x \cdot \theta \cdot \frac{\overline{l_\xi^{aa}} \cdot \overline{\mu_\xi^{aa}} \cdot {'\nu_\eta}}{\overline{l_x^{aa}}}$$

Geht man jetzt zur Grenze über, indem man $\Delta x = 0$ werden lässt, so konvergieren ξ und η beide gegen x, (vergl. § 17) und die obige Gleichung verwandelt sich, zufolge (7) und (8), in:

$$\nu_x - {'\nu_x} = \theta \cdot \overline{\mu_x^{aa}} \cdot {'\nu_x} \cdot dx \tag{10}$$

Nun sind ν_x und $'\nu_x$ bestimmte, endliche Grössen, ebenso ihre Differenz, während das Produkt

$$\theta \cdot \overline{\mu_x^{aa}} \cdot {'\nu_x} \cdot dx$$

eine zugleich mit dx unendlich kleine, d. h. veränderliche, und zwar gegen Null konvergierende Grösse, darstellt. *Nach* vollendetem Grenzübergang ist also

$$'\nu_x = \nu_x \tag{11}$$

und die oben aufgeworfene Frage erhält die Antwort:

Wird der Vorgang als *stetig* verlaufend angenommen, so gelangt man zur gleichen Invalidisierungsintensität, gleichgültig, ob man die Reihe (1) der $\overline{l_x^{aa}}$ oder die Reihe (3) der $z_x^{(\nu)}$, der Definition zugrunde legt. Mit andern Worten: *Es ändert die Invalidisierungsintensität nicht, wenn man den Einfluss der Sterblichkeit mitberücksichtigt;* eine „partielle" Invalidisierungsintensität braucht also nicht eingeführt zu werden, sobald man die Kontinuitätshypothese zugrunde legt.

Wenn wir im folgenden den Akzent, durch den wir einen „partiellen" Vorgang andeuten, im allgemeinen auch weglassen und, gestützt auf das soeben gefundene Resultat (11), an Stelle von $'\nu_x$ einfach ν_x schreiben werden, so ist doch im Auge zu behalten, dass die Definition der Intensitätsfunktion im Grunde genommen einen Vorgang involviert, bei dem eine einzige Verminderungsursache (hier die Invalidität) auf die betrachtete Gesamtheit einwirkt.

§ **9.** Aus der Definition der Invalidisierungsintensität fliesst die Differentialgleichung:

$$dz_x^{(\nu)} = - z_x^{(\nu)} \cdot {'\nu_x} \cdot dx \tag{12'}$$

oder

$$^{(\nu)}d\overline{l_x^{aa}} = - \overline{l_x^{aa}} \cdot \nu_x \cdot dx \tag{12}$$

Das Differential linker Hand in der Gleichung (12) ist so zu verstehen, dass nur die Verminderung infolge von Invalidität berücksichtigt werden soll. Diese Differentialgleichung führt unmittelbar und unumgänglich auf die „partiellen Wahrscheinlichkeiten" [1]). Durch Integration von $\frac{^{(\nu)}d\overline{l_x^{aa}}}{\overline{l_x^{aa}}} = - \nu_x \cdot dx$ ergibt sich nämlich:

$$\text{Log}\left(^{(\nu)}\overline{l_x^{aa}}\right) = \int(-\nu_x) \cdot dx + c_1 \tag{13}$$

Die Grösse der Integrationskonstanten c_1 ergibt sich aus der Bemerkung, dass in dem Augenblick, in welchem die Beobachtung des Vorganges beginnt, $x = n$ und $\overline{l_n^{aa}} = z_n$ ist, so dass:

$$\text{Log } z_n = \left[\int(-\nu_x) \cdot dx\right]_{x=n} + c_1 \text{, woraus:}$$

$$c_1 = \text{Log } z_n - \left[\int(-\nu_x) \cdot dx\right]_{x=n}$$

Aus (13) wird infolgedessen:

$$\text{Log}\left(^{(\nu)}\overline{l_x^{aa}}\right) = \int(-\nu_x) \cdot dx + \text{Log} z_n - \left[\int(-\nu_x) \cdot dx\right]_{x=n}$$

$$= \text{Log } z_n + \int_n^x (-\nu_x) \cdot dx$$

Unter Berücksichtigung der Identität $e^{\text{Log}\, x} = x$ erhält man:

$$^{(\nu)}\overline{l_x^{aa}} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \nu_x \cdot dx} \tag{14'}$$

Den Index (ν) links oben fügten wir an, um anzudeuten, dass nur die Verminderung infolge von Invalidität

[1]) Bezüglich der Benennung vergl. den Schluss von § 4.

zu berücksichtigen ist. Die Zahl ${}^{(\nu)}\overline{l}^{aa}_x$ ist demnach diejenige, auf welche die ursprüngliche Anzahl $\overline{l}^{aa}_n$ herabsinkt, wenn man *nur* diejenigen Veränderungen des Versicherungsbestandes in Betracht zieht, die aus der Dienstunfähigkeit entspringen, wenn man also die Sterblichkeit ausgeschaltet denkt; mit andern Worten: ${}^{(\nu)}\overline{l}^{aa}_x$ ist identisch mit derjenigen Anzahl, die wir oben $z^{(\nu)}_x$ nannten. — Dies kommt übrigens unmittelbar und deutlich zum Ausdruck, wenn man an Stelle der Differentialgleichung (12) die Gleichung (12′) behandelt, denn diese führt ja direkt auf

$$z^{(\nu)}_x = z_n \cdot e^{-\int_n^x \nu_x \cdot dx} \tag{14}$$

Wir gingen aber nicht von der Differentialgleichung (12′) aus, um den Einwand zu vermeiden, die Zahlen $z^{(\nu)}_x$ erschienen nur darum in der Formel, weil sie von vornherein und willkürlich eingeführt wären. — Aus unsern Überlegungen geht hervor, dass *die Zahlen* $z^{(\nu)}_x$ *der Reihe* (3) *mit Notwendigkeit auftreten, sobald man die Invalidisierungsintensität integriert.*

§ **10.** Betrachtet man als obere Grenze $(x + 1)$ statt x, so ergibt sich aus der Gleichung (14):

$$z^{(\nu)}_{x+1} = z_n \cdot e^{-\int_n^{x+1} \nu_x \cdot dx}, \text{ und hieraus:}$$

$$\frac{z^{(\nu)}_{x+1}}{z^{(\nu)}_x} = e^{-\int_n^{x+1} \nu_x \cdot dx + \int_n^x \nu_x \cdot dx} = e^{-\int_x^{x+1} \nu_x \cdot dx},$$

da ja $\int_{x+1}^n \nu_x \cdot dx + \int_n^x \nu_x \cdot dx = \int_{x+1}^x \nu_x \cdot dx = -\int_x^{x+1} \nu_x \cdot dx$ ist.

Das Verhältnis $\frac{z^{(\nu)}_{x+1}}{z^{(\nu)}_x}$ drückt, den gemachten Voraussetzungen zufolge, die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass eine x-jährige aktive Person das Alter $x + 1$ im aktiven Zustand erreichen werde, unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass nur Invalidität auf die betreffende Gesamtheit einwirke, dass der numerische Einfluss der Sterblichkeit auf die in § 5, 2., angegebene Art ausgeschaltet sei[1]). Es ist demnach jenes Verhältnis konsequenterweise mit ${}^{(\nu)\prime}\overline{p}^{aa}_x$ zu bezeichnen[2]), und es stellt eine der einzuführenden „partiellen" Wahrscheinlichkeiten dar:

$$ {}^{(\nu)\prime}\overline{p}^{aa}_x = e^{-\int_x^{x+1} \nu_x \cdot dx} \tag{15}$$

[1]) Siehe die Bemerkung am Schluss von § 23.
[2]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

Die genaue Formulierung der Definition von ${}^{(\nu)\prime}\overline{p}^{aa}_x$ erheischt folgende Überlegung: Man betrachte eine beliebige, aber bestimmte, x-jährige, aktive, dem betreffenden Versicherungsbestande angehörige Person $M^{(\nu)}$. Stirbt sie im Alter $x + \Delta x$, wobei $\Delta x < 1$, so tritt an ihre Stelle sofort ein neues, $(x + \Delta x)$-jähriges, aktives Mitglied $M^{(\nu)}_1$ in den Bestand ein. Falls auch dieses *vor* Erreichung des Alters $x + 1$ stirbt, etwa nach Ablauf der Zeitspanne Δx_1, so tritt an seine Stelle sofort ein neues aktives Ersatzmitglied $M^{(\nu)}_2$ vom Alter $x + \Delta x + \Delta x_1$. Wenn nun auch $M^{(\nu)}_2$ noch vor Erreichung des Alters $x + 1$, etwa im Alter $x + \Delta x + \Delta x_1 + \Delta x_2$, mit Tod abgeht, so wird auch $M^{(\nu)}_2$ sofort durch ein neues, gleichaltriges, also $(x + \Delta x + \Delta x_1 + \Delta x_2)$-jähriges, aktives Mitglied $M^{(\nu)}_3$ ersetzt, und so weiter, bis schliesslich ein Jahr, vom Zeitpunkte x an gerechnet, verflossen ist. Wenn der Zufall es fügt, dass gerade jene Personen versterben, so sind an Stelle von $M^{(\nu)}$ nacheinander eingetreten:

$$M^{(\nu)}_1,\ M^{(\nu)}_2,\ M^{(\nu)}_3,\ \ldots,\ M^{(\nu)}_s.$$

Dabei werden *nur* die Sterbenden durch neue Mitglieder ersetzt, nicht aber diejenigen, die infolge von Invalidität ausscheiden. Wenn z. B. die zuerst ins Auge gefasste Person $M^{(\nu)}$ im Alter $x + \Delta x$ nicht verstirbt, sondern dienstunfähig wird, so tritt kein Ersatzmitglied an ihre Stelle.

Der echte Bruch ${}^{(\nu)\prime}\overline{p}^{aa}_x$ drückt nun die Wahrscheinlichkeit aus, dass die in der Gesamtheit der $z^{(\nu)}_x$ Aktiven, beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person $M^{(\nu)}$, eventuell (falls sich nämlich Todesfälle ereignen) das an Stelle von $M^{(\nu)}$ zuletzt eingetretene Ersatzmitglied $M^{(\nu)}_s$, das Alter $x + 1$ erleben werde, und zwar im Aktivitätszustande.

Die Wahrscheinlichkeit des konträren Ereignisses bezeichnen wir durch

$$ {}'i_x = 1 - {}^{(\nu)\prime}\overline{p}^{aa}_x \tag{15′}$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in der Gesamtheit der $z^{(\nu)}_x$ Aktiven beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person $M^{(\nu)}$, eventuell (falls nämlich $M^{(\nu)}$ vor Ablauf eines Jahres verstirbt), das an Stelle von $M^{(\nu)}$ zuletzt eingetretene Ersatzmitglied $M^{(\nu)}_s$, *vor* Erreichung des Alters $x + 1$ invalid werde.

Während man bei der hier vorliegenden Aufgabe eine von der gewöhnlichen Invalidisierungsintensität verschiedene „partielle" Intensität nicht zu betrachten braucht, drängen sich „die partiellen Wahrscheinlichkeiten" von selbst auf, sobald man auf dem Wege der Integration zu endlichen Zeitintervallen übergeht.

§ **11.** Die gleichen Überlegungen kann man bezüglich des Einflusses der Sterblichkeit anstellen. Halten wir zunächst an der Vorstellung fest, auf die betrachtete „fingierte Gesellschaft" bestehend aus $z_x^{(\mu)}$ gleichaltrigen, aktiven Personen gleichen Geschlechts, die am gleichen Ort, zur gleichen Zeit und unter den gleichen Lebensbedingungen stehend, denselben Beruf ausüben, wirke *nur* die Sterblichkeit ein und jedes infolge von Dienstunfähigkeit ausscheidende Mitglied werde sofort durch ein gleichaltriges aktives ersetzt. Um die Sterblichkeitskraft in einem bestimmten Alter x zu messen, muss man dann folgende drei Grössen gleichzeitig ins Auge fassen:

1. die Menge der Personen des betreffenden Alters, die aktiv sind; ihre Anzahl sei $z_x^{(\mu)}$;
2. die Anzahl der Todesfälle bis zum Alter $x + \varDelta x$; sie sei $(-\varDelta z_x^{(\mu)})$, wobei $z_{x+\varDelta x}^{(\mu)} - z_x^{(\mu)} = \varDelta z_x^{(\mu)}$ [1]);
3. die Grösse der Altersdifferenz: $\varDelta x$.

Durch die schon in § 6 angestellten Überlegungen wird man dazu geführt, den Ausdruck

$$-\frac{\varDelta z_x^{(\mu)}}{z_x^{(\mu)} \cdot \varDelta x} \tag{16'}$$

als Mass der Sterblichkeitskraft für die Altersstrecke von x bis $x + \varDelta x$ zu betrachten (vergl. § 16). Unter Heranziehung der Kontinuitätshypothese wird man zur Grenze übergehen, indem man $\varDelta x$ unendlich klein werden lässt, und als Definition der „partiellen Sterbensintensität der Aktiven für das Alter x" erhalten [2]):

$$'\mu_x^{\overline{aa}} = -\frac{1}{z_x^{(\mu)}} \cdot \frac{dz_x^{(\mu)}}{dx} = -\frac{1}{{}^{(\mu)\prime}l_x^{\overline{aa}}} \cdot \frac{d^{(\mu)\prime}l_x^{\overline{aa}}}{dx} \tag{17'}$$

Es liegt auch hier nahe, eine andere Sterbensintensität $\mu_x^{\overline{aa}}$ dadurch zu definieren, dass man nicht die Reihe (2) der $z_x^{(\mu)}$, sondern die tatsächlich sich ergebende Tafel der $l_x^{\overline{aa}}$, d. h. die obige Reihe (1), zugrunde legt und so gleichzeitig den Einfluss der Invalidität berücksichtigt. — Die jetzt ins Auge zu fassende „fingierte Gesellschaft" möge aus $l_x^{\overline{aa}}$ gleichaltrigen, aktiven Personen bestehen und, unter dem doppelten Einfluss von Tod und Invalidität, während des Zeitintervalles $\varDelta x$ eine Anzahl Todesfälle aufweisen, die wir mit $(-{}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}})$ bezeichnen [3]). Die Sterblichkeitskraft für die Altersstrecke von x bis $x + \varDelta x$ wird dann gemessen durch den Ausdruck

$$-\frac{{}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}} \cdot \varDelta x}, \tag{16}$$

welchen man, durch den bekannten Grenzübergang der Infinitesimalrechnung, in

$$\mu_x^{\overline{aa}} = -\frac{1}{l_x^{\overline{aa}}} \cdot \frac{{}^{(\mu)}dl_x^{\overline{aa}}}{dx} \tag{17}$$

verwandelt.

§ **12.** Um zu einer Beziehung zwischen $\mu_x^{\overline{aa}}$ und $'\mu_x^{\overline{aa}}$ zu gelangen, vergleichen wir die Ausdrücke (16') und (16) miteinander, unter der Annahme, dass es sich um dieselbe Altersdifferenz $\varDelta x$ handle, und dass die beiden Gesamtheiten, auf welche sie sich beziehen, im Zeitpunkte x gleichen Umfang haben, dass also *für diesen Zeitpunkt* x die Gleichung bestehe:

$$l_x^{\overline{aa}} = z_x^{(\mu)} \tag{18}$$

Durch eine Kette von Schlüssen, die den in § 8 gezogenen durchaus ähnlich sind, überzeugt man sich zunächst, dass:

$$(-\varDelta z_x^{(\mu)}) > (-{}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}}).$$

Es bedeutet nämlich sowohl $(-\varDelta z_x^{(\mu)})$ als auch $(-{}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}})$ eine Anzahl von Todesfällen, die sich während desselben Zeitintervalles $\varDelta x$ und in zwei anfänglich gleich grossen Gesamtheiten ereignen; der einzige Unterschied besteht darin, dass auf die zweite dieser Gesamtheiten *zwei* Verminderungsursachen, Tod und Invalidität, einwirken, auf die erste Gesamtheit dagegen *nur* Sterblichkeit, weil jedes invalid werdende Mitglied sofort durch ein neues gleichaltriges aktives ersetzt wird. Diese während der Zeitspanne $\varDelta x$ (an Stelle der Invalidgewordenen) eintretenden Ersatzmitglieder liefern aber einen Beitrag an die Todesfälle, daher die obige Ungleichung.

Durch die in § 8 angegebenen Schlüsse überzeugt man sich ferner, dass die Differenz dieser Zähler dargestellt wird durch:

$${}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}} - \varDelta z_x^{(\mu)} = \theta \cdot \int_x^{x+\varDelta x} \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx \cdot \int_x^{x+\varDelta x} \nu_x \cdot l_x^{\overline{aa}} \cdot dx$$

Bei zweimaliger Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung verwandelt sich diese Gleichung (vergl. oben § 8) in:

$${}^{(\mu)}\varDelta l_x^{\overline{aa}} - \varDelta z_x^{(\mu)} = \theta \cdot \varDelta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot \varDelta x \cdot \nu_\eta \cdot l_\eta^{\overline{aa}}$$

wobei wieder ξ und η im Innern des Intervalles liegende Grössen vorstellen:

$$x < \xi < x + \varDelta x; \quad x < \eta < x + \varDelta x$$

und θ einen echten Bruch bedeutet: $0 < \theta < 1$. Nach Division durch $l_x^{\overline{aa}} \cdot \varDelta x = z_x^{(\mu)} \cdot \varDelta x$ (vergl. die Gleichung [18]) wird:

[1]) Vergl. die Fussnote 1 in § 6.
[2]) Bezüglich der Akzentuierung siehe die Fussnote 6 in § 4.
[3]) Vergl. die Fussnote 1 in § 6.

$$\frac{{}^{(\mu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}} \cdot \Delta x} - \frac{\Delta z^{(\mu)}}{z_x^{(\mu)} \cdot \Delta x} = \theta \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot \Delta x \cdot \frac{l_\eta^{\overline{aa}} \cdot \nu_\eta}{l_x^{\overline{aa}}}$$

Geht man nun zur Grenze über, indem man Δx unendlich klein werden lässt, so konvergieren ξ und η beide gegen x, und zufolge (17) und (17') verwandelt sich die obige Gleichung in:

$$\mu_x^{\overline{aa}} - {}'\mu_x^{\overline{aa}} = \theta \cdot \mu_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot dx \tag{19}$$

(Vergl. hiermit § 17.) Da nun $\mu_x^{\overline{aa}}$ und ${}'\mu_x^{\overline{aa}}$, folglich auch ihre Differenz, endliche Grössen sind, während das Produkt $\theta \cdot \mu_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot dx$ zugleich mit dx eine veränderliche, und zwar gegen Null konvergierende Grösse darstellt, so ist *nach* vollendetem Grenzübergang in aller Strenge

$$\mu_x^{\overline{aa}} = {}'\mu_x^{\overline{aa}}, \tag{20}$$

und diese Gleichung besagt: Wird der Vorgang als ein *stetig* verlaufender angenommen, so ändert sich die Sterbensintensität nicht, wenn man den Einfluss der Invalidisierung mitberücksichtigt; anders ausgedrückt: Eine „partielle" Sterbensintensität braucht, bei der hier vorliegenden Aufgabe, nicht eingeführt zu werden. Wir werden demnach im folgenden, gestützt auf dieses Resultat, den Akzent, der einen „partiellen" Vorgang andeuten soll, weglassen und an Stelle von ${}'\mu_x^{\overline{aa}}$ einfach $\mu_x^{\overline{aa}}$ schreiben, heben aber auch hier hervor, dass diese Definition der Intensitätsfunktion eigentlich einen Vorgang voraussetzt, bei dem nur *eine* Veränderungsursache (hier die Sterblichkeit) auf die betrachtete Gesamtheit einwirkt.

§ **13.** Dass das Ineinandergreifen der Faktoren, die hier im Spiele sind, nicht vernachlässigt werden darf, sobald man endliche Zeitdifferenzen in Betracht zieht, erhellt unmittelbar, wenn man dazu übergeht, die eingeführten Intensitätsfunktionen zu integrieren. Aus der Definitionsformel (17) entspringt die Differentialgleichung

$${}^{(\mu)}dl_x^{\overline{aa}} = - l_x^{\overline{aa}} \cdot \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx.$$

Der Index (μ) links oben soll andeuten, dass nur die Verminderungen infolge von Sterblichkeit in Betracht gezogen werden. Durch Integration findet man:

$$\operatorname{Log}\left({}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}}\right) = \int\left(-\mu_x^{\overline{aa}}\right) \cdot dx + c_2$$

Aus der Bemerkung, dass in dem Augenblick, in welchem die Beobachtung des Vorganges beginnt, $x = n$ und $l_x^{\overline{aa}} = z_n$ ist, ergibt sich, ähnlich wie in § 9, die Grösse der Integrationskonstanten c_2 zu

$$c_2 = \operatorname{Log} z_n - \left[\int\left(-\mu_x^{\overline{aa}}\right) \cdot dx\right]_{x=n}$$

Infolgedessen wird:

$${}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx}$$

Die Zahl ${}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}}$ ist demnach diejenige, auf welche die ursprüngliche Anzahl $l_n^{\overline{aa}} = z_n$ herabsinkt, wenn man *nur die* Veränderungen der Gesamtheit in Betracht zieht, die sich infolge von Sterblichkeit einstellen, wenn man also die zahlenmässigen Wirkungen der Invalidität auf den Bestand ausgeschaltet denkt; das heisst aber: ${}^{(\mu)}l_x^{\overline{aa}}$ ist nichts anderes als die oben (in § 5) mit $z_x^{(\mu)}$ oder ${}^{(\mu)\prime}l_x^{\overline{aa}}$ bezeichnete Grösse, so dass:

$${}^{(\mu)\prime}l_x^{\overline{aa}} = z_x^{(\mu)} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx} \tag{21}$$

ein Ausdruck, auf den übrigens die Gleichung (17') unmittelbar führt (vergl. den Schluss von § 9). Hieraus ersieht man, dass auch die Zahlen $z_x^{(\mu)}$ der Reihe (2) notwendigerweise auftreten, sobald man die Intensitätsfunktion der Sterblichkeit integriert.

§ **14.** Dies führt weiter zum Begriff der „partiellen Lebenswahrscheinlichkeit eines Aktiven". Betrachtet man nämlich $x+1$ (statt x) als obere Grenze, so verwandelt sich die Gleichung (21) in:

$$z_{x+1}^{(\mu)} = z_n \cdot e^{-\int_n^{x+1} \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx}$$

woraus durch Division mit (21):

$$\frac{z_{x+1}^{(\mu)}}{z_x^{(\mu)}} = e^{-\int_n^{x+1} \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx + \int_n^x \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx}$$

oder:

$${}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x^{\overline{aa}} \cdot dx} \tag{22}$$

denn das Verhältnis $\frac{z_{x+1}^{(\mu)}}{z_x^{(\mu)}}$ gibt, den gemachten Voraussetzungen zufolge, die Wahrscheinlichkeit an[1]), dass eine aktive Person des Alters x das Alter $x+1$ im aktiven Zustand erreichen werde, unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass nur die Sterblichkeit auf die betreffende Gesamtheit einwirke, dass der numerische Einfluss der Invalidität auf die in § 5, 1) angegebene Weise ausgeschaltet sei.

[1]) Siehe die Bemerkung am Schlusse von § 23.

Zur strengen Formulierung der Definition von ${}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}}$ dient folgendes: man betrachte eine bestimmte, x-jährige, dem betreffenden Versicherungsbestande der $z_x^{(\mu)}$ Aktiven angehörige Person $M^{(\mu)}$. Wird sie im Alter $x + \Delta x$ invalid (wobei $\Delta x < 1$), so tritt an ihre Stelle sofort ein neues, $(x + \Delta x)$-jähriges, aktives Mitglied $M_1^{(\mu)}$. Falls auch dieses *vor* Erreichung des Alters $x + 1$ invalid werden sollte, etwa nach Ablauf der Zeitspanne Δx_1, so tritt an seine Stelle sofort wieder ein aktives Ersatzmitglied $M_2^{(\mu)}$ vom Alter $x + \Delta x + \Delta x_1$, und so weiter, bis schliesslich ein Jahr, vom Zeitpunkte x an gerechnet, verflossen ist. Dabei werden *nur* die invalid Gewordenen durch neue Mitglieder ersetzt, nicht diejenigen, die mit Tod abgehen. Wenn z. B. die zuerst ins Auge gefasste Person $M^{(\mu)}$ im Alter $x + \Delta x$ verstirbt, so tritt kein Ersatzmitglied an ihre Stelle. Wenn es nun der Zufall fügt, dass gerade die betrachteten Personen von Invalidität betroffen werden, so treten an Stelle von $M^{(\mu)}$ im Laufe eines Jahres nacheinander ein:

$$M_1^{(\mu)},\ M_2^{(\mu)},\ \ldots\ldots\ldots,\ M_r^{(\mu)}.$$

Der echte Bruch ${}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}}$ drückt nun die Wahrscheinlichkeit aus, dass die in der Gesamtheit der $z_x^{(\mu)}$ Aktiven beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person $M^{(\mu)}$, eventuell (falls sie nämlich vor Ablauf eines Jahres von Invalidität betroffen wird) das an Stelle von $M^{(\mu)}$ zuletzt eingetretene, neue Mitglied $M_r^{(\mu)}$, das Alter $x + 1$ erleben werde, und zwar im aktiven Zustande.

Die Wahrscheinlichkeit des konträren Ereignisses bezeichnen wir mit

$$ {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}} = 1 - {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}} \tag{22'}$$

Dann drückt ${}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}}$ die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass die in der Gesamtheit der $z_x^{(\mu)}$ Aktiven beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person $M^{(\mu)}$, eventuell (falls nämlich $M^{(\mu)}$ vor Ablauf eines Jahres dienstunfähig wird) das an Stelle von $M^{(\mu)}$ zuletzt eingetretene Ersatzmitglied $M_r^{(\mu)}$, vor Erreichung des Alters $x + 1$ sterben werde, und zwar im aktiven Zustande.

Wir heben auch hier die schon am Schlusse von § 10 gemachte Bemerkung hervor, dass man bei der vorliegenden Aufgabe eine von der gewöhnlichen Sterbensintensität verschiedene „partielle Sterbensintensität" nicht zu betrachten braucht, dass sich aber die „partielle Wahrscheinlichkeit" aufdrängt, sobald man durch Integration zu endlichen Zeitintervallen übergeht.[2])

[2]) Bezüglich der Benennung vergl. den Schluss von § 4.

§ **15**. Endlich haben wir noch den Bestand B_i der „Invaliden" in Betracht zu ziehen. Schliessen wir vorläufig jede Reaktivierung aus, so vermindert sich seine Mitgliederanzahl einzig durch Sterblichkeit. Es möge zunächst die Reihe (5) der $\zeta_x^{(\mu)} = {}^{(\mu)\prime}l_x^{\overline{ii}}$ zugrunde gelegt werden, mit andern Worten: wir lassen einen anfänglich aus $\zeta_n^{(\mu)}$ „Dienstunfähigen" zusammengesetzten, geschlossenen (d. h. von Ein- und Auswanderungen freien) Bestand absterben (ohne dass neue Mitglieder beitreten). Bezeichnet $(-\Delta\zeta_x^{(\mu)})$ die Anzahl[1]) der Todesfälle auf der Altersstrecke von x bis $x + \Delta x$, so wird der Ausdruck

$$-\frac{\Delta\zeta_x^{(\mu)}}{\zeta_x^{(\mu)}\cdot\Delta x} \tag{23'}$$

als Mass der Sterblichkeitskraft für diese Altersstrecke zu betrachten sein (vergl. § 6). Er liefert folgende Definition der „partiellen Sterbensintensität der x-jährigen Invaliden":

$$'\mu_x^{\overline{ii}} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{\Delta\zeta_x^{(\mu)}}{\zeta_x^{(\mu)}\cdot\Delta x}\right) = -\frac{1}{\zeta_x^{(\mu)}}\cdot\frac{d\zeta_x^{(\mu)}}{dx} \tag{23}$$

§ **16**. Betrachtet man aber die Gesamtheit derjenigen $l_x^{\overline{ii}}$ Versicherten, die im Zeitpunkte x invalid sind und aus dem ursprünglichen Bestande der z_n Aktiven hervorgingen, infolge Eintretens der Dienstunfähigkeit, so werden fortwährend neue Mitglieder beitreten, und eine ergänzende Untersuchung erweist sich als nötig. Es sei $\left(-{}^{(\mu)}\Delta l_x^{\overline{ii}}\right)$ die Anzahl[1]) der Todesfälle, die sich unter diesen Voraussetzungen auf der Altersstrecke $x \ldots\ldots x + \Delta x$ ereignen. Man wird dann die Sterblichkeitskraft um so höher anschlagen: 1. je grösser $(-{}^{(\mu)}\Delta l_x^{\overline{ii}})$; 2. je kleiner die Zeitspanne Δx und 3. je kleiner die Gruppe ist, aus welcher die Verstorbenen hervorgingen (vergl. § 6). Diese Gruppe setzt sich nun aus 2 Bestandteilen zusammen: a) die schon anfänglich (im Zeitpunkte x) vorhandenen $l_x^{\overline{ii}}$ Mitglieder; b) die während der Zeitspanne Δx neu hinzugetretenen. Da letztere aus dem Bestande der Aktiven hervorgingen, ist ihre Anzahl:

$$\left(-{}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}\right) = -\int_x^{x+\Delta x}(-\nu_x)\cdot l_x^{\overline{aa}}\cdot dx,$$

oder, nach Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$\left(-{}^{(\nu)}\Delta l_x^{\overline{aa}}\right) = \Delta x\cdot\nu_\xi\cdot l_\xi^{\overline{aa}}$$

wobei ξ einen, wenn auch nicht näher angebbaren, so doch bestimmten, im Innern des Intervalles liegenden Wert von x bedeutet: $x < \xi < x + \Delta x$. Die Sterblich-

[1]) Vergl. die Fussnote 1 in § 6.

keitskraft auf der betrachteten Altersstrecke wird demnach gemessen durch

$$-\frac{{}^{(\mu)}\Delta \overline{l_x^{ii}}}{\Delta x\cdot\left(\overline{l_x^{ii}}+\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\overline{l_x^{ii}}+\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}}\cdot\frac{{}^{(\mu)}\Delta \overline{l_x^{ii}}}{\Delta x} \qquad (24')$$

Nun gehen wir zur Grenze über, indem wir, gestützt auf die Kontinuitätshypothese, Δx unendlich klein werden lassen; dann ist, so lange der Grenzübergang andauert, $\overline{l_x^{ii}}$ eine endliche, festbleibende Zahl, dagegen $\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\cdot dx$ zugleich mit dx eine veränderliche, gegen Null konvergierende Grösse. *Nach* vollzogenem Grenzübergang bleibt demnach als Definition der „Sterbensintensität der x-jährigen Invaliden" folgender Ausdruck übrig:

$$\overline{\mu_x^{ii}}=-\frac{1}{\overline{l_x^{ii}}}\cdot\frac{{}^{(\mu)}d\overline{l_x^{ii}}}{dx} \qquad (24)$$

§ **17**. Um die Beziehung zwischen $\overline{\mu_x^{ii}}$ und $'\overline{\mu_x^{ii}}$ aufzudecken, verfahren wir ähnlich wie in § 8 und § 12: wir vergleichen die definierenden Ausdrücke (23') und (24') miteinander. Zur Erleichterung nehmen wir an, es handle sich um dieselbe Altersdifferenz Δx, und es seien die beiden „fingierten Gesellschaften", auf die sich (23') und (24') beziehen, im Zeitpunkte x von gleicher Grösse, d. h. es gelte *für den Moment* x die Gleichung:

$$\zeta_x^{(\mu)}=\overline{l_x^{ii}}+\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}} \qquad (25)$$

Die zu vergleichenden Ausdrücke haben dann gleichen Nenner und es erübrigt nur die Betrachtung ihrer Zähler: $(-\Delta\zeta_x^{(\mu)})$ und $(-{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}})$. Beide bedeuten eine Anzahl von Todesfällen, die sich während desselben Zeitintervalles Δx und in zwei *anfänglich* gleich grossen Gesamtheiten ereignen. Der Unterschied besteht einzig darin, dass auf die erste dieser Gruppen *nur eine* Veränderungsursache, die Sterblichkeit, einwirkt, während die zweite Gesamtheit ausserdem noch Zufluss an neuen Mitgliedern erhält: die während der Zeit Δx invalid werdenden Aktiven; ihre Anzahl wurde oben ermittelt, sie ist:

$$(-{}^{(\nu)}\Delta\overline{l_x^{aa}})=\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}$$

und diese liefern auch eine bestimmte Anzahl von Todesfällen. Infolgedessen ist $(-{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}})>(-\Delta\zeta_x^{(\mu)})$. Die Differenz $\Delta\zeta_x^{(\mu)}-{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}}$ ermittelt man durch folgende Überlegung: während des Zeitintervalles Δx treten dem einen Bestande $(-{}^{(\nu)}\Delta\overline{l_x^{aa}})$ neue Mitglieder bei. Wenn diese alle im gleichen Moment, nämlich zu Anfang des Zeitintervalles Δx, der zweiten Gesamtheit beiträten, so würden von ihnen, während der gleichen Zeitspanne,

$$h(x)=\int_x^{x+\Delta x}(-{}^{(\nu)}\Delta\overline{l_x^{aa}})\cdot\overline{\mu_x^{ii}}\cdot dx=\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\cdot\int_x^{x+\Delta x}\overline{\mu_x^{ii}}\cdot dx$$

mit Tod abgehen. (Δx und ξ, folglich auch ν_ξ und $\overline{l_\xi^{aa}}$, bleiben konstant, während die unabhängige Veränderliche x das Integrationsintervall durchläuft. Das Schlussresultat bliebe sich gleich, wenn unter dem Integralzeichen $'\overline{\mu_x^{ii}}$ an Stelle von $\overline{\mu_x^{ii}}$ geschrieben würde.) Da jedoch die neu Eintretenden nicht alle gleichzeitig und am Anfang des Zeitintervalles Δx hinzukommen, sondern sich erst im Verlaufe desselben einstellen, je nachdem sich die Invalidisierungsfälle unter den Aktiven ereignen, liefern sie nicht $h(x)$ Sterbefälle, sondern nur $\theta\cdot h(x)$, wobei θ einen echten Bruch bedeutet: $0<\theta<1$. Dieselbe Anzahl $\theta\cdot h(x)$ stellt die gesuchte Differenz dar, so dass die Gleichung gilt:

$$\Delta\zeta_x^{(\mu)}-{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}}=\theta\cdot\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\cdot\int_x^{x+\Delta x}\overline{\mu_x^{ii}}\cdot dx$$

Unsere Kontinuitätshypothese gestattet es, den Mittelwertsatz der Integralrechnung neuerdings anzuwenden und dieser Differenz die Form zu geben:

$$\Delta\zeta_x^{(\mu)}-{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}}=\theta\cdot\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\cdot\Delta x\cdot\overline{\mu_\eta^{ii}},$$

wobei auch η einen im Innern des Intervalls liegenden Wert vorstellt: $x<\eta<x+\Delta x$. Nach Division durch $\zeta_x^{(\mu)}\cdot\Delta x$ und unter Berücksichtigung der Gleichung (25) ergibt sich hieraus weiter:

$$\frac{\Delta\zeta_x^{(\mu)}}{\Delta x\cdot\zeta_x^{(\mu)}}-\frac{{}^{(\mu)}\Delta\overline{l_x^{ii}}}{\Delta x\cdot(\overline{l_x^{ii}}+\Delta x\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}})}=\theta\cdot\nu_\xi\cdot\overline{l_\xi^{aa}}\cdot\overline{\mu_\eta^{ii}}\cdot\frac{\Delta x}{\zeta_x^{(\mu)}}$$

Durch Grenzübergang verwandelt sich dieser Ausdruck, vermöge der Gleichungen (23) und (24), in:

$$\overline{\mu_x^{ii}}-'\overline{\mu_x^{ii}}=\nu_x\cdot\overline{\mu_x^{ii}}\cdot\overline{l_x^{aa}}\cdot\frac{\theta}{\overline{l_x^{ii}}+\overline{l_x^{aa}}\cdot\nu_x\cdot dx}\cdot dx,$$

denn bei verschwindendem Δx konvergieren ξ und η beide gegen x. Linker Hand steht nun eine endliche, rechter Hand eine unendlich kleine, d. h. zugleich mit dx gegen Null konvergierende Grösse. *Nach* vollzogenem Grenzübergang ist also

$$'\overline{\mu_x^{ii}}=\overline{\mu_x^{ii}} \qquad (26)$$

Hiermit ist der in § 12 bewiesene Satz (dass sich nämlich die Sterbensintensität in einem gegebenen Alter nicht ändert, selbst wenn man noch andere Verminderungsursachen als das Sterben mit berücksichtigt) auch für den Fall bestätigt, dass man eine *Vermehrung* des Mitgliederbestandes in Berücksichtigung zieht. Wir können allgemein das Resultat aussprechen: *Die Sterbensintensität in jedem Alter ist unabhängig davon, ob noch ein Zugang oder ein Abgang von Mitgliedern aus andern Ursachen erfolgt, solange man an der Kontinuitätshypothese festhalten kann.* Letztere ist aber für das Bestehen dieses Satzes notwendig, wie aus dem Beweis hervorgeht, denn auf unstetige Funktionen ist bekanntlich der Mittelwertsatz der Integralrechnung im allgemeinen nicht anwendbar.

§ **18.** Die durch die Gleichung (23) oder (24) definierte Sterbensintensität der Invaliden führt unmittelbar auf den Begriff der „partiellen Lebenswahrscheinlichkeit eines Invaliden". Aus den genannten Gleichungen ergibt sich nämlich, zunächst durch Integration (ähnlich wie in §§ 9 und 13):

$$^{(\mu)}{}'l_x^{\overline{ii}} = \zeta_x^{(\mu)} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \mu_x^{\overline{ii}} \cdot dx} ;$$

(dabei wurde angenommen, dass im Augenblick, in dem die Beobachtung des Vorganges beginnt, $x = n$ und $^{(\mu)}{}'l_n^{\overline{ii}} = z_n$ sei); ferner (ähnlich wie in §§ 10 und 14):

$$\frac{^{(\mu)}{}'l_{x+1}^{\overline{ii}}}{^{(\mu)}{}'l_x^{\overline{ii}}} = {}^{(\mu)}{}'p_x^{\overline{ii}} = e^{-\int_x^{x+1} \mu_x^{\overline{ii}} \cdot dx} \tag{27}$$

und dieses Verhältnis ist die Wahrscheinlichkeit [1]) dafür, dass ein x-jähriger Invalide das Alter $x+1$ erleben werde, unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass nur die Sterblichkeit auf den betreffenden Bestand einwirke.

Zur genauen Formulierung der Definition von $^{(\mu)}{}'p_x^{\overline{ii}}$ sei folgende Betrachtung angestellt: Man fasse eine bestimmte, x-jährige, dem betreffenden Versicherungsbestand der $\zeta_x^{(\mu)}$ Dienstunfähigen angehörige Person $M^{(\mu)}$ ins Auge. Falls sie im Alter $x + \Delta x$, wobei $\Delta x < 1$, zu den Aktiven übertritt, wird sie sofort durch ein neues, $(x + \Delta x)$-jähriges, invalides Mitglied $M_1^{(\mu)}$ ersetzt; falls nun auch $M_1^{(\mu)}$ *vor* Erreichung des Alters $x + 1$, etwa im Alter $x + \Delta x + \Delta x_1$, wieder aktiv werden sollte, tritt auch an Stelle von $M_1^{(\mu)}$ sofort ein neues, $(x + \Delta x + \Delta x_1)$-jähriges, invalides Ersatzmitglied $M_2^{(\mu)}$ dem Bestand der $\zeta_x^{(\mu)}$ Dienstunfähigen bei; und so weiter, bis schliesslich, vom Zeitpunkte x an gerechnet, ein Jahr verflossen ist. Wenn der Zufall es so fügt, dass gerade die ins Auge gefassten Personen zu den Aktiven übertreten, so können, an Stelle von $M^{(\mu)}$ und im Laufe eines Jahres, nacheinander, als Ersatzinvalide neu eintreten:

$$M_1^{(\mu)},\ M_2^{(\mu)},\ \ldots,\ M_r^{(\mu)}.$$

Dabei werden *nur* die reaktivierten, nicht aber die mit Tod abgehenden, durch neue Mitglieder ersetzt. Wenn also die ursprünglich ins Auge gefasste Person $M^{(\mu)}$ im Alter $x + \Delta x$ stirbt, tritt kein Ersatzmitglied an ihre Stelle (vergl. §§ 10 und 14).

Der echte Bruch $^{(\mu)}{}'p_x^{\overline{ii}}$ drückt nun die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass die in der Gesamtheit der $\zeta_x^{(\mu)}$ Invaliden beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person $M^{(\mu)}$, eventuell (falls sie nämlich vor Ablauf eines Jahres zu den Aktiven übertritt) das an Stelle von $M^{(\mu)}$ zuletzt eingetretene, neue Mitglied $M_r^{(\mu)}$, das Alter $x + 1$ erleben werde, und zwar im invaliden Zustande.

Die Wahrscheinlichkeit des konträren Ereignisses bezeichnen wir konsequenterweise [2]) mit

$$^{(\mu)}{}'q_x^{\overline{ii}} = 1 - {}^{(\mu)}{}'p_x^{\overline{ii}} \tag{27'}$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in der Gesamtheit der $\zeta_x^{(\mu)}$ Dienstunfähigen beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige, invalide Person $M^{(\mu)}$, eventuell (falls nämlich $M^{(\mu)}$ vor Ablauf eines Jahres zu den Aktiven übertritt) das an Stelle von $M^{(\mu)}$ zuletzt eingetretene Ersatzmitglied $M_r^{(\mu)}$, *vor* Erreichung des Alters $x + 1$ sterben werde, und zwar im invaliden Zustande.

§ **19.** Um die gestellte Aufgabe in voller Allgemeinheit zu lösen, bedürfen wir noch eines Masses für die Reaktivierungsintensität. Fassen wir also einen bestimmten, sehr gross vorausgesetzten Versicherungsbestand ins Auge, eine fingierte Gesellschaft, die anfänglich aus $\zeta_n^{(\varrho)}$ gleichaltrigen Invaliden besteht. Wir nehmen zunächst an, es wirke ausschliesslich die Reaktivierung, nicht auch die Sterblichkeit, auf dieselbe ein, was dadurch realisiert werden könnte, dass jeder mit Tod abgehende Invalide sofort durch einen gleichaltrigen Invaliden ersetzt würde. Die Mitgliederanzahl im Zeitpunkte x bezeichnen wir mit $^{(\varrho)}{}'l_x^{\overline{ii}} = \zeta_x^{(\varrho)}$. Neben den in § 5 eingeführten fünf Reihen müssen wir jetzt noch eine sechste betrachten:

$$\left.\begin{array}{l} ^{(\varrho)}{}'l_n^{\overline{ii}},\quad ^{(\varrho)}{}'l_{n+1}^{\overline{ii}},\quad ^{(\varrho)}{}'l_{n+2}^{\overline{ii}},\ \ldots,\ ^{(\varrho)}{}'l_x^{\overline{ii}},\ \ldots \\ \text{oder kürzer geschrieben:} \\ \zeta_n^{(\varrho)},\quad \zeta_{n+1}^{(\varrho)},\quad \zeta_{n+2}^{(\varrho)},\ \ldots,\ \zeta_x^{(\varrho)},\ \ldots \end{array}\right\} \tag{28}$$

Sie käme dann zustande, wenn der Einfluss der Sterblichkeit auf die oben angegebene Art ausgeschaltet

[1]) Siehe die Bemerkung am Schlusse von § 23.

[2]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

würde (vergl. auch § 5) und ist von allen in § 5 eingeführten Ausscheideordnungen verschieden. Die Frage, ob die Zahl $\zeta_x^{(\varrho)}$ bei wachsendem x schliesslich Null wird, lassen wir hier unerörtert, da sie für unsern Zweck belanglos ist.

Um nun die Reaktivierungskraft in einem bestimmten Alter zu messen, sind folgende drei Grössen gleichzeitig in Betracht zu ziehen: 1. die Menge der Personen des betreffenden Alters x; ihre Anzahl sei $\zeta_x^{(\varrho)}$; 2. die Menge der Reaktivierungsfälle bis zum Alter $x + \Delta x$; diese Anzahl werde mit $(-\Delta\zeta_x^{(\varrho)})$ bezeichnet, nach der Gleichung [1])

$$\zeta_{x+\Delta x}^{(\varrho)} - \zeta_x^{(\varrho)} = \Delta\zeta_x^{(\varrho)}$$

3. die Grösse der Altersdifferenz Δx.

Man wird dann berechtigt sein, die Reaktivierungskraft um so höher anzuschlagen, 1. je grösser $(-\Delta\zeta_x^{(\varrho)})$; 2. je kleiner $\zeta_x^{(\varrho)}$ und 3. je kleiner Δx ist; der Ausdruck

$$-\frac{\Delta\zeta_x^{(\varrho)}}{\zeta_x^{(\varrho)} \cdot \Delta x} \qquad (29')$$

bildet demnach ein Mass für die Reaktivierungskraft auf der Altersstrecke von x bis $x + \Delta x$. Die in § 6 angestellten Überlegungen wiederholend, wird man, unter Zuhülfenahme der Kontinuitätshypothese und vermittelst des bekannten Grenzüberganges, den Ausdruck

$$'\varrho_x = -\frac{1}{\zeta_x^{(\varrho)}} \cdot \frac{d\zeta_x^{(\varrho)}}{dx} \qquad (30')$$

als „partielle [2]) Reaktivierungsintensität für das Alter x“ bezeichnen.

§ 20. Will man eine Reaktivierungsintensität ϱ_x dadurch definieren, dass man nicht die Reihe der $\zeta_x^{(\varrho)}$, sondern die tatsächlich sich einstellende Reihe der ζ_x (Reihe (4) in § 5) zugrunde legt, so wird man mit $\left(-{}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii}\right)$ die Anzahl der Reaktivierungsfälle auf der Altersstrecke $x \ldots . x + \Delta x$ bezeichnen. Die Gesamtheit, aus welcher diese stammen, wird folgendermassen gebildet: Die ursprünglich vorhandenen l_x^{ii}, *vermindert* um die während der Zeitspanne Δx Verstorbenen und *vermehrt* um die während derselben Zeit invalid gewordenen Aktiven, also:

$$l_x^{ii} - \left(-{}^{(\mu)}\Delta l_x^{ii}\right) + \left(-{}^{(\nu)}\Delta l_x^{aa}\right)$$

$$= l_x^{ii} + \int_x^{x+\Delta x} \left(-\mu_x^{ii} \cdot l_x^{ii}\right) \cdot dx - \int_x^{x+\Delta x} \left(-\nu_x \cdot l_x^{aa}\right) \cdot dx$$

oder, bei Benutzung der Kontinuitätshypothese und Anwendung des Mittelwertsatzes,

$$= l_x^{ii} - \Delta x \cdot \mu_\xi^{ii} \cdot l_\xi^{ii} + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot l_\eta^{aa},$$

wobei ξ und η beide zwischen x und $x + \Delta x$ liegen. Wir setzen stillschweigend voraus, das Zeitintervall Δx sei schon so klein, dass ein Versicherter während dieser Zeit nicht mehr als zweimal den Bestand wechseln kann; die Möglichkeit einer solchen Wahl von Δx wird mathematisch gewährleistet durch die vorausgesetzte Differenziierbarkeit der betrachteten Funktionen, denn durch diese Voraussetzung werden solche Funktionen ausgeschlossen, die in einem endlichen Intervall unendlich viele Oszillationen aufweisen [1]). Die Reaktivierungskraft auf der betrachteten Altersstrecke wird demnach gemessen durch

$$\frac{-{}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii}}{\left(l_x^{ii} - \Delta x \cdot \mu_\xi^{ii} \cdot l_\xi^{ii} + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot l_\eta^{aa}\right) \cdot \Delta x} \qquad (29)$$

Lässt man nun Δx unendlich klein werden, so konvergieren ξ und η beide gegen x, und aus obigem Ausdruck wird folgende Definition der „Reaktivierungsintensität beim Alter x“:

$$\varrho_x = -\frac{1}{l_x^{ii}} \cdot \frac{{}^{(\varrho)}dl_x^{ii}}{dx} \qquad (30)$$

§ 21. Zu einer Beziehung zwischen den beiden Reaktivierungsintensitäten $'\varrho_x$ und ϱ_x gelangt man durch Vergleichung der definierenden Ausdrücke (29') und (29). Wird angenommen, dass es sich in beiden Fällen um dieselbe Altersdifferenz Δx handelt und dass die beiden Versicherungsbestände, auf welche sie sich beziehen, anfänglich von gleicher Grösse sind, so dass *für den Zeitpunkt* x die Gleichung

$$\zeta_x^{(\varrho)} = l_x^{ii} - \Delta x \cdot \mu_\xi^{ii} \cdot l_\xi^{ii} + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot l_\eta^{aa} \qquad (31)$$

besteht, so haben die zu vergleichenden Ausdrücke gleiche Nenner. Man überzeugt sich dann, dass die Zähler $(-\Delta\zeta_x^{(\varrho)})$ und $\left(-{}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii}\right)$ im allgemeinen ungleich sind und dass sich ihre Differenz wie folgt darstellen lässt (vergl. §§ 8, 12 und 17):

$$(-\Delta\zeta_x^{(\varrho)}) - \left(-{}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii}\right) = {}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii} - \Delta\zeta_x^{(\varrho)} =$$

$$\theta_1 \,.\, \Delta x \,.\, \mu_\xi^{ii} \,.\, l_\xi^{ii} \,.\! \int_x^{x+\Delta x} \varrho_x \cdot dx - \theta_2 \,.\, \Delta x \,.\, \nu_\eta \,.\, l_\eta^{aa} \,.\! \int_x^{x+\Delta x} \varrho_x \cdot dx,$$

wobei θ_1 und θ_2 positive, echte Brüche vorstellen.

Aus der gesuchten Differenz $\Delta\zeta_x^{(\varrho)} - {}^{(\varrho)}\Delta l_x^{ii}$ wird, nach abermaliger Anwendung des Mittelwertsatzes, die dank der Kontinuitätshypothese zulässig ist:

[1]) Vergl. die Fussnote 1 in § 6.

[2]) Bezüglich der Benennung vergl. den Schluss von § 4.

[1]) Vergl. die Fussnote 1 in § 25.

$$\theta_2 \cdot \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot \overline{l_\eta^{aa}} \cdot \Delta x \cdot \varrho_\lambda - \theta_1 \cdot \Delta x \cdot \mu_\xi^{ii} \cdot l_\xi^{ii} \cdot \Delta x \cdot \varrho_\lambda$$

wobei auch λ zwischen x und $(x + \Delta x)$ liegt.

Dividiert man jetzt durch $\Delta x \cdot \zeta_x^{(\varrho)}$, unter Berücksichtigung der Gleichung (31), und geht man dann zur Grenze über, so konvergieren die Werte ξ, η und λ alle drei gegen x und man erhält:

$$\varrho_x - {}'\varrho_x = \frac{\theta_2 \cdot \nu_x \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot \varrho_x - \theta_1 \cdot \mu_x^{ii} \cdot \overline{l_x^{ii}} \cdot \varrho_x}{l_x^{ii} + \left(\nu_x \cdot \overline{l_x^{aa}} - \mu_x^{ii} \cdot \overline{l_x^{ii}}\right) \cdot dx} \cdot dx$$

Da linker Hand eine endliche, rechter Hand dagegen eine unendlich kleine, zugleich mit dx gegen Null konvergierende Grösse steht, so ist *nach* vollzogenem Grenzübergang

$$\varrho_x = {}'\varrho_x. \tag{32}$$

§ **22.** Von der Reaktivierungsintensität ausgehend, gelangt man auf dem Wege der Integration zunächst zu den Zahlen $\zeta_x^{(\varrho)}$ der Reihe (28) (ähnlich wie in § 9 zu den $z_x^{(\nu)}$):

$$^{(\varrho)\prime}\overline{l_x^{ii}} = \zeta_x^{(\varrho)} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \varrho_x \cdot dx}, \tag{33}$$

unter der Annahme, dass der Anfangszustand definiert sei durch:

$$x = n \text{ und } {}^{(\varrho)\prime}l_n^{ii} = z_n;$$

ferner zum Begriff einer weiteren „partiellen Wahrscheinlichkeit“ (analog der in § 10 eingeführten):

$$\frac{^{(\varrho)\prime}\overline{l_{x+1}^{ii}}}{^{(\varrho)\prime}\overline{l_x^{ii}}} = {}^{(\varrho)\prime}\overline{p_x^{ii}} = e^{-\int_x^{x+1} \varrho_x \cdot dx}; \tag{34}$$

es ist die Wahrscheinlichkeit [1]), dass ein x-jähriger Invalide das Alter $x + 1$ als Dienstunfähiger erleben werde, unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass überhaupt nur die Reaktivierung auf den Bestand einwirke.

Zur genauen Formulierung der Bedeutung von $^{(\varrho)\prime}\overline{p_x^{ii}}$ bedarf es einer Betrachtung, die der in § 10 zur Definition von $^{(\nu)\prime}\overline{p_x^{aa}}$ angestellten ganz ähnlich ist; es sind nur die Worte „aktiv“ und „invalid“ miteinander zu vertauschen. Die Vorstellung ist also dabei folgende: Alle aus dem Bestande der $\zeta_x^{(\varrho)}$ Dienstunfähigen durch *Tod* Ausscheidenden, und nur solche, werden sofort durch gleichaltrige Invaliden ersetzt. Der echte Bruch $^{(\varrho)\prime}p_x^{ii}$ ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in der betrachteten Gesamtheit der $\zeta_x^{(\varrho)}$ Invaliden beliebig, aber

[1]) Siehe die Bemerkung am Schlusse von § 23.

bestimmt gewählter, x-jähriger Versicherter $M^{(\varrho)}$, eventuell (falls nämlich $M^{(\varrho)}$ vor Ablauf eines Jahres verstirbt und infolgedessen durch einen gleichaltrigen ersetzt wird) das letzte, an seine Stelle eingetretene Ersatzmitglied $M_s^{(\varrho)}$, das Alter $x + 1$ erleben werde, und zwar ohne vorher in die Reihen der Aktiven überzutreten (vergl. § 10).

Die Wahrscheinlichkeit des konträren Ereignisses bezeichnen wir mit

$$'r_x = 1 - {}^{(\varrho)\prime}p_x^{ii} \tag{34'}$$

$'r_x$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in der betrachteten Gesamtheit der $\zeta_x^{(\varrho)}$ Invaliden beliebig, aber bestimmt gewählte Person $M^{(\varrho)}$, eventuell (falls nämlich $M^{(\varrho)}$ vor Ablauf eines Jahres verstirbt und infolgedessen durch eine andere Person ersetzt wird) das letzte an Stelle von $M^{(\varrho)}$ eingetretene Ersatzmitglied $M_s^{(\varrho)}$, vor Erreichung des Alters $x + 1$ wieder in die Reihen der Aktiven übertreten werde.

§ **23.** Der oben durchgeführte Beweis, der mit der Gleichung $\varrho_x = {}'\varrho_x$ endigt, lässt sich, *mutatis mutandis*, auf jede andere Intensitätsfunktion übertragen. Das allgemeine Resultat lautet: *Jede der Intensitätsfunktionen* $\overline{\mu_x^{aa}}$, μ_x^{ii}, ν_x *und* ϱ_x *bleibt, bei festgehaltenem* x, *ungeändert, auch dann, wenn man die gleichzeitige Wirkung aller drei Veränderungsursachen (Sterben, Invalidisierung und Reaktivierung) berücksichtigt.* Während man demnach, bei der hier vorliegenden Aufgabe, von der Einführung „partieller Intensitätsfunktionen“ absehen kann, drängen sich dagegen die „partiellen Wahrscheinlichkeiten“ auf, sobald man durch Integration zu endlichen Zeitintervallen übergeht.

Der obige Beweis ist aber noch weittragender und das soeben erhaltene Resultat bleibt auch dann noch bestehen, wenn auf die unter Beobachtung stehende Personengruppe eine beliebig grosse, endliche Anzahl von Veränderungsursachen gleichzeitig einwirkt (Tod, Invalidität, Verwitwung, Krankheit, Reaktivierung, Heirat, freiwilliger Austritt, Neueintritte u. s. w.). Diese Veränderungsursachen, so zahlreich sie auch sein mögen, werden sich immer in zwei grosse Kategorien einteilen lassen: 1. solche, die einen Abgang von Mitgliedern, eine *Verminderung* des Bestandes, verursachen; 2. solche, die eine *Vermehrung* der Mitgliederanzahl bewirken. — Alle Veränderungsursachen der ersten Kategorie, infolge deren sich also die Reihen der Gesellschaft lichten, können zu *einer* resultierenden Verminderungsursache zusammengefasst werden. Die Gesamtzahl der während der Zeitspanne von x bis $x + \Delta x$ weggekommenen, vom betrachteten Bestande losgelösten Personen ist dann angebbar; wir können diese Anzahl, um die Bezeichnungen von § 20 beizubehalten, mit $(-{}^{(u)}\Delta l_x^{ii})$ bezeichnen. — Alle Veränderungsursachen der zweiten Kategorie, infolge deren sich also die Reihen der Gesellschaft verdichten, können ebenfalls zu *einer* resultierenden Vermehrungsursache zusammengefasst gedacht werden. Die Gesamtzahl der, während der Zeitspanne von x bis $x + \Delta x$, zu dem Bestande neu hinzugekommenen Mitglieder ist angebbar; sie sei $(-{}^{(v)}\Delta l_x^{aa})$, um wieder die Bezeichnungen von § 20 beizubehalten. Es erhalten dann auch die Zeichen μ_x^{ii} und ν_x von § 20 eine entsprechend abzuändernde Bedeutung: an Stelle von μ_x^{ii} tritt die „Ausscheidensintensität“ α_x, an Stelle von ν_x die „Vermehrungsintensität“ β_x.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich aber dann, *mutatis mutandis*, der ganze in § 21 geführte Beweis für *jede* Intensitätsfunktion wörtlich wiederholen. An Stelle von zwei Veränderungsursachen, einer vermehrenden und einer vermindernden, treten dann zwei Kategorien von Veränderungsursachen, gewissermassen zwei Resultierende. — Damit ist aber bewiesen, dass *irgendeine Intensitätsfunktion bei festgehaltenem Alter denselben Wert behält, welchen Veränderungen auch die unter Beobachtung stehende Gruppe von Personen unterworfen ist, vorausgesetzt nur, dass sie aus Gleichaltrigen besteht.* Zugleich erkennt man, dass die Intensität einer Veränderungsursache eine Grösse ist, der eine selbständige Bedeutung zukommt, dass sie von „fremden“ Einwirkungen ganz unabhängig ist, sobald nur die „Masse“, auf welche die betreffende Veränderungsursache einwirkt, als Funktion der Zeit betrachtet, eine differenziierbare Funktion darstellt.

In seiner „Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwen-Societät am 31. Dezember 1890“, einer klassischen, 1893 erschienenen Arbeit, S. 42—45, hat Herr Professor *J. Karup* ohne Zuhülfenahme der Integralrechnung diesen Beweis für die Heiratsintensität geführt[1]). Der hier gegebene hat den Vorteil, die mathematisch notwendigen Voraussetzungen klar hervortreten zu lassen: Die Differenziierbarkeit der auftretenden Funktionen, sobald man Wechselwirkung zwischen mehreren Beständen zulässt. (Vergl. Fussnote 1 in § 25.)

[1]) In der Formel *(e)*, auf Seite 44 der eben zitierten *Karup*schen Arbeit, steht aus Versehen im Zähler des ersten Bruches, welcher ε multipliziert, $\overline{P}(t)$ statt 1. Der Fehler hat sich in der zweitvorhergehenden Formel eingeschlichen; die rechte Seite der betreffenden Gleichung sollte nicht $\dfrac{\overline{H}(t+\Delta t)-\overline{H}(t)}{\overline{P}(t)}$ heissen, wie dort steht, sondern einfach $\overline{H}(t+\Delta t)-\overline{H}(t)$. Das Versehen beeinflusst jedoch das Endresultat nicht.

Gestützt auf dies Resultat und auf die gemachten Voraussetzungen können wir jetzt dazu übergehen, die allgemeinen Differentialgleichungen aufzustellen, durch welche die vorliegende Aufgabe eine mathematisch scharfe Formulierung erhält.

Bemerkung. Man könnte versucht sein, die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf partielle Wahrscheinlichkeiten zu bestreiten, weil dieselben den *formalen Bedingungen* eines Wahrscheinlichkeitsbruches nicht genügten. Diese Bedingungen bestehen bekanntlich in folgendem: 1. *der Nenner* muss eine Anzahl von gleich möglichen „Fällen“ zählen, die *alle* einen bestimmten Verlauf nehmen *könnten*; 2. *der Zähler* des Bruches muss die Anzahl derjenigen *unter diesen Fällen* angeben, welche jenen bestimmten Verlauf tatsächlich genommen haben. Mit andern Worten: Die Menge, auf welche sich der Zähler bezieht, muss als Teilmenge in der durch den Nenner des Bruches abgezählten enthalten sein; *Zähler und Nenner müssen sich beide auf ein und dieselbe Gesamtheit beziehen.*

Dieses Merkmal einer Wahrscheinlichkeitsgrösse kann dem Bruche $\frac{d}{L}$ nicht zugesprochen werden, wenn z. B. der Nenner L die zu Anfang eines Kalenderjahres vorhandene Bevölkerung eines Landes, und der Zähler d die in dem gleichen Lande während desselben Kalenderjahres sich ereignenden Todesfälle angibt, denn unter diesen d Todesfällen sind dann auch diejenigen mitgezählt, die von Kindern herrühren, welche erst im Verlaufe des Jahres geboren wurden; Zähler und Nenner beziehen sich dann also nicht auf dieselbe Gesamtheit. Es soll hiermit die Nützlichkeit solcher statistischer Verhältniszahlen durchaus nicht in Frage gestellt werden; nur muss man sich hüten, die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne weiteres auf sie anzuwenden, will man nicht zu unrichtigen Resultaten gelangen.

Obiger Bruch $\frac{d}{L}$ erhält erst dann die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsgrösse, wenn unter L verstanden wird: die zu Anfang des Jahres vorhandene Bevölkerung *vermehrt* um die Anzahl der während des Jahres Geborenen; dann erst gibt der Zähler d an, wie viele *von den im Nenner gezählten „Fällen“* den fraglichen Verlauf (in diesem Beispiele: den tödlichen Ausgang) tatsächlich genommen haben.

Den gleichen Einwand wie beim Bruche $\frac{d}{L}$ könnte man nun gegen eine partielle Wahrscheinlichkeit zu erheben versucht sein. Nehmen wir als Beispiel:

$$^{(u)}p_x^{aa} = \frac{z_{x+1}^{(u)}}{z_x^{(u)}}$$

Wie schon in § 14 ausgeführt, bedeutet dieser echte Bruch die Wahrscheinlichkeit, dass eine in der Gesamtheit der $z_x^{(u)}$ Aktiven beliebig, aber bestimmt gewählte, x-jährige Person, eventuell (falls sie nämlich vor Ablauf eines Jahres von Invalidität betroffen wird) das an ihre Stelle zuletzt eingetretene Ersatzmitglied, das Alter $x + 1$ im Zustande der Aktivität erleben werde. Weil nun der Einfluss der Invalidität *dadurch* ausgeschaltet gedacht wird, dass „Ersatzmitglieder“ *an Stelle* der von Invalidität Betroffenen eintreten, sind nach Ablauf eines Jahres, also im Zeitpunkte $x + 1$, nicht nur solche Mitglieder der fingierten Gesellschaft, die ursprünglich und im Zeitpunkte x vorhanden waren, da, sondern auch die während des Jahres nach und nach eingetretenen „Ersatzmitglieder“; letztere figurieren demnach wohl im Zähler $z_{x+1}^{(u)}$, aber nicht im Nenner $z_x^{(u)}$. Es liegt also nahe, einzuwenden, dass in diesem Falle (gerade wie früher beim Bruche $\frac{d}{L}$) die Menge, die im Zähler $z_{x+1}^{(u)}$ steht, nicht als Teilmenge in der durch den Nenner $z_x^{(u)}$ abgezählten enthalten sei, dass sich demnach Zähler und Nenner nicht auf ein und dieselbe Gesamtheit beziehen und infolgedessen ${}^{(u)}p_x^{\overline{aa}}$ keine richtige Wahrscheinlichkeitsgrösse sei. Sollten die an Wahrscheinlichkeitsbrüche zu stellenden formalen Bedingungen erfüllt werden, so müsse unter $z_x^{(u)}$ verstanden werden: die im Zeitpunkte x vorhandenen Mitglieder vermehrt um diejenigen, die im Laufe des Jahres an Stelle der Invalidgewordenen eintreten.

Indessen ist dieser Einwand nicht stichhaltig. Beim Begriffe der partiellen Wahrscheinlichkeit besteht nämlich das Wesentliche darin, *dass* der Einfluss einer Veränderungsursache ausgeschaltet werde, aber nicht darin, *auf welche Art und Weise* dieses Ausschalten vorgenommen wird. Fassen wir wieder das oben gewählte Beispiel von ${}^{(u)}p_x^{\overline{aa}}$ ins Auge, so braucht man durchaus nicht an der Vorstellung festzuhalten, der Einfluss der Invalidität werde dadurch aufgehoben, dass neue Mitglieder an Stelle der von Dienstunfähigkeit betroffenen eintreten. Man kann sich etwa denken (wohl nur theoretisch, aber hier handelt es sich auch nur um eine theoretische Auseinandersetzung), jedes invalid gewordene Mitglied werde auf der Stelle wieder gesund gemacht, durch den Wunderstab einer gütigen Fee, und könne unter denselben Bedingungen in seinem Berufe gleich weiterarbeiten. Bei dieser theoretisch wohl möglichen Ausschaltung der Dienstunfähigkeit übersieht man ohne weiteres, dass die am Schlusse des Jahres noch vorhandenen $z_{x+1}^{(u)}$ Personen einen Teil der am Anfange des Jahres vorhandenen $z_x^{(u)}$ Mitglieder bilden, dass sich demnach Zähler und Nenner des Bruches, durch den ${}^{(u)}p_x^{\overline{aa}}$ definiert wird, auf ein und dieselbe Gesamtheit beziehen, und dass infolgedessen besagter Bruch, weil er die notwendige formale Bedingung erfüllt, tatsächlich das Merkmal einer Wahrscheinlichkeitsgrösse besitzt.

Es erhellt ohne Mühe, dass ähnliche Überlegungen für alle andern oben behandelten Wahrscheinlichkeiten, und allgemein für jede solche Grösse, angestellt werden können, auch ohne den Wunderstab einer gütigen Fee zu Hülfe zu rufen. Die Idee, je nach Bedürfnis „Ersatzmitglieder“ in die durch „fremde Einflüsse“ gelichteten Reihen eintreten zu lassen, hatte nur den Zweck — namentlich im Anfange des durch *J. Karups* Gutachten von 1875 entfachten Streites — ein auf natürlichem Wege realisierbares Mittel anzugeben, wie „fremde Einflüsse“ ausgeschaltet werden könnten. (Vergl. hiermit § 53.)

§ **24.** An die zu Anfang dieses Kapitels angestellten Betrachtungen anknüpfend fassen wir einen sehr gross vorausgesetzten Versicherungsbestand B_a ins Auge, eine fingierte Gesellschaft bestehend aus $l_x^{\overline{aa}}$ gleichaltrigen aktiven Personen gleichen Geschlechtes, die zu gleicher Zeit, am gleichen Ort und unter gleichen Lebensbedingungen denselben Beruf ausüben, ferner einen zweiten ähnlichen Bestand B_i, der l_x^{ii} „Invalide“ desselben Alters x zählen möge. Von letzteren wird vorausgesetzt, dass sie sämtlich aus dem Bestande der Aktiven stammen, indem sie im Laufe der Zeit „dienstunfähig“ wurden (gleichgültig, aus welchem Grunde, ob durch Unfall, oder durch Krankheit, oder infolge vorgerückten Alters, wie bereits oben in § 1 bemerkt ist). Wir nehmen endlich an, zwischen diesen beiden Gesamtheiten finde die in § 2 geschilderte Wechselwirkung statt: B_a und B_i büssen an Grösse ein, da in beiden die Mitglieder nach und nach absterben, B_i erhält aber Zuwachs durch die aus B_a kommenden, „invalid“ werdenden Aktiven, und B_a seinerseits wird vermehrt durch die aus B_i stammenden, reaktivierten „Invaliden“. Den Umstand, dass die Sterblichkeitsverhältnisse im Bestande der Aktiven durch die Reaktivierung beeinflusst werden könnten, weil die aus den Reihen der „Invaliden“ wieder Herüberkommenden nicht mehr die gleiche Lebenskraft besitzen, wie diejenigen, die immer aktiv geblieben sind, lassen wir ganz ausser Betracht. Wir nehmen vielmehr an, ein x-jähriger Aktiver habe eine bestimmte, von seinem Alter x abhängige Lebenswahrscheinlichkeit $p_x^{\overline{aa}}$ und diese sei dieselbe, gleichgültig, ob der betreffende vorübergehend arbeitsunfähig gewesen ist und früher schon einmal zu den Invaliden gehört hat oder nicht.

Diese Voraussetzung besagt nicht, dass die Sterbensintensität einzig und allein vom Alter abhängig, dass die Einwirkung anderer Faktoren ausgeschlossen sei.

Es wird im Gegenteil zugelassen, dass z. B. jede Berufsart einen ihr eigenen Verlauf der Sterblichkeit aufweise. Nur die *Beeinflussung* der Mortalitätsverhältnisse innerhalb ein und derselben bestimmten Aktivengruppe *durch Zuzug neuer Mitglieder* wollen wir ausschliessen, nicht nur, um die Aufgabe zu vereinfachen, sondern auch weil (bis jetzt wenigstens) nicht die nötigen Beobachtungsdaten vorliegen, die es möglich machen würden, eine derartige Beeinflussung zahlenmässig genau zu berücksichtigen.

Betrachten wir nun den aus $\overline{l_x^{aa}}$ Aktiven zusammengesetzten Bestand B_a für sich. Während des Zeitintervalles von x bis $x + \Delta x$ erfährt er eine bestimmte Veränderung:

$$\Delta \overline{l_x^{aa}} = \overline{l_{x+\Delta x}^{aa}} - \overline{l_x^{aa}},$$

welche die Resultierende aus drei Komponenten ist: 1. Verminderung infolge von Sterblichkeit; 2. Verminderung infolge von Invalidität; 3. Vermehrung infolge von Reaktivierung. Die betreffenden Anzahlen stehen also in folgendem Zusammenhang:

$$\left(-\Delta \overline{l_x^{aa}}\right) = \left(-{}^{(\mu)}\Delta \overline{l_x^{aa}}\right) + \left(-{}^{(\nu)}\Delta \overline{l_x^{aa}}\right) - \left(-{}^{(\varrho)}\Delta \overline{l_x^{ii}}\right)$$

oder

$$\Delta \overline{l_x^{aa}} = {}^{(\mu)}\Delta \overline{l_x^{aa}} + {}^{(\nu)}\Delta \overline{l_x^{aa}} - {}^{(\varrho)}\Delta \overline{l_x^{ii}};$$

indem man jedes Glied dieses Trinoms mit $\overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x$ erweitert, findet man:

$$\begin{aligned}\Delta \overline{l_x^{aa}} &= \frac{1}{\overline{l_x^{aa}}} \cdot \frac{{}^{(\mu)}\Delta \overline{l_x^{aa}}}{\Delta x} \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x \\ &+ \frac{1}{\overline{l_x^{aa}}} \cdot \frac{{}^{(\nu)}\Delta \overline{l_x^{aa}}}{\Delta x} \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot \Delta x \\ &- \frac{1}{\overline{l_x^{ii}}} \cdot \frac{{}^{(\varrho)}\Delta \overline{l_x^{ii}}}{\Delta x} \cdot \overline{l_x^{ii}} \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Lassen wir jetzt das Zeitintervall Δx immer kleiner und kleiner werden, unter Heranziehung der Kontinuitätshypothese, und berücksichtigen wir die oben gegebenen Definitionen von $\mu_x^{\overline{aa}}$ [Gleichung (17)], $\mu_x^{\overline{ii}}$ [Gleichung (24)], ν_x [Gleichung (8)] und ϱ_x [Gleichung (30)], so wird schliesslich für eine unendlich kleine Zeitstrecke:

$$d\overline{l_x^{aa}} = -\mu_x^{\overline{aa}} \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot dx - \nu_x \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot dx + \varrho_x \cdot \overline{l_x^{ii}} \cdot dx,$$

oder

$$\frac{d\overline{l_x^{aa}}}{dx} = \overline{l_x^{ii}} \cdot \varrho_x - \overline{l_x^{aa}} \cdot \left(\mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x\right) \qquad (35)$$

Ganz analoge Betrachtungen gelten für B_i, den Bestand der Invaliden. Sie liefern eine Gleichung von derselben Gestalt, nämlich:

$$\frac{d\overline{l_x^{ii}}}{dx} = \overline{l_x^{aa}} \cdot \nu_x - \overline{l_x^{ii}} \cdot \left(\mu_x^{\overline{ii}} + \varrho_x\right) \qquad (36)$$

So hat sich ein System von zwei simultanen Differentialgleichungen ergeben, in welchem wir die vier Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x und ϱ_x als bekannt ansehen werden. Es gilt, zwei Funktionen $z_x = \overline{l_x^{aa}}$ und $\zeta_x = \overline{l_x^{ii}}$ zu finden, welche diesen beiden Gleichungen Genüge leisten. Das System der zwei simultanen Differentialgleichungen ist die *erste* analytische Ausdrucksform des hier vorliegenden Problems.

§ **25.** Es ist zu bemerken, dass man noch auf anderem Wege zu diesen Differentialgleichungen gelangen kann. Anstatt die vier Veränderungsursachen (deren Intensitäten durch $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x und ϱ_x charakterisiert werden) miteinander und gleichzeitig wirken zu lassen, lässt man sie *nacheinander* ihren Einfluss ausüben. Zunächst ein endliches Zeitintervall Δx betrachtend, ermittelt man sukzessive:

1. Die Veränderung der zwei Bestände infolge der Sterblichkeit der Aktiven;
2. die durch Invalidität in den so veränderten Beständen hervorgerufenen neuen Veränderungen;
3. die durch die Sterblichkeit der Invaliden hervorgebrachten abermaligen Veränderungen der schon zweimal beeinflussten Gesamtheiten;
4. die durch Reaktivierung verursachten neuen Veränderungen beider Gesamtheiten.

Es wäre dabei denkbar, dass ein versichertes Mitglied während des Zeitintervalles Δx aus B_i nach B_a überträte und gleich darauf, etwa infolge eines Unfalles, wieder dienstunfähig würde, und so mehrmals den Bestand wechselte. Man müsste demnach von vornherein Δx so klein wählen, dass während dieser Zeit ein derartiger Wechsel nicht mehr als zweimal eintreten kann. Die in § 3 vorausgesetzte Differenziierbarkeit der Funktion $z(x)$ ermöglicht immer eine solche Wahl, und hieraus ist ersichtlich, dass auch diese Voraussetzung der Differenziierbarkeit von $z(x)$ und von $\zeta(x)$ notwendig ist [1]).

---

[1]) Vom streng mathematischen Standpunkt aus genügt die Annahme der Stetigkeit von z_x nicht, denn seit *Weierstrass* weiss man bekanntlich, dass es stetige und doch nicht differenziierbare Funktionen gibt. Da aber eine differenziierbare Funktion notwendigerweise auch stetig ist, lautet die einfachste mathematische Formulierung unserer Kontinuitätshypothese (vergl. § 3): Es wird die Differenziierbarkeit der auftretenden Funktionen vorausgesetzt.

Alle soeben unter 1. bis 4. aufgezählten Veränderungen lassen sich durch bestimmte Integrale, erstreckt zwischen den Grenzen x und $x + \Delta x$, genau angeben, auch ohne dass es dazu nötig wäre, über den Verlauf von Sterblichkeit, Invalidisierung oder Reaktivierung irgendeine spezielle Annahme zu treffen, abgesehen von der Stetigkeit des Vorganges. Eine mehrmalige Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gestattet zunächst eine Vereinfachung der erhaltenen Ausdrücke, mit denen man alsdann den Grenzprozess durchführen kann. Das Resultat ist wieder obiges System von simultanen Differentialgleichungen (35) und (36).

Eine derartige Herleitung besagter Gleichungen möge hier, wegen der ihnen zukommenden prinzipiellen Wichtigkeit, kurz skizziert werden:

Ursprünglicher Bestand der fingierten Gesellschaften: B_a zählt z_x Mitglieder; B_i zählt ζ_x Mitglieder.

1. *Einwirkung der Sterblichkeit der Aktiven:* Die Anzahl der Todesfälle in den Reihen der Aktiven während der Zeitspanne Δx beträgt:

$$\left(-{}^{(\mu)}\Delta z_x\right) = -\int_x^{x+\Delta x}\left(-\mu_x^{\overline{aa}}\right) \cdot z_x \cdot dx = \Delta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi ,$$

wobei $x < \xi < x + \Delta x$.

Veränderter Bestand der Versicherten: B_a zählt jetzt

$$z_x - \Delta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi = z_x^{(1)}$$

Mitglieder; B_i zählt deren ζ_x.

2. *Einwirkung der Invalidität* auf die veränderten Bestände: Die Anzahl der Invaliditätsfälle während der Zeitspanne Δx beträgt:

$$\left(-{}^{(\nu)}\Delta z_x^{(1)}\right) = -\int_x^{x+\Delta x}(-\nu_x) \cdot z_x^{(1)} \cdot dx = \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot z_\eta^{(1)},$$

wobei $x < \eta < x + \Delta x$.

Veränderter Bestand an Versicherten: B_a zählt jetzt

$$z_x^{(1)} - \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot z_\eta^{(1)} = z_x^{(2)}$$

Mitglieder; B_i zählt jetzt

$$\zeta_x + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot z_\eta^{(1)} = \zeta_x^{(1)}$$

Versicherte.

3. *Einwirkung der Sterblichkeit der Invaliden* auf die veränderten Bestände: Die Anzahl der Todesfälle in den Reihen der Invaliden während der Zeit Δx beträgt nunmehr:

$$\left(-{}^{(\mu)}\Delta \zeta_x^{(1)}\right) = -\int_x^{x+\Delta x}\left(-\mu_x^{\overline{ii}}\right) \cdot \zeta_x^{(1)} \cdot dx = \Delta x \,.\, \mu_\theta^{\overline{ii}} \cdot \zeta_\theta^{(1)},$$

wobei $x < \theta < x + \Delta x$.

Veränderter Bestand an Versicherten: B_a zählt jetzt $z_x^{(2)}$ Mitglieder; B_i aber:

$$\zeta_x^{(1)} - \Delta x \cdot \mu_\theta^{\overline{ii}} \cdot \zeta_\theta^{(1)} = \zeta_x^{(2)}$$

4. *Einwirkung der Reaktivierung* auf die veränderten Bestände: Die Anzahl der Reaktivierungsfälle während des Zeitintervalles Δx beträgt:

$$\left(-{}^{(\varrho)}\Delta \zeta_x^{(2)}\right) = -\int_x^{x+\Delta x}(-\varrho_x) \cdot \zeta_x^{(2)} \cdot dx = \Delta x \cdot \varrho_r \cdot \zeta_r^{(2)},$$

wobei $x < r < x + \Delta x$.

Veränderter Bestand an Versicherten: B_a zählt nunmehr

$$z_x^{(2)} + \Delta x \cdot \varrho_r \cdot \zeta_r^{(2)} = z_x^{(3)}$$

Mitglieder, und B_i:

$$\zeta_x^{(2)} - \Delta x \cdot \varrho_r \cdot \zeta_r^{(2)} = \zeta_r^{(3)}$$

5. Der Bestand B_a zählte ursprünglich z_x, nunmehr $z_x^{(3)}$ Mitglieder; folglich beträgt die durch sukzessive Einwirkung von Sterblichkeit, Invalidität und Reaktivierung hervorgerufene *totale* Änderung der Anzahl der versicherten Aktiven:

$$\Delta z_x = z_x^{(3)} - z_x$$

Substituiert man an Stelle von $z_x^{(3)}$, $z_x^{(2)}$, $z_x^{(1)}$, $\zeta_x^{(2)}$, $\zeta_x^{(1)}$ die obigen Ausdrücke, so findet man:

$$\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = -\mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi - \nu_\eta \cdot \left(z_\eta - \Delta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi\right) + \varrho_r \cdot \left\{\begin{array}{l}\zeta_r + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot \left(z_\eta - \Delta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi\right) \\ - \Delta x \cdot \mu_\theta^{ii} \cdot \left(\zeta_\theta + \Delta x \cdot \nu_\eta \cdot \left[z_\eta - \Delta x \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi\right]\right)\end{array}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = & -\mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi - \nu_\eta \cdot z_\eta + \varrho_r \cdot \zeta_r \\ & + \Delta x \cdot \left\{\nu_\eta \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi + \varrho_r \cdot \nu_\eta \cdot z_\eta - \varrho_r \cdot \mu_\theta^{ii} \cdot \zeta_\theta\right\} \\ & - (\Delta x)^2 \cdot \left\{\nu_\eta \cdot \varrho_r \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi + \nu_\eta \cdot \varrho_r \cdot \mu_\theta^{\overline{ii}} \cdot z_\eta\right\} \\ & + (\Delta x)^3 \cdot \nu_\eta \cdot \varrho_r \cdot \mu_\theta^{\overline{ii}} \cdot \mu_\xi^{\overline{aa}} \cdot z_\xi\end{aligned}$$

Geht man nun zur Grenze über, indem man $\Delta x \to 0$ werden lässt, so konvergieren η, θ, r und ξ gegen x, da sie alle zwischen x und $x + \Delta x$ liegen. *Nach* vollzogenem Grenzübergang ist Δx Null geworden, und obige Gleichung hat sich in die folgende verwandelt:

$$\frac{dz_x}{dx} = - \overline{\mu_x^{aa}} \cdot z_x - \nu_x \cdot z_x + \varrho_x \cdot \zeta_x,$$

welche mit der in § 24 auf anderm Wege abgeleiteten Gleichung (35) identisch ist. — In ähnlicher Weise leitet man aus der totalen Änderung $\Delta \zeta_x = \zeta_x^{(3)} - \zeta_x$ die Gleichung (36) des § 24 ab.

Indem man die Reihenfolge, in der die vier Veränderungsursachen nacheinander wirksam gedacht werden, variiert, kann man auf 24 verschiedenen Wegen vorgehen. Für endliche Zeitintervalle Δx gelangt man dabei im allgemeinen zu verschiedenen Resultaten. Sobald man aber den Grenzprozess durchführt, reduzieren sich alle auf dieselben Gleichungen (35) und (36). Der Nachweis hiervon bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. In unserer Darstellungsweise ist er überflüssig, denn wir haben in § 21 nachgewiesen, dass keine der Intensitätsfunktionen sich ändert, wenn man, bei festgehaltenem Alter x, mehrere Veränderungsursachen gleichzeitig berücksichtigt.

§ 26. Zur Abkürzung der Schreibweise möge vorübergehend gesetzt werden (vergl. Schluss von § 2):

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{l_x^{aa}} = z; & \overline{\mu_x^{aa}} = f(x); & \nu_x = F(x) \\ \overline{l_x^{ii}} = \zeta; & \overline{\mu_x^{ii}} = \varphi(x); & \varrho_x = \Phi(x) \\ \frac{d\overline{l_x^{aa}}}{dx} = z' \text{ [1]}; & \frac{d\overline{l_x^{ii}}}{dx} = \zeta' \text{ [1]} & \end{array}\right\} \quad (37)$$

Unsere Differentialgleichungen (35) und (36) lauten dann:

$$z' = \zeta \cdot \Phi(x) - z \cdot (f(x) + F(x)) \qquad (35)$$

$$\zeta' = z \cdot F(x) - \zeta \cdot (\varphi(x) + \Phi(x)) \qquad (36)$$

Durch einmalige Differentiation erhält man hieraus, wenn zur Abkürzung das Argument x überall unterdrückt wird:

$$z'' = \zeta' \cdot \Phi + \zeta \cdot \Phi' - z' \cdot (f + F) - z \cdot (f' + F') \quad (35')$$

$$\zeta'' = z' \cdot F + z \cdot F' - \zeta' \cdot (\varphi + \Phi) - \zeta \cdot (\varphi' + \Phi') \quad (36')$$

Der Wert von ζ ergibt sich aus (35):

$$\zeta = \frac{1}{\Phi} \cdot \left\{z' + z \cdot (f + F)\right\},$$

dann derjenige von ζ' aus (36):

$$\zeta' = z \cdot F - \frac{\varphi + \Phi}{\Phi} \cdot \left\{z' + z \cdot (f + F)\right\}$$

[1]) Vergl. die Fussnote 6 in § 4.

Beide in (35′) substituiert verwandeln diese Gleichung in:

$$z'' = z \cdot \left\{(f + F) \cdot \left(\frac{\Phi'}{\Phi} - \varphi\right) - f \cdot \Phi - f' - F'\right\}$$
$$- z' \cdot \left\{\varphi + \Phi + f + F - \frac{\Phi'}{\Phi}\right\} \qquad (38)$$

Durch Vertauschung der lateinischen Buchstaben mit den entsprechenden griechischen und umgekehrt (vergl. den Schluss von § 2) erhält man das Resultat der entsprechenden auf (36′) angewandten Transformation:

$$\zeta'' = \zeta \cdot \left\{(\varphi + \Phi) \cdot \left(\frac{F'}{F} - f\right) - \varphi \cdot F - \varphi' - \Phi'\right\}$$
$$- \zeta' \cdot \left\{f + F + \varphi + \Phi - \frac{F'}{F}\right\} \qquad (39)$$

Diese gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bildet eine *zweite* analytische Ausdrucksform des hier vorliegenden Problems.

Die Ordnung der Gleichung (38) kann leicht auf die erste erniedrigt werden. Bezeichnet man zur Abkürzung den Koeffizienten von z' mit $k_1(x)$, denjenigen von z mit $k_2(x)$, so wird aus (38):

$$z'' = z' \cdot k_1(x) + z \cdot k_2(x) \qquad (38')$$

Eine einmalige Integration wird durch Einführung einer neuen Funktion

$$u = - \frac{z'}{z} \qquad (40')$$

geleistet; diese Substitution liefert nämlich:

$$u' = - \frac{z'' \cdot z - z'^2}{z^2} = - \frac{z''}{z} + \left(\frac{z'}{z}\right)^2 = - \frac{z''}{z} + u^2$$

woraus: $\dfrac{z''}{z} = u^2 - u'$

Die Gleichung (38′) verwandelt sich dann, nach Division durch z, in folgende:

$$u' = u^2 + u \cdot k_1(x) - k_2(x) \qquad (40)$$

Das ist aber eine *allgemeine Riccattische* Gleichung.

Eine weitere formelle Vereinfachung wird durch die Substitution

$$v = u + \frac{1}{2} \cdot k_1(x), \text{ woraus } u' = v' - \frac{1}{2} \cdot k_1'(x),$$

erzielt; denn die Gleichung (40) geht dann über in:

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + g(x) \qquad (41)$$

Dabei ist $g(x)$ eine Abkürzung für den Ausdruck:

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot k_1'(x) - \frac{1}{4} \cdot k_1^2(x) - k_2(x)$$

$$= \frac{\Phi'}{2\Phi} \cdot \left[\varphi + \Phi - f - F - \frac{3}{2} \cdot \frac{\Phi'}{\Phi}\right]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\varphi' + \Phi' - f' - F' - \frac{\Phi''}{\Phi}\right)$$

$$- \frac{1}{4} \cdot (\varphi + \Phi + f + F)^2 + (\varphi \cdot f + \varphi \cdot F + f \cdot \Phi)$$

Die Gleichung (41) ist eine *dritte* analytische Ausdrucksform unserer Aufgabe; das Problem ist hiermit auf die Auflösung einer *allgemeinen Riccattischen* Gleichung zurückgeführt.

Die Äquivalenz der *allgemeinen Riccattischen* Gleichung mit der speziellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung (38′) ist eine bekannte Tatsache und wurde schon von den ersten Mathematikern, die sich mit Spezialfällen der *Riccattischen* Gleichung beschäftigten, besonders von *Leonhard Euler*, hervorgehoben. *J. F. Riccatti* ist selber zur Gleichung, die seinen Namen trägt, gelangt, indem er von einer Gleichung zweiter Ordnung ausging [siehe „Acta Eruditorum Lips". Suppl. 8 (1724), p. 66—73]. Der Umstand, dass man ohne weiteres, durch eine Substitution (40′), die Gleichung (38′) in eine Gleichung (40) transformieren kann, und umgekehrt, ist für das Studium der Integrabilität dieser Gleichung von grosser Bedeutung (vergl. § 37).

Bevor wir nun die allgemeine Gleichung weiter behandeln, wollen wir in einem zweiten Kapitel den wichtigen Spezialfall erörtern, in welchem nur dauernde Invalidität berücksichtigt wird, eine Reaktivierung also nie stattfindet.

II. Kapitel.

Behandlung des Falles, in dem keine Reaktivierung stattfindet.

§ 27. Man fasse die zu Anfang des ersten Kapitels betrachteten Versicherungsbestände B_a und B_i ins Auge und nehme an, es handle sich nur um absolute und dauernde Invalidität. Eine Reaktivierung ist dann ausgeschlossen und infolgedessen $\varrho_x = 0$ für jedes Alter x. (Dasselbe liesse sich übrigens auch bei Annahme vorübergehender Invalidität erreichen, nur müsste man dann die reaktivierten Invaliden für den Bestand B_i als Ausscheidende, für den Bestand B_a als neu Eintretende auffassen; doch ist dies, wie schon in § 2 bemerkt, streng genommen nur dann zulässig, wenn sich die Invalidenrente *nicht* nach dem Dienstalter richtet.) Die in Kapitel I, § 24 aufgestellten allgemeinen Differentialgleichungen (35) und (36) gehen dann in folgende über:

$$\frac{d\overline{l_x^{aa}}}{dx} = - \overline{l_x^{aa}} \cdot \left(\overline{\mu_x^{aa}} + \nu_x\right) \qquad (1)$$

$$\frac{d\overline{l_x^{ii}}}{dx} = \overline{l_x^{aa}} \cdot \nu_x - \overline{l_x^{ii}} \cdot \overline{\mu_x^{ii}} \qquad (2)$$

Behält man die in Kapitel I, § 26 eingeführten, abkürzenden Bezeichnungen (37) bei, so gilt es, zwei Funktionen z und ζ derart zu bestimmen, dass sie den Gleichungen

$$z' = - z \cdot [f(x) + F(x)] \qquad (1')$$

$$\zeta' = z \cdot F(x) - \zeta \cdot \varphi(x) \qquad (2')$$

Genüge leisten.

Aus der Gleichung (1′) zieht man:

$$\frac{dz}{z} = - [f(x) + F(x)] \cdot dx \qquad (1'')$$

woraus $\operatorname{Log} z = \int [- f(x) - F(x)] \cdot dx + C$ folgt. Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Anfangsbedingung:

$$\text{für } x = n \text{ ist } \overline{l_n^{aa}} = z_n$$

(vergl. Kapitel I, § 9). Dann wird:

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} z_n + \int_n^x [- f(x) - F(x)] \cdot dx,$$

folglich, wenn die Bedeutung von z, $f(x)$ und $F(x)$ berücksichtigt wird:

$$z = \overline{l_x^{aa}} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \left(\overline{\mu_x^{aa}} + \nu_x\right) \cdot dx} \qquad (3)$$

Aus der Gleichung (3) entspringt eine sehr einfache Beziehung zwischen $\overline{l_x^{aa}}$ und $\overline{l_{x+1}^{aa}}$ (vergleiche Kapitel I, § 10):

$$\frac{\overline{l_{x+1}^{aa}}}{\overline{l_x^{aa}}} = \overline{p_x^{aa}} = e^{-\int_x^{x+1} \left(\overline{\mu_x^{aa}} + \nu_x\right) \cdot dx}$$

$$= e^{-\int_x^{x+1} \overline{\mu_x^{aa}} \cdot dx} \cdot e^{-\int_x^{x+1} \nu_x \cdot dx}$$

$$\overline{p_x^{aa}} = {}^{(\mu)\prime}\overline{p_x^{aa}} \cdot {}^{(\nu)\prime}\overline{p_x^{aa}}$$

[§ 14, Gleichung (22)] [§ 10, Gleichung (15) und (15′)]

$$\overline{p_x^{aa}} = {}^{(\mu)}\overline{p_x^{aa}} \cdot (1 - {}'i_x) \qquad (4)$$

Diese in voller Allgemeinheit schon von *J. Karup* aufgestellte Beziehung (4) liefert eine Absterbeordnung der Aktiven:

$$\begin{aligned} \overline{l}_n^{aa} &= z_n \\ \overline{l}_{n+1}^{aa} &= z_n \cdot \overline{p}_n^{aa} \\ \overline{l}_{n+2}^{aa} &= z_n \cdot \overline{p}_n^{aa} \cdot \overline{p}_{n+1}^{aa} \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ \overline{l}_{x+1}^{aa} &= \overline{l}_x^{aa} \cdot \overline{p}_x^{aa} = z_n \cdot \overline{p}_n^{aa} \cdot \overline{p}_{n+1}^{aa} \cdot \overline{p}_{n+2}^{aa} \cdot \ldots \overline{p}_x^{aa} \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3) zieht man weiter:

$$\overline{l}_x^{aa} = z_n \cdot e^{-\int_n^x \overline{\mu}_x^{aa} \cdot dx} \cdot e^{-\int_n^x \nu_x \cdot dx}$$

$$= z_n \cdot \frac{z_x^{(\mu)}}{z_n} \cdot \frac{z_x^{(\nu)}}{z_n} \text{ [1]}$$

oder:

$$\overline{l}_x^{aa} = \frac{1}{z_n} \cdot {}^{(\mu)\prime}\overline{l}_x^{aa} \cdot {}^{(\nu)\prime}\overline{l}_x^{aa} = \frac{z_x^{(\mu)} \cdot z_x^{(\nu)}}{z_n} \tag{5}$$

Mit Hülfe der in Kapitel I, § 5 eingeführten Ausscheideordnungen (2) und (3) lässt sich demnach, gemäss dieser Gleichung, die Absterbeordnung der Aktiven in sehr einfacher Weise angeben. Da wir jene „partiellen" Reihen (2) und (3) als bekannt ansehen, ist zugleich mit ${}^{(\mu)\prime}\overline{l}_x^{aa}$ und ${}^{(\nu)\prime}\overline{l}_x^{aa}$ auch $\overline{l}_x^{aa}$ für das Folgende als berechenbar zu betrachten.

Nach Division der beiden Seiten der Gleichung (5) durch z_n ergibt sich, wenn zur Abkürzung noch $x - n = k$ gesetzt wird,

$${}_k^{\prime}\overline{p}_x^{aa} = {}_k^{(\mu)\prime}\overline{p}_x^{aa} \cdot {}_k^{(\nu)\prime}\overline{p}_x^{aa} \tag{5'}$$

eine Formel, die beweist, dass der in der Gleichung (4) schon ausgedrückte *Karupsche* Fundamentalsatz nicht nur für einjährige, sondern für mehrjährige Wahrscheinlichkeiten gilt und so ausgedrückt werden kann: *Die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses, dass eine aktive Person im Laufe eines beliebig langen Zeitraumes weder stirbt, noch invalid wird, ist gleich dem Produkt aus den partiellen Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse.*

§ **28.** Da jetzt $z = \overline{l}_x^{aa}$ eine bekannte Funktion von x ist, wird man sie in die Differentialgleichung (2') des vorigen Paragraphen substituieren und erhalten:

$$\zeta' = \frac{1}{z_n} \cdot z_x^{(\mu)} \cdot z_x^{(\nu)} \cdot F(x) - \zeta \cdot \varphi(x)$$

[1] Vergl. § 13, Gleichung (21) und § 9, Gleichung (14).

Setzt man zur Abkürzung:

$$Q(x) = \frac{1}{z_n} \cdot z_x^{(\mu)} \cdot z_x^{(\nu)} \cdot F(x) \tag{6}$$

so wird:
$$\frac{d\zeta}{dx} = \zeta \cdot (-\varphi(x)) + Q(x) \tag{7}$$

Eine solche lineare Differentialgleichung integriert man bekanntermassen dadurch, dass man zwei neue Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ einführt und den Ansatz macht:

$$\zeta = u \cdot v \tag{8}$$

Dann verwandelt sich die Gleichung (7), wenn wir der Kürze halber das Argument x überall unterdrücken, in:

$$u' \cdot v + u \cdot v' = -u \cdot v \cdot \varphi + Q, \text{ oder}$$

$$u \cdot (v' + v \cdot \varphi) = Q - v \cdot u' \tag{9}$$

Da wir über eine der Funktionen u oder v beliebig verfügen können, so stellen wir die Bedingungsgleichung $v' + v \cdot \varphi = 0$, woraus:

$$\frac{v'}{v} = -\varphi; \quad \operatorname{Log} v = \int(-\varphi) \cdot dx + \text{const.}, \text{ und}$$

$$v = C_1 \cdot e^{-\int \varphi(x) \cdot dx} = C_1 \cdot e^{h(x)} \tag{10}$$

wobei C_1 die ganz willkürliche Integrationskonstante vorstellt. Dann ist $h(x) = -\int \varphi(x) \cdot dx$ eindeutig bestimmt, weil jetzt das Integral ohne irgendwelche Integrationskonstante zu nehmen ist. Aus der Gleichung (9) wird dann: $0 = Q - v \cdot u'$, oder:

$$u = \int \frac{Q}{v} \cdot dx + C_2 = \frac{1}{C_1} \cdot \int Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx + C_2,$$

wobei C_2 eine neue willkürliche Konstante vorstellt. Durch Einsetzen in die Gleichung (8) erhält man:

$$\zeta = v \cdot u = C_1 \cdot e^{h(x)} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \int Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx + C_2 \cdot C_1 \cdot e^{h(x)}$$

Zugleich mit C_1 und C_2 ist auch das Produkt $C_1 \cdot C_2$ eine ganz willkürliche Konstante, die wir mit C bezeichnen, so dass schliesslich:

$$\begin{aligned} \zeta &= C \cdot e^{h(x)} + e^{h(x)} \cdot \int Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx \\ &= C \cdot e^{h(x)} + e^{h(x)} \cdot g(x) \end{aligned}$$

Die Konstante C wird durch die Bemerkung geliefert, dass für den Anfangszustand: $x = n$ und $\zeta_n = 0$ ist, d. h.:

$$0 = C \cdot e^{h(n)} + e^{h(n)} \cdot g(n)$$

Dies ergibt $C = -g(n)$, so dass:

$$\zeta = e^{h(x)} \cdot \{g(x) - g(n)\}$$

Geht man jetzt auf die Bedeutung von

$$g(x) = \int Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx$$

zurück, so wird:

$$\zeta_x = l_x^{\overline{ii}} = e^{h(x)} \cdot \int_n^x Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx \tag{11}$$

Dabei gelten folgende Abkürzungen:

$$Q = \frac{1}{z_n} \cdot z_x^{(\mu)} \cdot z_x^{(\nu)} \cdot \nu_x \text{ und } h(x) = -\int \mu_x^{\overline{ii}} \cdot dx; \tag{12}$$

dabei ist $h(x)$ eindeutig bestimmt, weil das letztere Integral ohne Integrationskonstante zu nehmen ist.

§ **29.** Wir gehen dazu über, eine Beziehung zwischen $l_x^{\overline{ii}}$ und $l_{x+1}^{\overline{ii}}$ zu ermitteln. Ersetzt man x durch $x+1$ in der Gleichung (11), so ergibt sich:

$$\zeta_{x+1} = e^{h(x+1)} \cdot \int_n^{x+1} Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx$$

und weiter:

$$\frac{\zeta_{x+1}}{e^{h(x+1)}} - \frac{\zeta_x}{e^{h(x)}} = \int_n^{x+1} \ldots - \int_n^x \ldots = \int_x^{x+1} Q \cdot e^{-h(x)} \cdot dx \tag{13}$$

Beachtet man (vergl. §§ 13 und 18), dass

$$e^{h(x)} = e^{-\int \mu_x^{\overline{ii}} \cdot dx} = {}^{(u)\prime}l_x^{\overline{ii}} = \zeta_x^{(\mu)}, \tag{14}$$

so verwandelt sich die Gleichung (13) in:

$$\zeta_{x+1} - \zeta_x \cdot {}^{(u)\prime}p_x^{\overline{ii}} = \zeta_{x+1}^{(\mu)} \cdot \int_x^{x+1} \frac{Q}{\zeta_x^{(\mu)}} \cdot dx \tag{15}$$

Um zur gesuchten Beziehung zwischen $l_x^{\overline{ii}}$ und $l_{x+1}^{\overline{ii}}$ zu gelangen, bleibt das Integral rechter Hand auszuwerten übrig. Geht man auf die Bedeutung von Q zurück (Gleichung (12) des vorigen Paragraphen), so findet man:

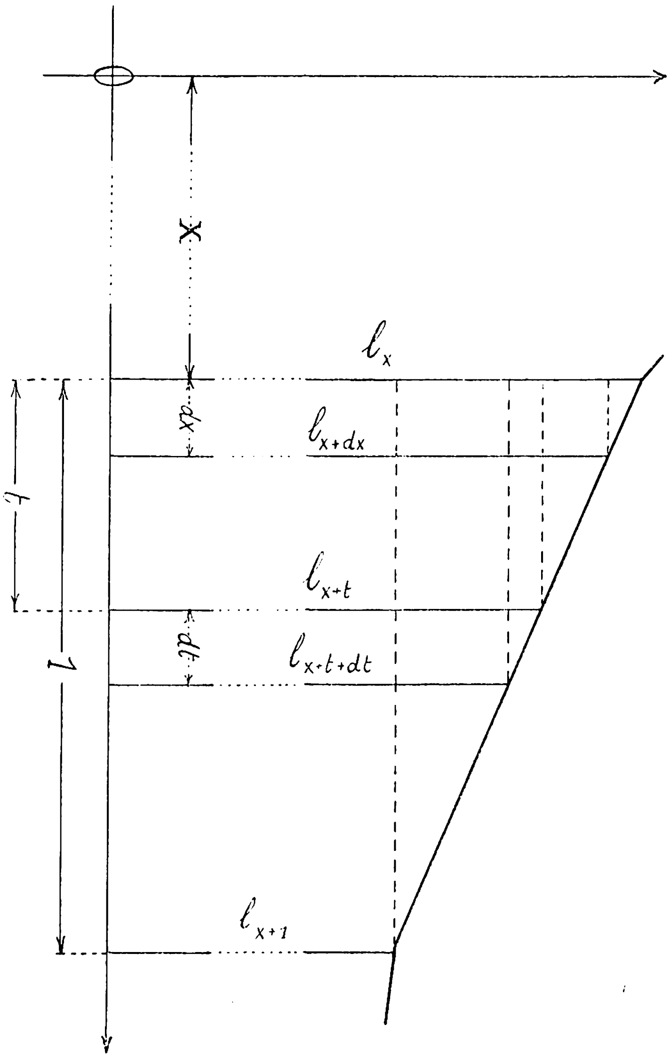
$$\int_x^{x+1} \frac{Q \cdot dx}{\zeta_x^{(\mu)}} = \frac{1}{z_n} \cdot \int_x^{x+1} \frac{z_u^{(\mu)} \cdot z_u^{(\nu)} \cdot \nu_u}{\zeta_u^{(\mu)}} \cdot du$$

und nach Einführung einer neuen Veränderlichen t durch die Substitution $t = u - x$,

$$\int_x^{x+1} \frac{Q \cdot dx}{\zeta_x^{(\mu)}} = \frac{1}{z_n} \cdot \int_0^1 \frac{z_{x+t}^{(\mu)} \cdot z_{x+t}^{(\nu)} \cdot \nu_{x+t}}{\zeta_{x+t}^{(\mu)}} \cdot dt \tag{16}$$

§ **30.** Um aus den Gleichungen (15) und (16) einfachere Formeln abzuleiten, ist es dienlich, über den Verlauf von Sterblichkeit und Invalidisierung bestimmte Annahmen zu treffen. Die am häufigsten gemachte Voraussetzung ist die Hypothese von *A. de Moivre:* Die Sterbefälle verteilen sich gleichmässig über ein Jahr.

Bei dieser Annahme reduziert sich die Kurve der Überlebenden, für die betrachtete Zeitstrecke von x bis $x+1$, auf eine Gerade (siehe Figur). Wir leiten hier



die Formeln, zu denen diese Annahme führt, allgemein ab, indem wir die Anzahl der Mitglieder der ins Auge gefassten Gesamtheit mit l_x bezeichnen. Durch nachträgliches Anfügen der oberen Indices erhält man die entsprechenden Beziehungen für $z_x^{(\mu)}$, $\zeta_x^{(\mu)}$, u. s. w. Aus der Figur liest man die Proportion ab:

$$\frac{l_x - l_{x+1}}{1} = \frac{l_{x+t} - l_{x+1}}{1 - t},$$

und hieraus zieht man durch leichte Rechnung:

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1}) \tag{17}$$

Aus der Definitionsgleichung der Sterbensintensität [§ 11, Gleichung (17′), und § 15, Gleichung (23)] folgt:

$$-\mu_x \cdot l_x = \frac{dl_x}{dx} = \frac{l_{x+dx} - l_x}{dx}$$

$$= \frac{l_{x+1} - l_x}{1} = - l_x \cdot \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right) = - l_x \cdot {}'q_x$$

folglich $$\mu_x = {}'q_x\,; \tag{18}$$

ferner:

$$-\mu_{x+t} \cdot l_{x+t} = \frac{d l_{x+t}}{dt} = \frac{l_{x+t+dt} - l_{x+t}}{dt} = \frac{l_{x+1} - l_x}{1}$$

$$= - l_x \cdot {}'q_x\,,$$

folglich, wegen der Gleichung (17),

$$\mu_{x+t} = \frac{l_x \cdot {}'q_x}{l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1})} \tag{19}$$

woraus als Spezialfall die Formel (18) folgt. In den Formeln (17) und (19) wird t als echter Bruch vorausgesetzt: $0 \leqq t \leqq 1$, ferner wird stillschweigend angenommen, es handle sich um einen „partiellen" Vorgang, d. h. es wirke nur *eine* Veränderungsursache auf den betreffenden Bestand ein.

Nimmt man gleichmässige Verteilung der Invalidisierungsfälle über ein Jahr an, oder gleichmässige Verteilung der Reaktivierungsfälle über ein Jahr, so gelangt man zu den entsprechenden Beziehungen (vergl. §§ 10 und 22):

$$\left.\begin{aligned} z^{(v)}_{x+t} &= z^{(v)}_x - t \cdot \left(z^{(v)}_x - z^{(v)}_{x+1}\right) \\ \nu_{x+t} \cdot z^{(v)}_{x+t} &= {}'i_x \cdot z^{(v)}_x \\ \text{speziell } \nu_x &= {}'i_x \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta^{(\varrho)}_{x+t} &= \zeta^{(\varrho)}_x - t \cdot \left(\zeta^{(\varrho)}_x - \zeta^{(\varrho)}_{x+1}\right) \\ \varrho_{x+t} \cdot \zeta^{(\varrho)}_{x+t} &= {}'r_x \cdot \zeta^{(\varrho)}_x \\ \text{speziell } \varrho_x &= {}'r_x \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In diesen Formeln ist t auf das Intervall von 0 bis 1 eingeschränkt:

$$0 \leqq t \leqq 1$$

§ **31.** Setzt man nun gleichmässige Verteilung der Invalidisierungsfälle über ein Jahr voraus, so vereinfacht sich die in § 29 aufgestellte Gleichung (16) wie folgt: Ihre rechte Seite wird zu:

$$\frac{1}{z_n} \cdot {}'i_x \cdot z^{(v)}_x \cdot \int_0^1 \frac{z^{(\mu)}_{x+t}}{\zeta^{(\mu)}_{x+t}} \cdot dt \tag{22}$$

Wir werden jetzt eine zweite vereinfachende Annahme machen und gleichmässige Verteilung der Sterbefälle über ein Jahr voraussetzen, sowohl unter den Invaliden als auch unter den Aktiven. Dann kann man die Formel (17) zweimal anwenden und schreiben:

$$\int_0^1 \frac{z^{(\mu)}_{x+t}}{\zeta^{(\mu)}_{x+t}} \cdot dt = \int_0^1 \frac{z^{(\mu)}_x - t \cdot (z^{(\mu)}_x - z^{(\mu)}_{x+1})}{\zeta^{(\mu)}_x - t \cdot (\zeta^{(\mu)}_x - \zeta^{(\mu)}_{x+1})} \cdot dt$$

Nun gilt bekanntlich die Identität:

$$\frac{a - (a-b) \cdot t}{\alpha - (\alpha - \beta) \cdot t} = \frac{a-b}{\alpha - \beta} + \frac{a \cdot (\alpha - \beta) - \alpha \cdot (a-b)}{(\alpha - \beta) \cdot (\alpha - [\alpha - \beta] \cdot t)} \tag{23}$$

Aus ihr zieht man durch Integration über das Intervall von null bis eins:

$$\int_0^1 \frac{a - (a-b) \cdot t}{\alpha - (\alpha - \beta) \cdot t} \cdot dt$$

$$= \frac{a-b}{\alpha - \beta} - \frac{a \cdot (\alpha - \beta) - \alpha \cdot (a-b)}{(\alpha - \beta)^2} \cdot \operatorname{Log} \frac{\beta}{\alpha} \tag{24}$$

Dabei soll Log immer den natürlichen Logarithmus bedeuten. In unserem Falle ist:

$$\left.\begin{aligned} a &= z^{(\mu)}_x, & b &= z^{(\mu)}_{x+1} \\ \alpha &= \zeta^{(\mu)}_x, & \beta &= \zeta^{(\mu)}_{x+1} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Jetzt gehe man auf die Gleichung (15) in § 29 zurück; unter Berücksichtigung der Abkürzungen (25), der Gleichungen (16), (22) und (24) verwandelt sie sich in:

$$\zeta_{x+1} - \zeta_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p^{\overline{ii}}_x = \frac{\beta}{z_n} \cdot {}'i_x \cdot z^{(v)}_x \cdot \left\{ \frac{a-b}{\alpha - \beta} - \frac{a \cdot (\alpha - \beta) \cdot - \alpha \cdot (a-b)}{(\alpha - \beta)^2} \cdot \operatorname{Log} \frac{\beta}{\alpha} \right\}$$

$$= {}'i_x \cdot \frac{z^{(v)}_x}{z_n} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{a}{1 - \dfrac{\beta}{\alpha}} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \frac{a \cdot \dfrac{b}{a} - \beta}{a \cdot \left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right)} \cdot \operatorname{Log} \frac{\beta}{\alpha} \right\}$$

Den Abkürzungen (25) zufolge ist:

$$\frac{\beta}{\alpha} = {}^{(\mu)\prime}p^{\overline{ii}}_x\,; \quad \text{also } 1 - \frac{\beta}{\alpha} = {}^{(\mu)\prime}q^{\overline{ii}}_x\,;$$

$$\frac{b}{a} = {}^{(\mu)\prime}p^{\overline{aa}}_x\,; \quad \text{also } 1 - \frac{b}{a} = {}^{(\mu)\prime}q^{\overline{aa}}_x\,;$$

ferner: $\dfrac{a \cdot z^{(v)}_x}{z_n} = l^{\overline{aa}}_x$ (Gleichung (5) in § 27).

Beachtet man, dass den gemachten Voraussetzungen zufolge ${}'i_x = \nu_x$, und dass $\zeta_x = l_x^{\overline{ii}}$, so wird schliesslich aus der vorigen Gleichung:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} + \frac{l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}}{{}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}} \cdot T(x), \quad (26)$$

wobei die Abkürzung gilt:

$$T(x) = {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}} - \frac{{}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}} - {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}}{{}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}} \cdot \operatorname{Log}\left({}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}\right) \quad (27)$$

Die Formeln (26) und (27) stellen unter den gemachten Annahmen (gleichmässige Verteilung der Invalidisierungs- und der Sterbefälle über ein Jahr) die Relation zwischen $l_{x+1}^{\overline{ii}}$ und $l_x^{\overline{ii}}$ streng dar.

Näherungsformeln.

§ **32.** Praktisch verwertbarer wird die Formel (26), wenn man den auftretenden natürlichen Logarithmus durch eine ihn approximierende rationale Funktion ersetzt. Benutzt man zunächst die bekannte Reihe:

$$\operatorname{Log}\left({}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}\right) = \operatorname{Log}\left(1 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right)$$

$$= - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} - \frac{1}{2} \cdot \left[{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right]^2 - \frac{1}{3} \cdot \left[{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right]^3 - \ldots \quad (28)$$

so kann man, wenigstens für die Alter zwischen 20 und 40 Jahren, $\left[{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right]^2$, das nur einige Millionstel beträgt, um so mehr die höheren Potenzen, gegenüber ${}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}$ vernachlässigen und erhält als erste, etwas rohe Annäherung:

$$\operatorname{Log}\left({}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}\right) \backsim \left(-{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right),$$

so dass sich die Formel (26), weil ${}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}} + {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}} = 1$, auf die folgende reduziert:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \quad (29)$$

Die entsprechende Ausscheideordnung der Invaliden gestaltet sich dann folgendermassen:

$$l_n^{\overline{ii}} = 0$$

$$l_{n+1}^{\overline{ii}} = l_n^{\overline{aa}} \cdot \nu_n \cdot {}^{(\mu)\prime}p_n^{ii}$$

$$l_{n+2}^{\overline{ii}} = l_n^{\overline{aa}} \cdot \nu_n \cdot {}^{(\mu)\prime}p_n^{ii} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_{n+1}^{ii} + l_{n+1}^{\overline{aa}} \cdot \nu_{n+1} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_{n+1}^{\overline{ii}}$$

. . . .

. . . .

Sie liefert jedoch im allgemeinen zu ungenaue Werte und ist daher nicht zu empfehlen.

Als zweite Annäherung kann, bei Verwendung der Reihenentwicklung (28), gesetzt werden:

$$\operatorname{Log}\left({}^{(\mu)\prime}p_x^{ii}\right) = - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} - \frac{1}{2} \cdot \left[{}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}\right]^2$$

Dann wird aus der Gleichung (27) des vorigen Paragraphen nach einigen Reduktionen:

$$T(x) = {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \left({}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}} - {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}\right)\right\} \quad (29')$$

und aus der Gleichung (26):

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}$$

$$+ l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{ii} \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \left({}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}} - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right)\right\} \quad (30)$$

Die entsprechende Absterbeordnung der Invaliden gestaltet sich etwas weniger einfach, weil zur Formel (29) noch als Korrektionsglied hinzukommt:

$$+ \frac{1}{2} \cdot l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot \left[{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}}\right] \quad (30')$$

Beachtet man die Identität $\alpha = \dfrac{1 + \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}{1 - \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}}$, wo α an Stelle von ${}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}$ steht, und die Beziehung:

$${}^{(\mu)\prime}p_x^{ii} + {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} = 1,$$

so kann man die obige Entwicklung (28) durch die folgende rascher konvergente Reihe (31) ersetzen:

$$\operatorname{Log}\left({}^{(\mu)\prime}p_x^{ii}\right) = -2 \cdot \left\{\frac{{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}}{2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{{}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}}{2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}}\right)^3\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{{}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}}{2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}}\right)^5 + \ldots\ldots\right\} \quad (31)$$

Berücksichtigt man nur das erste Glied dieser Reihe, so wird aus obiger Gleichung (27), nach einigen leichten Vereinfachungen:

$$T(x) = \frac{2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}}}{2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}$$

$$= \frac{1 + {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}}}{1 + {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}} \cdot {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} \quad (31')$$

Die gesuchte, in der Gleichung (26) des vorigen Paragraphen dargestellte Beziehung zwischen $l_x^{\overline{ii}}$ und l_{x+1}^{ii} verwandelt sich dann in:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot \frac{1 + {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{aa}}}{1 + {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}} \qquad (32)$$

Diese Beziehung liefert eine Absterbeordnung der Invaliden, die sich enger der Wirklichkeit anschliesst, als die oben aus der Formel (29) abgeleitete. Wollte man die Genauigkeit noch verschärfen und in der Reihe (31) auch das zweite Glied mitnehmen, so wäre als Korrektionsglied zur Formel (32) hinzuzufügen:

$$+\frac{2}{3} \cdot l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot \left({}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right)^2 \cdot \frac{{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}} - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{aa}}}{\left(2 - {}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}\right)^3}$$

Es ist jedoch ganz nutzlos, die Genauigkeit auf diese Weise weiter zu treiben, denn zur Verschärfung der Genauigkeit müsste man eher danach trachten, die Annahme, dass sich die Sterbefälle gleichmässig über ein Jahr verteilen, durch eine solche zu ersetzen, die der Wirklichkeit besser entspricht.

Aus der Gleichung (26) in § 31 folgert man:

$$\frac{l_{x+1}^{\overline{ii}}}{l_x^{\overline{ii}}} = {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} + \frac{l_x^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{ii}}} \cdot {}'i_x \cdot \frac{{}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}}}{{}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}} \cdot T(x) \qquad (33)$$

wobei die Bedeutung von $T(x)$ aus der Gleichung (27) zu entnehmen ist. Je nach der erstrebten Genauigkeit kann man $T(x)$ durch ${}^{(\mu)\prime}q_x^{\overline{ii}}$, oder durch (29'), oder durch (31'), ersetzen. (Über die Bedeutung der linken Seite der Gleichung (33) vergl. § 53.)

§ **33.** Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Relationen und Ausscheideordnungen setzen voraus, dass sich die Sterbefälle, sowohl bei Aktiven als bei Invaliden, ferner auch die Invalidisierungsfälle, gleichmässig über das Jahr verteilen. Untersuchen wir noch die Konsequenzen der andern Annahme, dass die Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$ und ν_x *während eines Jahres konstant* bleiben. In diesem Falle wird, für Aktive wie für Invalide:

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{l_{x+t}} \cdot \frac{d l_{x+t}}{dt} = \text{konst.} = \mu_x$$

$$\text{Log}\,(l_{x+t}) = -\int \mu_x \cdot dt = -\mu_x \cdot t + C$$

Da für $t = 0$ die Anzahl $l_{x+t} = l_x$ sein muss, folgt:

$$l_{x+t} = l_x \cdot e^{-\mu_x \cdot t} \qquad (34)$$

In diesem Fall sind demnach, für das betreffende Zeitintervall $0 \leq t \leq 1$, $\zeta_x^{(\mu)}$, $z_x^{(\mu)}$, $z_x^{(\nu)}$ durch Exponentialkurven darstellbar. Aus dem Ausdruck (16) in § 29 wird unter diesen Voraussetzungen:

$$\frac{1}{z_n} \cdot \nu_x \cdot \int_0^1 \frac{z_x^{(\mu)} \cdot e^{-\mu_x^{\overline{aa}} \cdot t} \cdot z_x^{(\nu)} \cdot e^{-\nu_x \cdot t}}{\zeta_x^{(\mu)} \cdot e^{-\mu_x^{\overline{ii}} \cdot t}} \cdot dt$$

Unter Berücksichtigung von § 27, Gleichung (5), verwandelt sich derselbe Ausdruck weiter in:

$$\frac{l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x}{\zeta_x^{(\mu)}} \cdot \int_0^1 e^{(-\mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x + \mu_x^{\overline{ii}}) \cdot t} \cdot dt$$

$$= \frac{l_x^{\overline{aa}}}{\zeta_x^{(\mu)}} \cdot \frac{\nu_x}{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x} \cdot \left(e^{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x} - 1\right)$$

Aus der Gleichung (15) in § 29 wird demnach:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \left\{ l_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot \frac{e^{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x} - 1}{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x} \right\} \qquad (35)$$

Diese Gleichung (35) liefert in aller Strenge die bei Annahme konstanter Intensitätsfunktionen sich ergebende Beziehung zwischen $l_x^{\overline{ii}}$ und $l_{x+1}^{\overline{ii}}$. Beachtet man nun die bekannte Reihenentwicklung:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \qquad (36)$$

$$\text{so wird } \frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + \ldots \qquad (36')$$

Für unsern Fall ist $(\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x)$ an Stelle von x zu substituieren. Setzt man als erste Annäherung $\frac{e^x - 1}{x} \sim 1$, so reduziert sich die obige Formel (35) auf die schon in § 32 Gleichung (29) angegebene, unter ganz andern Voraussetzungen abgeleitete und nur als rohe Annäherung brauchbare Relation:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \qquad (29)$$

Nimmt man in der Reihenentwicklung (36) ein Glied mehr hinzu, so findet man das genauere Resultat:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot \left\{ l_x^{\overline{ii}} + l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot \left(1 + \frac{\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x}{2}\right)\right\} \qquad (37)$$

Es kommt also zur Formel (29) folgendes Korrektionsglied hinzu:

$$+\frac{1}{2} \cdot l_x^{\overline{aa}} \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot \nu_x \cdot (\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x) \qquad (38)$$

[Vergl. hiermit den Ausdruck (30') in § 32]. Eine noch weiter getriebene Genauigkeit würde als ferneres Korrektionsglied liefern:

$$+\frac{1}{6} \cdot l_x^{\overline{aa}} \cdot \nu_x \cdot {}^{(\mu)\prime}p_x^{\overline{ii}} \cdot (\mu_x^{\overline{ii}} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x)^2 \qquad (38')$$

Alle höheren Glieder dürften wohl immer vernachlässigt werden, ohne die Genauigkeit innerhalb der durch die praktischen Beobachtungen gesteckten Fehlergrenzen zu beeinträchtigen.

§ **34.** Einen noch besseren Anschluss an die Wirklichkeit wird man nicht durch Hinzunahme weiterer Glieder erstreben, sondern vielmehr durch eine bessere Hypothese über den Verlauf von Sterblichkeit und Invalidisierung. Unter den letzteren Kombinationsmöglichkeiten sei noch speziell erwähnt: gleichmässige Verteilung der Invalidisierungsfälle über ein Jahr, aber konstante Sterblichkeitsintensität während des gleichen Zeitintervalles. Der Ausdruck (22) in § 31 verwandelt sich bei diesen Annahmen, unter Berücksichtigung der Gleichung (34) des vorigen Paragraphen, in:

$$\frac{1}{z_n} \cdot {}'i_x \cdot z_x^{(v)} \cdot \int_0^1 \frac{z_x^{(u)} \cdot e^{-\overline{\mu_x^{aa}} \cdot t}}{\zeta_x^{(u)} \cdot e^{-\overline{\mu_x^{ii}} \cdot t}} \cdot dt$$

$$= \overline{l_x^{aa}} \cdot \frac{{}'i_x}{\zeta_x^{(u)}} \cdot \int_0^1 e^{(\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}) \cdot t} \cdot dt,$$

wegen der Gleichung (5) in § 27, und weiter:

$$= \overline{l_x^{aa}} \cdot \frac{{}'i_x}{\zeta_x^{(u)}} \cdot \frac{e^{\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}} - 1}{\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}}$$

Die Relation zwischen $\overline{l_x^{ii}}$ und $\overline{l_{x+1}^{ii}}$ wird dann, nach der Gleichung (15) in § 29:

$$\overline{l_{x+1}^{ii}} = \overline{l_x^{ii}} \cdot {}^{(u)}\overline{p_x^{ii}} + \overline{l_x^{aa}} \cdot {}'i_x \cdot {}^{(u)}\overline{p_x^{ii}} \cdot \frac{e^{\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}} - 1}{\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}} \tag{39}$$

Beachtet man die Reihenentwicklung (36′), so gehen aus der Gleichung (39) Näherungsformeln hervor. Die erste ist die schon früher abgeleitete Gleichung (29). Bei Hinzunahme der 2 ersten Glieder von (36′) findet man die genauere Relation:

$$\overline{l_{x+1}^{ii}} = \overline{l_x^{ii}} \cdot {}^{(u)}\overline{p_x^{ii}} + \overline{l_x^{aa}} \cdot {}'i_x \cdot {}^{(u)}\overline{p_x^{ii}} \cdot \left(1 + \frac{\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}}{2}\right) \tag{40}$$

Berücksichtigt man noch die quadratischen Terme in (36′), so tritt zur Formel (40) als Korrektionsglied hinzu:

$$+ \frac{1}{6} \cdot \overline{l_x^{aa}} \cdot {}'i_x \cdot {}^{(u)}\overline{p_x^{ii}} \cdot \left(\overline{\mu_x^{ii}} - \overline{\mu_x^{aa}}\right)^2 \tag{41}$$

§ **35.** Unter den zahlreichen Annahmen, die man über den Verlauf von Sterblichkeit und Invalidisierung machen kann, haben wir nur drei ausführlich besprochen und die entsprechenden Ausscheideordnungen theoretisch abgeleitet. Es leuchtet aber ein, dass man, um den wirklichen Verlauf besser zu approximieren, eine grosse Anzahl anderer Hypothesen aufstellen kann; immer werden sich aus den in § 29 bewiesenen Formeln (15) und (16) entweder streng gültige Relationen, oder Näherungsformeln von beliebiger Genauigkeit, herleiten lassen. *Die Gleichungen (15) und (16) in § 29 sind eine richtige Fundgrube von Relationen zwischen den Anzahlen der Invaliden bei Ausschluss der Reaktivierung.*

Prinzipiell lassen sich die verschiedenen Hypothesen in folgende drei Kategorien gruppieren:

1. Zwischen x und $x + 1$ verläuft die Kurve der Überlebenden *geradlinig.* Dies entspricht der Hypothese der gleichmässigen Verteilung der Sterbefälle, beziehungsweise Invaliditätsfälle, über ein Jahr und ist die nächstliegende und auch am häufigsten benutzte Annäherung an die Wirklichkeit (v. § 30).
2. Zwischen x und $x + 1$ verläuft die Kurve der Überlebenden so, dass sie der x-Axe (Zeitaxe) stets die *konvexe* Seite zukehrt. Sie kann dann z. B. (wie in § 33 ausgeführt ist) durch eine Exponentialkurve dargestellt werden, die bei wachsendem x natürlich immer fallen muss. Im allgemeinen wird diese Hypothese für die Alter unter 15 und für diejenigen über 65 Jahren die beste Annäherung an die Wirklichkeit ermöglichen.
3. Zwischen x und $x + 1$ verläuft die Kurve der Überlebenden so, dass sie der x-Axe (Zeitaxe) stets die *konkave* Seite zukehrt. Diese dritte Hypothese wird im allgemeinen für die zwischen 20 und 60 Jahren liegenden Alter den engsten Anschluss an die Wirklichkeit, d. h. an die Sterbetafel, ermöglichen.

Durch Berechnung von $l_{x+\frac{1}{2}}$ (oder eines andern Wertes von l_{x+t} für $0 < t < 1$) und Vergleich mit $l_x - \frac{1}{2} \cdot d_x$ wird man entscheiden, welche der drei Kategorien von Hypothesen im gegebenen Falle am dienlichsten ist.

Die Kombination dieser Möglichkeiten miteinander liefert, in Anknüpfung an die Gleichungen (15) und (16) in § 29, im ganzen 27 Formeln und ebenso viele voneinander verschiedene Absterbeordnungen der $\overline{l_x^{ii}}$. Wir behalten uns vor, bei anderer Gelegenheit hierauf zurückzukommen. (Siehe den Schluss der historischen Notiz in § 36.)

§ **36.** *Historisches.* Durch die vorangehende mathematisch einwandfreie Fundierung der Aufgabe ist nicht nur die Zulässigkeit und Existenzberechtigung, sondern die theoretisch unumgängliche Notwendigkeit des Begriffes der partiellen Wahrscheinlichkeiten dargetan. Als Folge dieses Begriffes, gewissermassen als sekundäres Produkt seiner Bildung, ergibt sich der Umstand, dass der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit auch auf statistische Fragen angewandt werden darf, in derselben Form, wie er für Einzelereignisse, die voneinander unabhängig sind, Geltung hat. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses, dass eine einer gegebenen Gruppe angehörende, x-jährige, aktive, unverheiratete Person im Laufe eines beliebig langen Zeitraumes weder stirbt, noch von Invalidität betroffen wird, noch heiratet, gleich dem Produkt aus den partiellen Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse. Dieser Satz wäre ganz unrichtig, wenn an Stelle der partiellen Wahrscheinlichkeiten die „nicht partiellen“, also die gewöhnlichen, gesetzt würden.

Als Herr Professor *J. Karup* zum erstenmal den neuen Begriff aufstellte, in seinem oben (§ 4) zitierten Gutachten von 1875, erschien die Sache in einem andern Lichte. Die Eigenschaft, dass der Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit auch bei statistischen Fragen seine Gültigkeit beibehalte, wenn man den neuen Begriff der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeit an Stelle des vorher allein angewandten Begriffes der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeit einführte, diese Eigenschaft schien das Primäre zu sein, das ursprünglich gesteckte Ziel. Man bekam also den Eindruck, dass jene Eigenschaft der Erhaltung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit Zweck und Hauptgrund der Bildung des neuen Begriffes gewesen, dass man aber auch ohne jenen neuen Begriff alle theoretischen Untersuchungen durchführen könnte, dass demnach der Begriff lediglich eine Folge der *a priori* gewollten Eigenschaft sei. Es leuchtete durchaus nicht unmittelbar ein, dass der neue Begriff logisch *notwendig* sei. Zwar hob *J. Karup* gleich zu Anfang hervor, dass durch die Einführung dieses neuen Begriffes auch eine reinliche Scheidung der verschiedenen gleichzeitig stattfindenden Einflüsse erreicht werde, dass man durch eben diese Fassung des Begriffes die reine und alleinige Wirkung der betreffenden Ursache erhalte. Diese Seite wurde aber von *Karups* Gegnern kaum beachtet; ihre Argumentation schien vielmehr auf folgendes hinauszulaufen: Da konstruiere jemand einen neuen Begriff zu dem ausgesprochenen Zwecke, ein gewisses technisches Verfahren auf Probleme der Statistik anwenden zu können; jener neue Begriff sei deshalb *a priori* ein willkürlicher und künstlich gebildeter, obendrein auch noch theoretisch unbegründet und daher unzulässig; ferner würde sich, falls man von diesem neuen Begriffe Gebrauch machen wollte, das ganze Rechengeschäft bedeutend umständlicher gestalten.

In seinen ersten Aufsätzen und Erklärungen, in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“ veröffentlicht, weist *J. Karup* diese Einwendungen zurück. (Siehe *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“ Bd. 26 [1876], p. 21—29, den Artikel: „Zur mathematischen Statistik“, dessen Verfasser, ohne sich hier zu nennen, das Gothaer „Gutachten“ gegen *J. Diengers* Angriffe verteidigt; ebenda p. 80—82; ebenda p. 141—145; eine ausführliche Begründung brachte dann die Abhandlung: „Die neue Theorie der Invaliditäts- und Aktivitätsberechnung“, von *J. Karup*, Verfasser des Artikels „Zur mathematischen Statistik“, ebenda p. 437—451; ihr Schluss folgte in derselben Zeitschrift, Bd. 27 [1877], p. 17—26; im folgenden Jahr erschien der Aufsatz: „Nochmals die neue Theorie der Invaliditäts- und Aktivitätsberechnung“, aus *J. Karups* Feder, gleiche Zeitschrift Bd. 28 [1878], p. 219—238; ebenda, p. 275, *Karups* Schlusswort.)

Im Mittelpunkte des Streites erscheint zunächst immer wieder die Eigenschaft der Erhaltung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit; man bekommt da den Eindruck, es sei der neue Begriff hauptsächlich jener Eigenschaft zuliebe aufgestellt worden. Erst in seiner „Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät am 31. Dezember 1890“, einer klassischen Arbeit, erschienen in Dresden (1893), nimmt *J. Karup* den Begriff der Intensitätsfunktion zum Ausgangspunkte. Dann kommt man aber ganz von selbst, mit logischer Notwendigkeit, auf partielle Wahrscheinlichkeiten. Der neue Begriff erscheint dann, wie weiter oben ausgeführt wurde, gar nicht mehr willkürlich, sondern drängt sich auf; die Eigenschaft der Erhaltung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann nebenbei, als Folge des neuen Begriffes und nicht mehr umgekehrt.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Probleme der mathematischen Statistik ist eines der interessantesten Kapitel in der Geschichte der Lebensversicherung. Solange man ausschliesslich die Sterblichkeit beachtete und untersuchte, ohne auf andere Faktoren Rücksicht zu nehmen, konnte es nur eine Auffassung geben für Sterbenswahrscheinlichkeit, Sterbensintensität und andere in dieses Gebiet einschlagende Begriffe. Diese Übereinstimmung der Ansichten hörte aber auf, sobald man, bei der mathematischen Behandlung einer bestimmten Personengruppe, neben und ausser der Sterblichkeit auch den Einfluss der Invalidität, und später noch weiterer Veränderungsursachen, in den Kreis der Erörterungen einbezog. In dieser Streitfrage kann man heute die auseinandergehenden Meinungen in zwei grosse Lager gruppieren, die sich grundsätzlich gegenüberstehen. Der Hauptunterschied bezieht sich auf die Fassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Die einen verfechten die Theorie der „abhängigen“ oder gewöhnlichen Wahrscheinlichkeiten, die andern die Theorie der „unabhängigen“ oder partiellen Wahrscheinlichkeiten. Historisch kam diese Entwicklung der Theorie folgendermassen zustande:

Praktische Gründe zwangen dazu, beim Studium der Veränderungen, die eine gegebene Gruppe von Versicherten erleidet, neben der Sterblichkeit vor allem auch noch die Invalidität zu berücksichtigen. *Die ersten* mathematischen Untersuchungen über Invalidität finden sich in den Arbeiten von:

1. *K. Heym:* „Die Kranken- und Invalidenversicherung“, Leipzig, 1863. Ferner vom gleichen Autor in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 5, und in der „Deutschen Versicherungszeitung“, 1875, Nr. 89.
2. *M. Kanner:* „Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik“, veröffentlicht im „Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft“, Bd. 2, p. 33—53, Berlin, 1871; ferner vom gleichen Autor ein Artikel in der „Deutschen Versicherungszeitung“ von 1870, Nr. 15.
3. *A. Wiegand:* „Versicherung gegen Erwerbsunfähigkeit“, 1865, (in Kommission bei *Hermann Berner* in Halle); „Mathematische Grundlage der Eisenbahnpensionskassen“, Halle a. S., 1859; „Statistisches über die Sterblichkeits- und Invaliditätsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten . . .“, in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 15 (1865), p. 217—222.
4. *Th. Wittstein:* „Die Mortalität in Gesellschaften mit sukzessiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern“, erschienen im „Archiv der Mathematik und Physik“, herausgegeben von *J. A. Grunert,* Bd. 39 (1862), p. 67—92.
5. *G. Zeuner:* „Abhandlungen aus der mathematischen Statistik“, Leipzig, 1869.

Die Arbeiten dieser Autoren waren bereits veröffentlicht, als 1875 das oben schon mehrfach erwähnte nicht publizierte „Gutachten“ der Gothaer Lebensversicherungsbank über die Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse der deutschen Reichsbeamten bekannt wurde. Sein Verfasser, Herr *Johannes Karup*[1]), schlägt darin vor, in denjenigen Fällen, in welchen *mehrere* Veränderungsursachen gleichzeitig einwirken, den Begriff der Wahrscheinlichkeit anders zu fassen als bis anhin, nämlich so, dass diese neue Wahrscheinlichkeit jeweilen den Einfluss einer einzigen Veränderungsursache darstelle, wie wenn die störenden Einwirkungen der andern während des in Frage stehenden Zeitraumes nicht stattfänden, z. B. den Begriff der einjährigen Invaliditätswahrscheinlichkeit so, als ob die Sterblichkeit der Aktiven für das betreffende Jahr nicht vorhanden sei. Herr *J. Karup* nannte diese derart modifizierten Wahrscheinlichkeitswerte „unabhängig“, um schon im Namen deren charakteristische Eigenschaft auszudrücken, dass nämlich (um ein bestimmtes Beispiel zu nehmen) die neue einjährige Invaliditätswahrscheinlichkeit bei einer gegebenen Gruppe x-jähriger Personen unabhängig von allen andern Einflüssen sei und daher denselben Wert beibehalte, was auch immer für Veränderungsursachen die Mitgliederanzahl der betreffenden Gruppe beeinflussen.

Wie bereits gesagt (v. § 4), erregte die auf diese neuen Wahrscheinlichkeiten gegründete Theorie einen lebhaften Streit, durch welchen diejenigen Resultate des „Gutachtens“, um die es sich hier handelt, bekannt geworden sind[2]). *Karups* Gegner führten eine heftige Polemik, teilweise mit unbegreiflicher Leidenschaftlichkeit, grösstenteils in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“. Es sind:

1. *G. Behm:* „Kritische Bemerkungen über die neue Theorie der Invaliditäts- und Aktivitätsberechnung“, erschienen in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 28 (1878), p. 151—167; ferner eingehend in seinem Werke „Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen“, Berlin, 1876, p. 25 u. f.; p. 47—60.
2. *J. Dienger,* in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 25 (1875), p. 455—459: „Kritische Bemerkungen“ von Dr. *J. Dienger* in Karlsruhe. Sie bedeuten den Anfang der nun folgenden zweijährigen, teilweise erbitterten Polemik. Man liest darin auf S. 456: „. . . . in einer Abhandlung, die mir zufällig zuhanden gekommen ist. Das Reichskanzleramt hat sich nämlich

[1]) Herr Professor Dr. *J. Karup* hat mir in persönlichen Mitteilungen bestätigt, dass jenes Gutachten von ihm verfasst und unterzeichnet worden ist. *L. G. D.*

[2]) Aus einer gelegentlichen Bemerkung *Karups* in seinem Artikel „Zur mathematischen Statistik“ (*Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, 1876) geht hervor, dass besagtes Gutachten der Öffentlichkeit damals nicht vorgelegen hat. Nach späteren persönlichen Mitteilungen *Karups* ist es überhaupt niemals publiziert worden und dürfte heute wohl schwerlich aufzufinden sein.

Nach einer Note von Herrn *G. Eneström* („Encyclop. des sciences math. pures et appliq.“, tome I, volume 4 (1911), p. 486, Fussnote 68), ist dieses Dokument gegenwärtig unauffindbar. („. . . . rédigé par *J. Karup* en 1875, mais non publié et actuellement introuvable . . . .“)

an die Direktion der Lebensversicherungsbank in Gotha gewandt, um dort nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung feststellen zu lassen, wie hoch sich der Aufwand für Witwen- und Waisenpensionen der Reichsbeamten etwa belaufen werde, wenn der Beharrungszustand eingetreten sei, ... Das eingegangene Schriftstück ist nun als Nr. 95 „an den Bundesrath“ vollständig abgedruckt. Ich weiss nicht, ob dasselbe überhaupt der Öffentlichkeit übergeben ist[2]). Jedenfalls liegt aber kein Grund vor, dessen Besprechung zu vermeiden. Das „Gutachten“ besteht aus zwei Teilen: statistische Grundlagen und mathematische Analyse ... Dieser zweite Teil ist mit einem grossen Aufwand von mathematischen Formeln und Zeichen durchgeführt und hat so das bestrickende Aussehen grosser Gelehrsamkeit, bekanntlich für Laien ein imponierendes Ding. Was aber die Grundlage, d. h. eben die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, betrifft, so ist darüber leider nichts Gutes zu sagen ... “ Wie die zu einer sachlichen Besprechung der Frage ganz überflüssigen Bemerkungen beweisen, hat *J. Dienger,* leider, gleich von Anfang an einen gereizten und spöttischen Ton in die Debatte hineingetragen, der auch von den andern Gegnern *Karups* angeschlagen und bis zu persönlichen Unliebenswürdigkeiten (um einen milden Ausdruck zu gebrauchen), gesteigert wurde. — V. in der gleichen Zeitschrift: Bd. 26 (1876), p. 46—48; ebenda p. 109—111: „Schlusswort in dem Gutachtenstreite,“ von Dr. *J. Dienger,* das doch kein Schlusswort war, denn es folgten noch: eine „Erklärung“, gleiche Zeitschrift Bd. 28 (1878), p. 195, und eine „Richtigstellung“, ebenda, p. 258—260.

3. Ein anonymer „Lebensversicherungstechniker“ in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, 1877, p. 48—50, im Aufsatz „Kurze Bemerkungen“.
4. *K. Heym,* in der „Deutschen Versicherungszeitung“, 1876, Nr. 3 und 61.
5. *H. Zimmermann:* „Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse“, Berlin, 1886, Heft 1, p. 7 u. f.; „Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik“, Berlin, 1887, Heft 2, p. 44—53.

Auf *Karups* Seite stellten sich:

1. *W. Küttner:* „Zur mathematischen Statistik“, erschienen in *Schlömilchs* „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, Bd. 25 (1880), p. 11—24; Bd. 31 (1886), p. 246—251 [vergleiche Bd. 32 (1887), p. 62; ebenda p. 234 u. f.]. Ferner derselbe Autor in der „Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen“, 1881, p. 159; gleiche Zeitschrift Bd. 36, p. 1—62, in der Abhandlung: „Neuere Untersuchungen über die Invalidität der Steinkohlenbergleute Preussens“ wird auf S. 44 von *Küttner* der Name *Karups* und dessen Verfahren der „Umformung der Grundwerte“ erwähnt.
2. *W. Lazarus,* in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, Bd. 26 (1876), p. 209—219, „Ein Beitrag zu den Vorarbeiten für die Invalidenversicherung“, speziell p. 218.
3. *T. B. Sprague,* in „Journal of the Institute of Actuaries and Assurance Magazine“, Bd. 21, (1879), p. 406—446: „On the Construction of a Combined Marriage and Mortality Table ....“ erwähnt gelegentlich (auf S. 419) und übrigens ohne *Karups* Namen zu nennen den prinzipiellen Fehler, in den *Heym* und *Wiegand* durch falsche Anwendung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit verfallen sind. Veranlassung hierzu gab ihm eine im gleichen Band p. 288—295 abgedruckte Arbeit von *David J. A. Samot:* „New Formulas for the Calculation of the Probabilities which occur in the Question of Invalidity ...“, für dessen Formeln *Sprague* einen andern, kürzeren Beweis und zugleich eine Vervollständigung gibt.

Doch lieferten diese Autoren damals zur Streitfrage nichts *wesentlich* Neues, das nicht schon *Karup* selbst in seinen oben zitierten Aufsätzen beigebracht hätte.

Bei näherem Zusehen erweisen sich sämtliche Einwendungen der Gegner der *Karupschen* Theorie entweder als irrtümlich oder als nicht stichhaltig, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Zunächst Dr. *J. Dienger.* Nach seinen eigenen Äusserungen kann er sich eine vom Einflusse der Invalidität befreite Sterblichkeit nicht vorstellen. Nach seiner Ansicht wäre es auch unmöglich, für die *Karupsche* „unabhängige“ Invaliditätswahrscheinlichkeit einen Wert aus der Beobachtung direkt abzuleiten. *Dienger* stellt die merkwürdige, später auch von andern mehrmals wiederholte Behauptung auf, jener neue Begriff involviere „ein Invalidwerden nach dem Tode“. Überhaupt stellt *Dienger* öfters Behauptungen auf, für die er den Beweis schuldig bleibt. So unglaublich dies auch scheinen mag, war sein Gedankengang vermutlich folgender: Zur Definition der „unabhängigen“ Invaliditätswahrscheinlichkeit muss man annehmen, die Sterblichkeit der Aktiven sei nicht vorhanden; nun sind aber die Aktiven tatsächlich der Sterblichkeit unterworfen; folglich müssen, falls jene

Definition einen Sinn haben soll, die Verstorbenen noch invalid werden können! Dass man die alleinige Wirkung der Invaliditätsursachen auf den Bestand einer Personengruppe zahlenmässig erhalten kann, ohne zu dieser Absurdität seine Zuflucht zu nehmen, wurde im ersten Kapitel mehrmals hervorgehoben (v. § 10).

Was zweitens *H. Zimmermann* angeht, so verwirft er die *Karupsche* Theorie ebenso vollständig wie *Dienger,* wenn auch aus andern Gründen. *Zimmermann* hat begriffen, dass man nicht an den Nonsens *Diengers:* an ein Invalidwerden nach dem Tode, zu denken braucht, um die reine und alleinige Wirkung der Invaliditätsursachen zur Darstellung zu bringen; er hat begriffen, dass man z. B. „die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven, im Laufe eines Jahres *als Aktiver* zu sterben“, auf Grund statistischer Beobachtungen recht gut ermitteln könnte, wenn man, bei der ins Auge gefassten Gruppe von aktiven Personen, die invalid Werdenden als „freiwillig Ausscheidende“ betrachtete. *Zimmermann* hat begriffen, dass man das spezielle technische Verfahren, durch welches „der freiwillige Abgang bei Lebzeiten“ berücksichtigt und in die statistischen Berechnungen einbezogen wird, auch auf die von Invalidität Betroffenen anwenden könnte, ja anwenden müsste, um die neue *Karupsche* Wahrscheinlichkeit zahlenmässig darzustellen. Aber, meint *Zimmermann,* es sei gar nicht erlaubt, die Invaliden als „freiwillig Ausscheidende“ zu betrachten, denn das wäre ein Akt der reinsten Willkür. Die Trennung der unter Beobachtung stehenden Gruppe in Aktive und Invalide erfolge ja mit Naturnotwendigkeit auf Grund der bestehenden Verhältnisse oder der gegebenen Ursachen; das technische Verfahren aber, durch welches „der freiwillige Abgang bei Lebzeiten“ in der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt wird, sei nur dann anwendbar, wenn eine Änderung der Verhältnisse in dem persönlichen Belieben und der Willensfreiheit des einzelnen Menschen liege; da dies nun für das Invalidwerden nicht zutreffe, sei der neue *Karupsche* Begriff künstlich gebildet, ganz willkürlich, daher zu verwerfen.

Diese Argumentation *Zimmermanns* ist aus drei Hauptgründen nicht stichhaltig. Zunächst ist „der freiwillige Abgang bei Lebzeiten“ gewöhnlich nicht so freiwillig und willkürlich, wie auf den ersten Blick erscheinen mag. Dieser Abgang der Versicherten ist vielmehr oft eine Folge wirtschaftlicher Notlage oder schlechterer Lebensbedingungen, die durchaus nicht in dem persönlichen Belieben des einzelnen Menschen liegen. — Ferner vollzieht sich die Trennung in eine Gruppe von Aktiven und eine solche von Invaliden nicht immer mit Naturnotwendigkeit, sondern der Begriff der Invalidität ist seiner Natur nach, im Gegensatze zu demjenigen des Sterbens, ein relativer, je nach dem Berufe schwankender; bei Abschätzung der Invalidität spielen menschliche Willkür, Simulierung und Betrug, oft auch bestimmte Termine, eine nicht zu unterschätzende Rolle. *Zimmermann* geht also ganz fehl, wenn er die Entscheidung, ob ein gewisses technisches Verfahren zulässig sei oder nicht, auf die Begriffe „Notwendigkeit“ und „Willkür“ abstellt, deren Grenzen so sehr schwanken.

Endlich muss hervorgehoben werden, dass das Ausscheidungsverfahren ganz unabhängig von den Begriffen „Notwendigkeit“ und „Willkür“ ist. Es braucht ja nur festgestellt zu werden, *dass* bestimmte Personen, die ursprünglich der ins Auge gefassten Gesamtheit angehörten, für die Beobachtung des betreffenden Ereignisses nicht mehr in Betracht kommen. Sobald man also Ausscheidung überhaupt zulässt, ist es für die Anwendung des technischen Verfahrens gleichgültig, welcher Art diese Ausscheidungen sind. Der *Karupsche* Begriff der „unabhängigen“ Wahrscheinlichkeit ist demnach gar nicht künstlicher als der Begriff der „Lebenden unter Risiko“, d. h. „der unter Beobachtung stehenden Personen“, und dieser letztere Begriff wird ja auch bei den gewöhnlichen oder „abhängigen“ Wahrscheinlichkeiten angewandt. — Nebenbei beruft sich *Zimmermann* (in dem ersten Heft seiner Untersuchungen über das Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen, p. 13) auf *M. Kanner,* doch beruht dies auf einem Irrtum *Zimmermanns,* wie sich bei genauem Vergleich der zitierten Stellen ergibt.

Zimmermann wiederholt ferner die von *Behm* aufgestellte Behauptung, die Anwendung des neuen Begriffes würde in der Praxis die Rechenarbeit bedeutend vermehren; er stützt aber diesen Einwand nur auf die diesbezüglichen Untersuchungen von *Behm,* zu deren Erörterung wir jetzt übergehen.

Was drittens *G. Behm* anbetrifft, so ist seine Stellung zur *Karupschen* Theorie durch merkwürdige Inkonsequenz gekennzeichnet. Auf der einen Seite verwirft er die neue Theorie; als „Invaliditätswahrscheinlichkeit“ z. B. will *Behm* nur die alte Auffassung gelten lassen und behält auch nur diese bei; er schreibt in seinen „Kritischen Bemerkungen über die neue Theorie der Invaliditäts- und Aktivitätsberechnung“ (*Masius'* „Rundschau der Versicherungen“, 1878, p. 151—167) folgendes: „Der Begriff einer Invalidität, auf deren Verlauf die Sterblichkeit ohne Einfluss ist, ist und bleibt an sich ein Nonsens, weil er die Vorstellung in sich schliesst, dass auch bereits verstorbene Personen noch invalid werden können“ — eine Ansicht, die oben bereits widerlegt wurde. Auf der andern Seite aber führt *Behm* selbst eine „Aktivensterblichkeit“ ein, die nichts anderes ist als eine „unabhängige Wahrscheinlichkeit" im Sinne *Karups* („Statistik ...", 1876, p. 13): zur empirischen Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven, im Laufe eines Jahres *als Aktiver* zu sterben, betrachtet *Behm* diejenigen Mitglieder der ins Auge gefassten Gruppe, die von Invalidität betroffen werden, als solche, „die vom Moment des Invalidwerdens ab der Beobachtung entzogen werden", d. h. als bei Lebzeiten Abgehende, als freiwillig Ausscheidende. *Behm* übersieht in auffallender Weise seine Inkonsequenz; er übersieht, dass man ihm seine eigenen Worte entgegenhalten und einwenden könnte: „Der Begriff einer Sterblichkeit, auf deren Verlauf die Invalidität ohne Einfluss ist, ist und bleibt an sich ein Nonsens, weil er die Vorstellung in sich schliesst, dass auch bereits invalid gewordene Personen noch *im aktiven Zustande* sterben können." — *Behms* Ideenkreis bietet hiernach eine eigentümliche Erscheinung. Im einen Falle: bei der „unabhängigen" Sterbenswahrscheinlichkeit der Aktiven, hat *Behm* eine ganz richtige begriffliche Vorstellung, er ist sogar der erste, der diese besondere Aktivensterblichkeit zahlenmässig benutzte; im andern Falle: bei der „unabhängigen" Invaliditätswahrscheinlichkeit, hat derselbe Autor eine ganz falsche begriffliche Vorstellung und verwirft die neue Theorie vollständig.

Behm hat auch versucht, einen von *Karup* gegebenen Beweis zu entkräften, in den „Mathematischen Formulierungen" seines Werkes: „Statistik... der deutschen Eisenbahnverwaltungen", p. 54—60. *Behm* fällt aber dabei selbst in die Grube, die er seinem Gegner gräbt. Er stellt sich die Aufgabe, „die Wahrscheinlichkeit zu finden, im Laufe des Jahres invalid zu werden und nach Ablauf des Jahres noch zu leben, nach der neuen Theorie über die Invalidität". Nachdem er dann diese Aufgabe gelöst, schliesst er triumphierend: „Die mathematischen Ausdrücke der betreffenden Wahrscheinlichkeitswerte büssen an Einfachheit ein, wenn die neue Bestimmung des Begriffes der Invaliditätswahrscheinlichkeit zur Anwendung kommt." Sieht man aber *Behms* Beweisführung näher an, so erkennt man, dass er folgendes getan hat, um zu dem eben zitierten Ergebnis zu kommen: *Behm* berechnet einen Ausdruck für die *Karupsche* unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit, die er mit $i,$ bezeichnet; dieser *Behmsche* Ausdruck für $i,$ ist jedoch nur ein *Näherungswert.* Nichtsdestoweniger differenziert *Behm* diesen Approximationsausdruck, um ihn dann, differenziert, in ein bestimmtes Integral einzuführen! Es kommt dabei, natürlich, etwas Kompliziertes, ja sogar etwas Falsches heraus; aber diese „Einbusse an Einfachheit" und dieses falsche Resultat haben ihre Wurzeln nicht in der neuen Theorie *Karups,* sondern in *Behms* unlogischem Gedankengang, der fast Böswilligkeit auf seite des Autors nahelegt.

Ebenso schlimm steht es mit dem schon oben erwähnten anonymen „Lebensversicherungstechniker". Er will einen Beweis, den *J. Karup* in *Masius'* „Rundschau der Versicherungen", 1876, p. 437 u. f., veröffentlicht hatte, anfechten, beweist aber dabei nur, dass er selber *Karups* Gedankengang nicht richtig verstanden hat.

Was endlich *K. Heym* anbetrifft, so hat er die Bedeutung der neuen Wahrscheinlichkeit nicht sogleich erkannt, wie aus seinem in der „Deutschen Versicherungszeitung" von 1876, Nr. 3, veröffentlichten Artikel hervorgeht. Doch gibt er die Möglichkeit einer derartigen Begriffsbestimmung zu, macht aber keine Anwendung davon. Gemeinsam mit *J. Karup* hat *K. Heym* das Bestreben, den Satz von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit auch auf Fragen der Statistik anzuwenden. In seinem Werk über „Die Kranken- und Invalidenversicherung" (§ 36 und im Anhang, p. 65) fordert *Heym* sogar „unabhängige" Wahrscheinlichkeiten; er bleibt aber trotzdem bei den bisanhin gebrauchten „abhängigen" Wahrscheinlichkeiten stehen; indessen ist er sich bewusst, dass er dadurch einen Fehler begeht und sieht daher seine Formeln nur als Näherungen an. — Ferner fasst *Heym* die mathematische Begründung der neuen Theorie unrichtig auf, da er von der empirischen Bestimmung der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeiten aus den Zahlen der Beobachtung keine klare Vorstellung hat; er denkt sogar, diese Ermittlung müsse der Berechnung der Störungen der Planeten analog sein! — Endlich bezweifelt *Heym* noch die praktische Anwendbarkeit der *Karupschen* Wahrscheinlichkeiten und schreibt, die von *Behm* an jener neuen Theorie geübte Kritik (die wir weiter oben widerlegt haben) sei „in den meisten Punkten zutreffend". Man ersieht hieraus, dass *Heym* den eigentlichen Grundgedanken der *Karupschen* Theorie nicht völlig erfasste, jedenfalls von dessen Tragweite gar keine Ahnung hatte.

Da könnte *M. Kanner* viel eher als *Heym* ein Vorläufer der neuen Theorie genannt werden, denn er hat (im „Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft", Bd. II [1871], p. 33—53, und in der „Deutschen Versicherungszeitung" von 1870, Nr. 15) fünf Jahre *vor Karups* erster Abhandlung die Möglichkeit der Anwendung des Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit auch auf Fragen der mathematischen Statistik bewiesen. Er schreibt sogar (l. c. p. 51), zur Verteidigung der oben erwähnten Formeln *Heyms* (die *Heym* selbst nur als Näherungen angesehen wissen wollte): „... Man kann nur sagen, in den *Heymschen* Resultaten ist unter Invaliditätswahrscheinlichkeit die unabhängige Wahrscheinlichkeit zu verstehen, bei welcher man sich jede mit dem Tode abgehende Person durch eine andere gleichen Alters ersetzt denken kann." Dieser Passus beweist klar, dass *Kanner* schon damals den neuen Begriff ganz richtig erfasst hatte. — Und doch ist *Kanner* nur ein Vorläufer der neuen Theorie; denn es scheint ihm noch die Einsicht zu fehlen (v. „Deutsche Versicherungszeitung" von 1870, Nr. 15), dass eine *direkte* Ermittlung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten, unmittelbar aus den durch die Beobachtung gegebenen Zahlen, möglich ist. Vor allem aber fehlt *Kanner* die Erkenntnis von der Wichtigkeit der Intensitätsfunktion, von der Bedeutung des Fundamentalsatzes, dass diese Funktion sowohl nach der alten als auch nach der neuen Auffassung genau dieselbe ist, im Gegensatze zum Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Wenn also *L. von Bortkiewicz,* ohne *Karups* „Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät..." überhaupt zu erwähnen, in seinem Referat über die „Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik", erschienen in der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen", Bd. I_2 (1900—1904), p. 849, schreibt: „... Diese Konstruktion (nämlich die Konstruktion des Begriffes der „unabhängigen" Wahrscheinlichkeit), welche *J. Karup* zugeschrieben wird...", so vermag diese Bemerkung doch nicht an der Tatsache zu rütteln, dass die neue Theorie, und zwar mit vollem Rechte, *Karups* Namen führt.

Hiermit ist die historische Entwicklung der *Karupschen* Theorie skizziert, wie sie sich bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts vollzogen hat. Dieses *erste Stadium* lässt sich dadurch charakterisieren, dass die Reaktivierung noch nicht in den Kreis der theoretischen Erörterungen einbezogen wird. Während des ersten Vierteljahrhunderts ihres Bestehens wurde der neuen Theorie nicht die Würdigung zuteil, die ihrer Bedeutung und Tragweite entspricht. Die Schuld an dieser unverdienten Nichtbeachtung muss Gründen verschiedenartiger Natur zugeschrieben werden. Einerseits, weil die Ansichten von Anhängern und Gegnern der neuen Theorie in eine ziemlich grosse Anzahl von Arbeiten und kleineren Aufsätzen zerstreut und deswegen wohl nicht allgemein bekannt sind, anderseits, weil in dieser ersten Epoche die Frage der Reaktivierung noch unberücksichtigt bleibt, zu Anfang des 20. Jahrhunderts aber aufgerollt wird, habe ich diese zusammenfassende historische Notiz hier gegeben. — Im nächsten Kapitel soll gerade dieser noch unerledigte Fall, in dem Reaktivierung stattfindet, erörtert werden [3].

Bezüglich der Ausscheideordnungen sei noch folgendes bemerkt. Naturgemäss kam bei den allerersten Formeln, welche neben dem Ableben noch die Invalidität als Ausscheidungsursache berücksichtigten, nur absolute und dauernde Dienstunfähigkeit in Frage, Reaktivierung fiel ausser Betracht. Ferner wurde dabei gleichmässige Verteilung der Invaliditätsfälle über ein Jahr vorausgesetzt und überdies angenommen, die Sterbensintensität der Invaliden sei, für jedes Alter, genau so gross wie diejenige der gleichaltrigen Aktiven. Wohl die erste allgemein gebräuchliche und von letzterer Annahme freie Beziehung ist die von *E. Hamza* [4]), Dr. *G. Schärtlin* [5]) und vielen andern benutzte Formel:

$$l^{ii}_{x+1} = l^{ii}_x \cdot (1 - q^i_x) + l^{aa}_x \cdot i_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q^i_x\right), \quad \text{(a)}$$

welche nur gewöhnliche (nicht partielle) Wahrscheinlichkeiten enthält. Sie setzt, zu weiterer Verwertung, die Kenntnis von q^i_x, i_x und q_x für die verschiedenen Werte von x voraus. Sie ist identisch mit der unmittelbar einleuchtenden Relation:

$$l^{ii}_{x+1} = l^{ii}_x \cdot p^i_x + l^{aa}_x \cdot p^{ai}_x, \quad \text{(b)}$$

(wobei p^i_x die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass ein x-jähriger Invalide das Alter $x+1$ erreichen werde, und p^{ai}_x die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x-jähriger Aktiver das Alter $x+1$, aber im Zustande der Invalidität, erleben werde); denn einerseits ist

$$p^i_x + q^i_x = 1, \quad \text{(c)}$$

[3]) Die vorliegende historische Notiz hatte ich für einen am 29. Oktober 1910 abzuhaltenden Vortrag über die mathematische Theorie der Invaliditätsversicherung zusammengestellt, den ich für die 6. ordentliche Mitgliederversammlung der „Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", die an jenem Tage in Lausanne tagte, vorbereitet hatte. Diese historische Notiz war bereits verfasst, als ich von der Arbeit des Herrn *P. Spangenberg:* „Die *Karupsche* Theorie der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten" (erschienen im Heft 20 der „Veröffentlichungen des deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft", p. 91—179, ausgegeben im Januar 1911) Kenntnis erhielt. In dieser Abhandlung, in der der Gegenstand in klarer und ausführlicher Weise erörtert wird, kommt Herr *P. Spangenberg* im wesentlichen zu denselben Schlussfolgerungen wie ich. Er hebt auch gebührend hervor, dass die einzig richtige Fundierung der Frage im Begriffe der Intensitätsfunktion liegt, denn dann erweisen sich die partiellen Wahrscheinlichkeiten als *theoretische Notwendigkeit,* und es kann dann höchstens noch darüber diskutiert werden, ob ihre *praktische* Anwendungsfähigkeit hinter derjenigen der „abhängigen" oder gewöhnlichen Wahrscheinlichkeiten zurückstehe. Diese Frage erledigt Herr *P. Spangenberg* ebenfalls, im zweiten Teil seiner oben zitierten Arbeit, mit dem Nachweis, dass die *Karupsche* Theorie auch in der Praxis keinerlei Nachteile bietet. Dr L.-G. Du Pasquier.

[4]) Auf p. 164 der Abhandlung: „Note sur la théorie mathématique de l'assurance contre le risque d'invalidité d'origine morbide, sénile ou accidentelle." 3me congrès international d'actuaires, tenu du 25 au 30 juin 1900, à Paris. Documents. Première partie, Paris 1901, L. Dulac, éditeur; p. 154—201.

[5]) „Zur mathematischen Theorie der Invaliditätsversicherung". Bern, 1907, Stämpfli & Cie., p. 4.

anderseits, bei der Annahme, dass sich die Invalidisierungen und die Sterbefälle der Invaliden gleichmässig über das Jahr verteilen, gilt die Näherungsformel:

$$p_x^{\overline{ai}} = i_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^i\right) \tag{d}$$

Eine zweite Formel gibt *E. Hamza* an, auf S. 176 seiner oben zitierten Arbeit für den dritten internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker in Paris, eine Formel, in der partielle Wahrscheinlichkeiten Verwendung finden (*Hamza* nennt sie „absolute" Wahrscheinlichkeiten):

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot \left(1 - q_x^i\right) + l_x^{\overline{aa}} \cdot {}'i_x \cdot \left(1 - \frac{{}'q_x^{\overline{aa}} + q_x^i}{2}\right) \tag{e}$$

Auch diese Formel ist mit der Relation

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot p_x^i + l_x^{\overline{aa}} \cdot p_x^{\overline{ai}} \tag{b}$$

identisch; es gilt nämlich näherungsweise:

$$p_x^{\overline{ai}} = {}'i_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \left[{}'q_x^{\overline{aa}} + q_x^i\right]\right), \tag{f}$$

was zwar von *Hamza* nicht angegeben wird, aber aus der Gleichung (d) hervorgeht, wenn man die Approximationsformel

$$i_x = {}'i_x \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot {}'q_x^{\overline{aa}}\right) \tag{g}$$

benutzt und dann, nach dem Ausmultiplizieren, das Glied $\frac{1}{4} \cdot q_x^i \cdot {}'q_x^{\overline{aa}}$ vernachlässigt.

An den Formeln (26) und (27) in § 31, welche die genaue Beziehung zwischen l_{x+1}^{ii} und l_x^{ii} angeben, falls gleichmässige Verteilung der Invalidisierungen sowohl als auch der Sterbefälle vorausgesetzt wird, können folgende Vereinfachungen der Schreibweise vorgenommen werden:

$$\left.\begin{array}{lll} p_x^i & \text{statt} & {}^{(\mu)}{}'p_x^{ii} \\ q_x^i & \text{statt} & {}^{(\mu)}{}'q_x^{ii}, \end{array}\right\} \tag{h}$$

Da nämlich die Reaktivierung (für das ganze zweite Kapitel) ausdrücklich ausgeschlossen wurde, kann in beiden Fällen: beim Bestande der l_x^{ii} wie bei dem der l_x^i, ein Invalide nur noch im Zustande der Dienstunfähigkeit sterben; q_x^i und ${}^{(\mu)}{}'q_x^{ii}$ bedeuten also beide: die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger Invalide als Dienstunfähiger und vor Erreichung des Alters $x+1$ sterben werde.

Die von uns aufgestellten Näherungsformeln können dann folgendermassen geschrieben werden, wenn man noch berücksichtigt, dass, infolge der vorausgesetzten gleichmässigen Verteilung der Invalidisierungen über ein Jahr, $\nu_x = {}'i_x$ ist (siehe die Gleichung (20) in § 30) und dass ${}'p_x^{\overline{aa}}$ statt ${}^{(\mu)}{}'p_x^{\overline{aa}}$, und ${}'q_x^{\overline{aa}}$ statt ${}^{(\mu)}{}'q_x^{\overline{aa}}$, gesetzt werden kann:

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot p_x^i + l_x^{\overline{aa}} \cdot {}'i_x \cdot p_x^i \tag{29}$$

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot p_x^i + l_x^{\overline{aa}} \cdot {}'i_x \cdot p_x^i \cdot \left\{1 - \frac{{}'q_x^{\overline{aa}} - q_x^i}{2}\right\} \tag{30}$$

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot p_x^i + l_x^{\overline{aa}} \cdot {}'i_x \cdot p_x^i \cdot \frac{1 + {}'p_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^i} \tag{32}$$

Alle diese Beziehungen, verglichen mit

$$l_{x+1}^{\overline{ii}} = l_x^{\overline{ii}} \cdot p_x^i + l_x^{\overline{aa}} \cdot p_x^{\overline{ai}}, \tag{b}$$

liefern Näherungsformeln für $p_x^{\overline{ai}}$, die teilweise schon bekannt waren. Zum Beispiel hat *J. Riethmann*[6]) die schon von *G. Zeuner* 1869 aufgestellte und von *W. Küttner*[7]) neu begründete Formel:

$$p_x^{\overline{ai}} = 2 \cdot \frac{i_x \cdot p_x^i}{1 + p_x^i},$$

durch Einsetzen der Näherungsbeziehung (g),

umgewandelt in $p_x^{\overline{ai}} = {}'i_x \cdot p_x^i \cdot \dfrac{2 - {}'q_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^i}$,

welch letztere Formel identisch ist mit dem Ausdruck

$$p_x^{\overline{ai}} = {}'i_x \cdot p_x^i \cdot \frac{1 + {}'p_x^{\overline{aa}}}{1 + p_x^i}, \tag{i}$$

der sich durch Vergleich unserer Formel (32) mit der Relation (b) ergibt, weil ja definitionsgemäss

$${}'p_x^{\overline{aa}} + {}'q_x^{\overline{aa}} = 1 \tag{k}$$

ist. Die Formel (29) würde, mit (b) verglichen, die Beziehung liefern:

$$p_x^{\overline{ai}} = {}'i_x \cdot p_x^i, \tag{l}$$

welch letztere jedoch nur eine rohe Annäherung darstellt, die für die meisten Alter einen viel zu kleinen Wert für $p_x^{\overline{ai}}$ liefert, wie die aus unserer Gleichung (30) entspringende Beziehung

---

[6]) „Zeitschrift für schweizerische Statistik", Bd. 44 (1908), und „Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker", 3. Heft (1908), p. 1—35.

[7]) *Schlömilchs* „Zeitschrift für Mathematik und Physik", Bd. 25 (1880), p. 17.

$$p_x^{\overline{ai}} = {'i_x} \cdot p_x^i \cdot \left\{1 + \frac{q_x^i - {'q_x^{\overline{aa}}}}{2}\right\} \tag{m}$$

lehrt, da erfahrungsgemäss stets

$$q_x^i > {'q_x^{\overline{aa}}} > q_x^{\overline{aa}} \tag{n}$$

Die Beziehung (m) ergibt für $p_x^{\overline{ai}}$ einen Wert, der um $\frac{1}{2} \cdot {'i_x} \cdot q_x^i \cdot \left(q_x^i - {'q_x^{\overline{aa}}}\right)$ *kleiner* ist als der aus der Formel (f) abgeleitete. Die genaue Relation, bei der gemachten Voraussetzung der gleichmässigen Verteilung der Ausscheidungsfälle über ein Jahr, ist aus unseren Gleichungen (26) und (27) in § 31 zu entnehmen und lautet:

$$p_x^{\overline{ai}} = {'i_x} \cdot \frac{p_x^i}{q_x^i} \cdot \left({'q_x^{\overline{aa}}} - \frac{{'p_x^{\overline{aa}}} - p_x^i}{q_x^i} \cdot \text{Log nat}\, p_x^i\right) \tag{r}$$

Bei der Annahme, dass sich die Ausscheidungsfälle nicht gleichmässig über das Jahr verteilen, sondern dass die auftretenden Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, μ_x^{ii} und ν_x während der Dauer eines Jahres konstant bleiben, findet man [abgesehen von der rohen Annäherung (l)] die aus der Gleichung (35) in § 33 entspringende und unseres Wissens zum ersten Male in einwandfreier Weise von uns begründete genaue Relation:

$$p_x^{ai} = p_x^i \cdot \nu_x \cdot \frac{e^{\mu_x^{ii} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x} - 1}{\mu_x^{ii} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x}, \tag{s}$$

woraus näherungsweise:

$$p_x^{\overline{ai}} = p_x^i \cdot \nu_x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left[\mu_x^{ii} - \mu_x^{\overline{aa}} - \nu_x\right]\right) \tag{t}$$

Unter den zahlreichen Approximationen erwähnen wir die aus unserer Gleichung (40) in § 34 zu entnehmende Formel:

$$p_x^{\overline{ai}} = {'i_x} \cdot p_x^i \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left[\mu_x^{ii} - \mu_x^{\overline{aa}}\right]\right), \tag{u}$$

gültig bei konstanter Sterblichkeitsintensität und gleichmässiger Verteilung der Invalidisierungen über ein Jahr.

Bezüglich der verschiedenen Hypothesen über den Verlauf von Sterblichkeit und Invalidität vergleiche man § 35.

III. Kapitel.

Behandlung des Falles, in dem Reaktivierung stattfindet.

§ **37.** An die in § 24 angestellten Betrachtungen anknüpfend formulieren wir hier nochmals die zu lösende Aufgabe: es gilt, zwei differenziierbare Funktionen von x zu finden: $z = z_x = l_x^{\overline{aa}}$ einerseits, $\zeta = \zeta_x = l_x^{ii}$ anderseits, von der Eigenschaft, dass sie folgendes, schon in § 24 aufgestellte System von simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung befriedigen:

$$\frac{dz}{dx} = \zeta \cdot \varrho_x - z \cdot \left(\mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x\right) \tag{35}$$

$$\frac{d\zeta}{dx} = z \cdot \nu_x - \zeta \cdot \left(\mu_x^{\overline{ii}} + \varrho_x\right) \tag{36}$$

Dabei werden $\mu_x^{\overline{aa}} = f(x)$, $\mu_x^{ii} = \varphi(x)$, $\nu_x = F(x)$ und $\varrho_x = \Phi(x)$ als bekannte Funktionen des Alters x betrachtet. *Lässt man diese vier Funktionen ganz beliebig, so ist es im allgemeinen nicht möglich, obiges System der Gleichungen* (35) *und* (36), *bei alleiniger Zuhülfenahme der bekannten elementaren Funktionen und ihrer Kombinationen, durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen und Quadraturen zu lösen.* Auf den Beweis dieses Satzes, der in der mathematischen Theorie der Differentialgleichungen eine grosse prinzipielle Bedeutung hat, hier einzugehen, ist nicht unsere Aufgabe. *J. Liouville* hat als erster für einen bemerkenswerten Spezialfall einen Beweis erbracht. („Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris", 11 (1840), p. 729; „Journal de mathématiques pures et appliquées", fondé par *Liouville*, série 1, tome 6 (1841), p. 1.) Einen strengen Beweis dieses wichtigen Theorems, das für die allgemeine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ($n > 1$), somit auch für die *allgemeine Riccattische* Gleichung, gültig ist, gab *E. Vessiot* (Thèse, Paris, 1892; publiée aussi dans les „Annales de l'Ecole Normale Supérieure"). Wir begnügen uns, unter Verweisung auf die zitierten Originalarbeiten, von dem Resultate Gebrauch zu machen (vergl. § 26). Wir werden dementsprechend so vorgehen, dass wir zunächst über eine oder mehrere dieser vier Funktionen eine Annahme machen, durch welche das Gleichungssystem vereinfacht wird.

Durch eingehende Untersuchung haben wir mehrere Fälle gefunden, in denen obiges System von simultanen Differentialgleichungen (35) und (36) in geschlossener Form integriert werden kann. Einige davon fallen ausser Betracht, weil sie Funktionen heranziehen, deren Verlauf mit der Wirklichkeit im Widerspruche steht.

(Ein solcher Integrabilitätsfall würde z. B. erfordern, dass die Reaktivierungsintensität mit steigendem Alter wachse, ein anderer, dass die Sterblichkeitsintensität mit wachsendem Alter geringer werde, was bekanntlich nur für die ersten Lebensjahre zutrifft, im allgemeinen aber nicht bei Erwachsenen, die sich in den Dienst eines Berufes gestellt haben, und solche allein legen wir unserer Betrachtung zugrunde.) Unter den übrigbleibenden Integrabilitätsfällen soll zunächst der sich am natürlichsten darbietende behandelt werden; er beruht auf folgender vereinfachender Voraussetzung:

§ **38.** Hypothese. *Die vier Intensitätsfunktionen*

$$\mu_x^{\overline{aa}} = f,\ \mu_x^{ii} = \varphi,\ \nu_x = F,\ \varrho_x = \Phi \qquad (1)$$

mögen während der Dauer eines Jahres konstant bleiben.

Die weitere Untersuchung knüpft an die Gleichung (38) in § 26 an. Bei unserer Annahme ist

$$f' = \varphi' = F' = \Phi' = 0,$$

so dass sich die erwähnte Gleichung auf die folgende reduziert:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}\cdot(f+F+\varphi+\Phi)+z\cdot(\varphi\cdot f+\varphi\cdot F+f\cdot\Phi)=0 \quad (2)$$

Wir führen die Abkürzungen

$$f+F+\varphi+\Phi = 2\cdot\sigma,\quad \varphi\cdot f+\varphi\cdot F+f\cdot\Phi=\sigma_1 \quad (3)$$

ein und haben im folgenden die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\cdot\sigma\cdot\frac{dz}{dx} + \sigma_1\cdot z = 0 \qquad (4)$$

zu behandeln. Genau dieselbe lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich für die Funktion $\zeta = l_x^{ii}$, was man durch direkte Rechnung sofort bestätigen kann, oder auch durch die Überlegung, dass unsere obige Hypothese von der Konstanz der Intensitätsfunktionen die Symmetrie des Vorganges wahrt (vergl. § 2, Schluss). Die obige Gleichung (4) wird uns demnach als Lösung die allgemeine Gestalt sowohl von z als auch von ζ liefern.

Bekanntlich kann man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten durch den Exponentialansatz lösen. Wir setzen dementsprechend:

$$z = e^{s\cdot x},\ \text{woraus}\ \frac{dz}{dx} = s\cdot e^{s\cdot x},\ \frac{d^2z}{dx^2} = s^2\cdot e^{s\cdot x} \qquad (5)$$

Durch Substitution dieser Werte in die Gleichung (4) verwandelt sich diese in:

$$(s^2 + 2\cdot\sigma\cdot s + \sigma_1)\cdot e^{s\cdot x} = 0$$

Da nun der Faktor $e^{s\cdot x}$ für endliche Werte von x nicht verschwindet, muss die Gleichung

$$s^2 + 2\cdot\sigma\cdot s + \sigma_1 = 0 \qquad (6)$$

bestehen. Sie besitzt die zwei Wurzeln:

$$s_1 = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1} = -\sigma + \tau \qquad (7)$$

$$s_2 = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1} = -\sigma - \tau \qquad (7')$$

Infolgedessen ist, nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen, jede Lösung von (4) in der Form

$$z = C_1\cdot e^{s_1\cdot x} + C_2\cdot e^{s_2\cdot x} \qquad (8)$$

enthalten, wobei C_1 und C_2 willkürliche Konstanten vorstellen.

§ **39.** Der Verlauf der Funktion $z = l_x^{\overline{aa}}$ hängt wesentlich davon ab, ob s_1 und s_2 reell oder imaginär ausfallen. Es ist demnach zunächst zu entscheiden, ob die Diskriminante der Gleichung (4), d. i. der Ausdruck $\sigma^2 - \sigma_1$, positiv oder negativ ist.

Theorie und Beobachtung lehren, dass die Sterblichkeitsintensität der Invaliden im allgemeinen grösser als die der gleichaltrigen Aktiven ist:

$$\mu_x^{ii} > \mu_x^{\overline{aa}}$$

Hält man sich den ganzen Vorgang, der sich zwischen den zwei Versicherungsbeständen B_a und B_i abspielt, gegenwärtig (v. §§ 1 und 2), so leuchtet ein, dass die Invalidisierungsintensität im allgemeinen grösser sein muss, als die Sterblichkeitsintensität der Invaliden, da sich sonst der Bestand B_i gar nicht bilden könnte: $\nu_x > \mu_x^{ii}$. Die Reaktivierungsintensität ϱ_x ist erfahrungsgemäss fast immer sehr klein. Zwischen den eingeführten vier Intensitätsfunktionen bestehen demnach folgende Ungleichungen:

$$\nu_x > \mu_x^{ii} > \mu_x^{\overline{aa}} > \varrho_x \qquad (9)$$

oder, in unserer abgekürzten Bezeichnungsweise:

$$F > \varphi > f > \Phi \qquad (9')$$

Aus diesen Ungleichungen entspringen folgende Gleichungen, in denen ε und ε' positive Grössen bedeuten:

$$\varphi = f + \varepsilon,\quad F = f + \varepsilon + \varepsilon' \qquad (10)$$

Die in Frage stehende Diskriminante $\sigma^2 - \sigma_1$ verwandelt sich nun, bei Berücksichtigung von (3) und (10) und nach Multiplikation mit 4, wodurch ja das Vorzeichen nicht beeinflusst wird, in:

$$\left[\Phi + f + (f+\varepsilon) + (f+\varepsilon+\varepsilon')\right]^2$$
$$-4 \cdot \left[f \cdot (f+\varepsilon) + (f+\varepsilon)\cdot(f+\varepsilon+\varepsilon') + f\cdot\Phi\right]$$
$$= \left[\Phi + 3\cdot f + 2\cdot\varepsilon + \varepsilon'\right]^2$$
$$-4 \cdot \left[2\cdot f^2 + 3\cdot f\cdot\varepsilon + f\cdot\varepsilon' + \varepsilon^2 + \varepsilon\cdot\varepsilon' + f\cdot\Phi\right]$$
$$= \varepsilon'\cdot(\varepsilon' + 2\cdot f + 2\cdot\Phi) + 4\cdot\varepsilon\cdot\Phi + (f+\Phi)^2$$

d. h. in eine (bei den getroffenen Annahmen) sicher positive Grösse. Demnach stellen s_1 *und* s_2 *reelle Grössen* vor.

§ **40.** Zur Bestimmung der noch willkürlichen Konstanten C_1 und C_2 in (8) muss man von einem *bestimmten* (übrigens willkürlichen) *Anfangszustand* ausgehen. Wir betrachten zu diesem Zweck einen so niedrigen Wert von x, dass bei diesem Alter die Möglichkeit der Erwerbsunfähigkeit erst beginnt. Bedeutet n dieses niedrigste Alter, so ist für dasselbe die Anzahl der Erwerbsunfähigen Null: $l_n^{ii} = \zeta_n = 0$, und die Anzahl der Aktiven, $l_n^{\overline{aa}} = z_n$, wird mit der Anzahl der unter Beobachtung stehenden Lebenden überhaupt identifiziert. Dieses Vorgehen ist um so eher gerechtfertigt, als die Invaliditätswahrscheinlichkeit in den ersten Jahren der Erwerbsfähigkeit im allgemeinen nur gering ist. Der betrachtete Anfangszustand sei also durch die Gleichungen

$$l_n^{ii} = \zeta_n = 0, \qquad l_n^{\overline{aa}} = z_n \tag{11}$$

definiert (vergl. hiermit § 51).

§ **41.** Durch Differentiation von (8) und bei Berücksichtigung von (35) erhält man:

$$\frac{dz}{dx} = C_1\cdot s_1\cdot e^{s_1\cdot x} + C_2\cdot s_2\cdot e^{s_2\cdot x}$$
$$= \zeta_x\cdot\varrho_x - z_x\cdot\left(\mu_x^{\overline{aa}} + \nu_x\right)$$

Substituiert man in dieser Relation, sowie in (8), den Wert n für x und berücksichtigt den Anfangszustand, wie er durch die Gleichungen (11) festgelegt wird, so entstehen die zwei Gleichungen:

$$z_n = C_1\cdot e^{s_1\cdot n} + C_2\cdot e^{s_2\cdot n}$$
$$-z_n\cdot\left(\mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right) = C_1\cdot s_1\cdot e^{s_1\cdot n} + C_2\cdot s_2\cdot e^{s_2\cdot n},$$

welche eine Berechnung von C_1 und C_2 gestatten aus:

$$z_n\cdot\left(s_1 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right) = C_2\cdot e^{s_2\cdot n}\cdot(s_1 - s_2)$$
$$z_n\cdot\left(s_2 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right) = C_1\cdot e^{s_1\cdot n}\cdot(s_2 - s_1)$$

Infolgedessen liefert die Gleichung (8):

$$z = z_n\cdot\left\{\left(s_2 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right)\cdot e^{-s_1\cdot n}\cdot\frac{1}{s_2 - s_1}\cdot e^{s_1\cdot x} + \left(s_1 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right)\cdot\frac{1}{s_1 - s_2}\cdot e^{-s_2\cdot n}\cdot e^{s_2\cdot x}\right\},$$

$$z = \frac{z_n}{s_1 - s_2}\cdot\left\{\left(s_1 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right)\cdot e^{s_2\cdot(x-n)} - \left(s_2 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n\right)\cdot e^{s_1\cdot(x-n)}\right\}, \tag{12}$$

oder, nach leichter Umformung:

$$\frac{z}{z_n} = e^{s_1\cdot(x-n)} - b\cdot\left(e^{s_1\cdot(x-n)} - e^{s_2\cdot(x-n)}\right) \tag{13}$$

wobei zur Abkürzung $\dfrac{s_1 + \mu_n^{\overline{aa}} + \nu_n}{s_1 - s_2} = b$ gesetzt ist.

Die Funktion $\zeta = l_x^{ii}$ befriedigt, wie schon in § 38 erwähnt, dieselbe lineare Differentialgleichung (4) wie z, hat demnach auch die Form:

$$\zeta = C\cdot e^{s_1\cdot x} + C_0\cdot e^{s_2\cdot x}, \tag{8a}$$

wo C und C_0 willkürliche Konstanten vorstellen. Deren Wert hängt von den Anfangsbedingungen ab. Nun haben wir den Anfangszustand, von dem aus wir den Vorgang sich abspielen lassen wollen, durch die Gleichungen (11) bereits festgelegt, so dass sich die Ermittlung von C und C_0 folgendermassen gestaltet:

durch Differentiation von (8a) und bei Berücksichtigung der Gleichung (36) in § 37 erhält man:

$$\frac{d\zeta}{dx} = C\cdot s_1\cdot e^{s_1\cdot x} + C_0\cdot s_2\cdot e^{s_2\cdot x} = z_x\cdot\nu_x - \zeta_x\cdot\left(\mu_x^{ii} + \varrho_x\right)$$

Substituiert man hierin, sowie in (8a), den Wert n für x, so entstehen, wegen der Anfangsbedingungen (11), die folgenden zwei Gleichungen:

$$0 = C\cdot e^{s_1\cdot n} + C_0\cdot e^{s_2\cdot n}$$
$$z_n\cdot\nu_n = C\cdot s_1\cdot e^{s_1\cdot n} + C_0\cdot s_2\cdot e^{s_2\cdot n}$$

die man, zur Berechnung von C und C_0, überführt in:

$$z_n\cdot\nu_n = C\cdot s_1\cdot e^{s_1\cdot n} - C\cdot s_2\cdot e^{s_1\cdot n} = C\cdot(s_1 - s_2)\cdot e^{s_1\cdot n}$$
$$z_n\cdot\nu_n = C_0\cdot s_2\cdot e^{s_2\cdot n} - C_0\cdot s_1\cdot e^{s_2\cdot n} = C_0\cdot(s_2 - s_1)\cdot e^{s_2\cdot n}$$

Infolgedessen liefert die Gleichung (8a):

$$\zeta = z_n \cdot \nu_n \cdot \left[\frac{1}{(s_1 - s_2)} \cdot e^{-s_1 \cdot n} \cdot e^{s_1 \cdot x} + \frac{1}{s_2 - s_1} \cdot e^{-s_2 \cdot n} \cdot e^{s_2 \cdot x}\right], \text{ oder:}$$

$$\zeta = \frac{z_n \cdot \nu_n}{s_1 - s_2} \cdot \left\{e^{s_1 \cdot (x-n)} - e^{s_2 \cdot (x-n)}\right\} \tag{14}$$

Die Gleichungen (13) *und* (14) *gestatten es, z und ζ als Funktionen von x zu berechnen.*

§ **42.** Durch Einsetzen der Werte von s_1 und s_2 aus den Gleichungen (7) und (7′) in die Ausdrücke (13) und (14) lassen sich für $z = \overline{l^{aa}}$ und für $\zeta = l_x^{ii}$ noch andere Gestalten erzielen. Zieht man in Betracht, dass

$$s_1 = -\sigma + \tau$$
$$s_2 = -\sigma - \tau$$

folglich: $s_1 - s_2 = 2 \cdot \tau$ und $s_1 + s_2 = -2 \cdot \sigma$,

so geht der Ausdruck (12) über in:

$$z_x = \frac{z_n}{2\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot (x-n)} \cdot \left\{\tau \cdot \left[e^{\tau \cdot (x-n)} + e^{-\tau \cdot (x-n)}\right] - \left(-\sigma + \overline{\mu_n^{aa}} + \nu_n\right) \cdot \left[e^{\tau \cdot (x-n)} - e^{-\tau \cdot (x-n)}\right]\right\} \tag{15}$$

Dieser Ausdruck lässt sich kürzer schreiben, wenn man die von *Leonhard Euler* eingeführten „Hyperbelfunktionen" benutzt. Es lautet nämlich die Definition von *Sinus hyperbolicus x* (geschrieben $\mathfrak{Sin}\, x$):

$$\mathfrak{Sin}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{16}$$

und die Definition von *Cosinus hyperbolicus x* (geschrieben $\mathfrak{Cof}\, x$):

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{16'}$$

Bei Benutzung dieser Schreibweise ergibt sich für den obigen Ausdruck von z:

$$z_x = \frac{z_n}{\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot (x-n)} \cdot \left\{\tau \cdot \mathfrak{Cof}\left(\tau \cdot (x-n)\right) + \left(\sigma - \overline{\mu_n^{aa}} - \nu_n\right) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\tau \cdot (x-n)\right)\right\} \tag{15a}$$

In ähnlicher Weise formt man den Ausdruck (14) für $\zeta = l_x^{ii}$ um. Es wird:

$$\zeta_x = \frac{z_n \cdot \nu_n}{2 \cdot \tau} \cdot \left\{e^{(-\sigma+\tau) \cdot (x-n)} - e^{(-\sigma-\tau) \cdot (x-n)}\right\}$$

$$= \frac{z_n \cdot \nu_n}{\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot (x-n)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{e^{\tau \cdot (x-n)} - e^{-\tau \cdot (x-n)}\right\} \tag{17}$$

oder, bei Benutzung der Hyperbelfunktionen,

$$\zeta_x = \frac{z_n \cdot \nu_n}{\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot (x-n)} \cdot \mathfrak{Sin}\left(\tau \cdot (x-n)\right) \tag{17a}$$

Die Invaliditätsordnung gestaltet sich demnach wie folgt:

$$l_n^{ii} = 0$$

$$l_{n+1}^{ii} = \overline{l_n^{aa}} \cdot \nu_n \cdot e^{-\sigma} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}\, \tau$$

$$l_{n+2}^{ii} = \overline{l_n^{aa}} \cdot \nu_n \cdot e^{-2 \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}\,(2 \cdot \tau)$$

$$l_{n+3}^{ii} = \overline{l_n^{aa}} \cdot \nu_n \cdot e^{-3 \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}\,(3 \cdot \tau)$$

. . . .

. . . .

$$l_{n+\lambda}^{ii} = \overline{l_n^{aa}} \cdot \nu_n \cdot e^{-\lambda \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}\,(\lambda \cdot \tau)$$

. . . .

und die Aktivitätsordnung wird:

$$\overline{l_n^{aa}} = \overline{l_n^{aa}} = z_n$$

$$\overline{l_{n+1}^{aa}} = \overline{l_n^{aa}} \cdot e^{-\sigma} \cdot \left\{\mathfrak{Cof}\, \tau + \frac{\sigma - \overline{\mu_n^{aa}} - \nu_n}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}\, \tau\right\}$$

$$\overline{l_{n+2}^{aa}} = \overline{l_n^{aa}} \cdot e^{-2 \cdot \sigma} \cdot \left\{\mathfrak{Cof}(2 \cdot \tau) + \frac{\sigma - \overline{\mu_n^{aa}} - \nu_n}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}(2 \cdot \tau)\right\}$$

$$\overline{l_{n+3}^{aa}} = \overline{l_n^{aa}} \cdot e^{-3 \cdot \sigma} \cdot \left\{\mathfrak{Cof}\,(3 \cdot \tau) + \frac{\sigma - \overline{\mu_n^{aa}} - \nu_n}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}(3 \cdot \tau)\right\}$$

. . . .

. . . .

$$\overline{l_{n+\lambda}^{aa}} = \overline{l_n^{aa}} \cdot e^{-\lambda \cdot \sigma} \cdot \left\{\mathfrak{Cof}\,(\lambda \cdot \tau) + \frac{\sigma - \overline{\mu_n^{aa}} - \nu_n}{\tau} \cdot \mathfrak{Sin}(\lambda \cdot \tau)\right\}$$

. . . .

§ **43.** Unsere nächste Aufgabe besteht darin, eine Beziehung zu finden, die es gestattet, von l_x^{ii} auf l_{x+1}^{ii}, ebenso von $\overline{l_x^{aa}}$ auf $\overline{l_{x+1}^{aa}}$, zu schliessen. Suchen wir zunächst die Beziehung zwischen ζ_x und ζ_{x+1}. Die Gleichung (17a) liefert:

$$\zeta_x = \frac{z_n \cdot \nu_n \cdot e^{\sigma \cdot n}}{\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot x} \cdot \mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (x-n)\big)$$

Durch Substitution von $(x+1)$ an Stelle von x ergibt sich:

$$\zeta_{x+1} = \frac{z_n \cdot \nu_n \cdot e^{\sigma \cdot n}}{\tau} \cdot e^{-\sigma \cdot (x+1)} \cdot \mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (x-n+1)\big)$$

Dividiert man diese zwei Gleichungen durcheinander, so erhält man:

$$\frac{\zeta_{x+1}}{\zeta_x} = \frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x} = e^{-\sigma} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (x-n+1)\big)}{\mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (x-n)\big)} \qquad (18)$$

Das Verhältnis der 2 Anzahlen von Invaliden, die jeweilen am Anfang und am Ende desselben einjährigen Zeitraumes leben, lässt sich demnach vermittelst der Hyperbelfunktion $\mathfrak{Sin}\, x$ in einfacher Weise ausdrücken ($e^{-\sigma}$ ist nach Voraussetzung eine Konstante). Nun sind Tafeln der Hyperbelfunktionen berechnet worden (z. B. in der *„Hütte“, Ingenieurs Taschenbuch,* gehen sie von $x = 0$ bis $x = 5{,}09$). Es ist aber zweckmässig, neben dem genauen Ausdruck (18) eine für die Praxis zugänglichere Formel abzuleiten, auch wenn sie nur eine Annäherung an den streng richtigen Ausdruck darstellt.

Näherungsformeln.

§ **44.** Zu einem Näherungswerte für das Verhältnis $\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x}$ gelangt man durch Reihenentwicklung. Benutzt man die Definitionsgleichung (16) und die bekannte Exponentialreihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \textit{ in inf.}, \qquad (16'')$$

so findet man für *sinus hyperbolicus* x die Entwicklung:

$$\mathfrak{Sin}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \textit{ in inf.} \qquad (16a)$$

Dementsprechend verwandelt sich die Gleichung (18) in:

$$\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x} = e^{-\sigma} \cdot \frac{\tau \cdot (x-n+1) + \frac{\tau^3 \cdot (x-n+1)^3}{3!} + \frac{\tau^5 \cdot (x-n+1)^5}{5!} + \cdots}{\tau \cdot (x-n) + \frac{\tau^3 \cdot (x-n)^3}{3!} + \frac{\tau^5 \cdot (x-n)^5}{5!} + \cdots}$$

$$= e^{-\sigma} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-n}\right) \cdot \frac{1 + \frac{\tau^2 \cdot (x-n+1)^2}{3!} + \frac{\tau^4 \cdot (x-n+1)^4}{5!} + \cdots}{1 + \frac{\tau^2 \cdot (x-n)^2}{3!} + \frac{\tau^4 \cdot (x-n)^4}{5!} + \cdots}$$

. . . . (18a)

Als *erste Annäherung* findet man demnach:

$$\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x} = e^{-\sigma} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-n}\right)$$

Solange die Intensitätsfunktionen $\mu^{\overline{aa}}_x$, μ^{ii}_x, ν_x, ϱ_x von der Grössenordnung einiger Tausendstel sind (was vom 16. bis gegen das 40. Lebensjahr ungefähr zutrifft), bewegen sich σ und τ annähernd in demselben Intervall, so dass $\tau \cdot (x-n)$ den Betrag einiger Hundertstel kaum übersteigt. Ersetzt man also den in der Gleichung (18) stehenden Quotienten der zwei Hyperbelfunktionen durch den Bruch $\frac{x-n+1}{x-n}$, so werden Glieder vernachlässigt, deren Grössenordnung einige Zehntausendstel nicht übertrifft. Dann darf man aber, im Hinblick auf die Exponentialreihe (16″), auch $e^{-\sigma}$ durch $(1-\sigma)$ ersetzen, denn die weggelassenen Glieder übersteigen dann den Betrag einiger Hunderttausendstel nicht. Man erhält somit als *erste Approximation:*

$$\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x} = (1-\sigma) \cdot \left(1 + \frac{1}{x-n}\right) \qquad (19)$$

Dabei ist $\sigma = \frac{1}{2} \cdot \left(\mu^{\overline{aa}}_x + \mu^{ii}_x + \nu_x + \varrho_x\right)$, und n bedeutet das niedrigste Alter, in welchem der Eintritt von Erwerbsunfähigkeit im betrachteten Versicherungsbestande überhaupt konstatiert wird, mit andern Worten: *n bedeutet dasjenige Alter, in welchem alle Versicherten noch aktiv sind.* Bis gegen das Alter von 40 Jahren ist die durch diese Formel erreichbare Annäherung an den tatsächlichen Verlauf als eine befriedigende und für die Bedürfnisse der Praxis ausreichende zu bezeichnen.

§ **45.** Für den Anfangswert $x = n$ scheint die Näherungsformel (19), wie auch die strenge Formel (18), zu versagen, da beide für das in Frage stehende Verhältnis den Wert ∞ liefern. Dieser Übelstand lässt sich unschwer beheben.

Aus der Gleichung (18) folgt nämlich:

$$l^{ii}_{n+1} = e^{-\sigma} \cdot l^{ii}_n \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (n-n+1)\big)}{\mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (n-n)\big)} = 0 \cdot \infty = \text{unbestimmt.}$$

Es ist also der sogenannte „wahre Wert“ von $\left(\frac{l^{ii}_n}{\mathfrak{Sin}\, 0}\right)$, d. h. der Grenzwert, dem sich $\left(\frac{l^{ii}_x}{\mathfrak{Sin}\big(\tau \cdot (x-n)\big)}\right)$ unbegrenzt nähert, wenn x gegen n konvergiert, zu ermitteln. Dies kann geschehen, indem man für

$l^{ii}_x = \zeta_x$ seinen Wert aus (17a) einsetzt. Es wird dann der gesuchte wahre Wert:

$$\lim_{x \succ n}\left[\frac{l^{ii}_x}{\mathfrak{Sin}\left(\tau \cdot (x-n)\right)}\right] = \frac{z_n \cdot \nu_n}{\tau}$$

Demnach würde sich, bei konsequenter Vernachlässigung aller Glieder von höherer als erster Ordnung, die Invaliditätsausscheidetafel wie folgt gestalten:

$$l^{ii}_n = 0$$
$$l^{ii}_{n+1} = \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma)$$
$$l^{ii}_{n+2} = 2 \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1 - 2 \cdot \sigma)$$
$$l^{ii}_{n+3} = 3 \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1 - 3 \cdot \sigma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Indessen empfiehlt es sich, den durch Anwendung der Näherungsformel (19) begangenen Fehler nicht noch zu vergrössern und für Berechnungen folgende Invaliditätsordnung zugrunde zu legen:

$$l^{ii}_n = 0$$

$$l^{ii}_{n+1} = e^{-\sigma} \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\tau}{\tau}$$
$$= \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma) \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2\right)$$

$$l^{ii}_{n+2} = 2 \cdot l^{ii}_{n+1} \cdot (1-\sigma)$$
$$= 2 \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2\right)$$

$$l^{ii}_{n+3} = \frac{3}{2} \cdot l^{ii}_{n+2} \cdot (1-\sigma)$$
$$= 3 \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2\right)$$

$$l^{ii}_{n+4} = \frac{4}{3} \cdot l^{ii}_{n+3} \cdot (1-\sigma)$$
$$= 4 \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma)^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$l^{ii}_{n+\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot l^{ii}_{n+\lambda-1} \cdot (1-\sigma)$$
$$= \lambda \cdot \overline{l^{aa}_n} \cdot \nu_n \cdot (1-\sigma)^\lambda \cdot \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Dabei ist in erster Approximation

$$\frac{\mathfrak{Sin}\,\tau}{\tau} \text{ durch } 1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2$$

ersetzt worden.

§ **46.** Zu einer Darstellung, die den tatsächlichen Verlauf genauer wiedergibt, ohne von Hyperbelfunktionen Gebrauch zu machen, gelangt man, indem man den letzten Bruch von (18a) in eine Potenzreihe entwickelt. Man findet bei Benutzung des polynomischen Lehrsatzes:

$$\frac{1}{1 + \frac{\tau^2 \cdot (x-n)^2}{3!} + \frac{\tau^4 \cdot (x-n)^4}{5!} + \cdots}$$
$$= 1 - \frac{1}{6} \cdot \tau^2 \cdot (x-n)^2 + \frac{7}{360} \cdot \tau^4 \cdot (x-n)^4$$
$$- \frac{31}{15120} \cdot \tau^6 \cdot (x-n)^6 + \cdots\cdots$$

Ferner:

$$\left(1 + \frac{\tau^2 \cdot (x-n+1)^2}{3!} + \frac{\tau^4 \cdot (x-n+1)^4}{5!} + \cdots\cdots\right)$$
$$\cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \tau^2 \cdot (x-n)^2 + \frac{7}{360} \cdot \tau^4 \cdot (x-n)^4 - \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{6} \cdot \tau^2 \cdot (2x - 2n + 1)$$
$$- \frac{\tau^4}{360} \cdot \left\{8 \cdot (x-n)^2 \cdot (x-n-1) - 12 \cdot (x-n) - 3\right\}$$
$$+ \frac{\tau^6}{45360} \cdot \left\{9 \cdot (x-n+1)^6 - 93 \cdot (x-n)^6\right.$$
$$+ 49 \cdot (x-n)^4 \cdot (x-n+1)^2$$
$$\left.- 63 \cdot (x-n)^2 \cdot (x-n+1)^4\right\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ersetzt man noch $e^{-\sigma}$ durch die bekannte Reihenentwicklung (16″), so verwandelt sich schliesslich (18a) in folgende Formel (19a):

$$\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{ii}_x} = \frac{x-n+1}{x-n} \cdot (1-\sigma)$$
$$+ \frac{x-n+1}{x-n} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma^2 + \frac{2 \cdot (x-n) + 1}{3} \cdot \tau^2\right]\right.$$
$$- \frac{\sigma}{6} \cdot \left[\sigma^2 + \left(2 \cdot [x-n] + 1\right) \cdot \tau^2\right]$$
$$+ \frac{1}{24} \cdot \left[\sigma^4 + \left(4 \cdot (x-n) + 2\right) \cdot \sigma^2 \cdot \tau^2\right.$$
$$\left. - \left(\frac{8}{15} \cdot [x-n]^2 \cdot [x-n-1] - \frac{4}{5} \cdot [x-n] - \frac{1}{5}\right) \cdot \tau^4\right]$$

$$-\frac{\sigma}{120}\cdot\left[\sigma^4+10\cdot\frac{2\cdot(x-n)+1}{3}\cdot\sigma^2\cdot\tau^2\right.$$

$$\left.-\left(\frac{8}{3}\cdot[x-n]^2\cdot[x-n-1]-4\cdot[x-n]-1\right)\cdot\tau^4\right]$$

$$\left.+\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \quad (19a)$$

Als *zweite Annäherung* ergibt sich somit, wenn man die Glieder von höherer als zweiter Ordnung weglässt:

$$l^{ii}_{x+1}=l^{\overline{ii}}_{x}\cdot\frac{x-n+1}{x-n}\cdot\left\{1-\sigma\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2+\frac{1}{6}\cdot\left(2\cdot(x-n)+1\right)\cdot\tau^2\right\} \quad (20)$$

und, wenn zur Abkürzung

$$b=1-\sigma+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2+\frac{1}{6}\cdot\tau^2$$

gesetzt wird, als entsprechende Ausscheideordnung der Invaliden:

$$l^{ii}_{n}=0$$

$$l^{ii}_{n+1}=l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot\left[1-\sigma+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\right]$$

$$=l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot b$$

$$l^{ii}_{n+2}=2\cdot l^{ii}_{n+1}\cdot\left(b+\frac{1}{3}\cdot\tau^2\right)$$

$$=2\cdot l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot b\cdot\left(b+\frac{1}{3}\cdot\tau^2\right)$$

$$l^{ii}_{n+3}=\frac{3}{2}\cdot l^{ii}_{n+2}\cdot\left(b+\frac{2}{3}\cdot\tau^2\right)$$

$$=3\cdot l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot b\cdot\left(b+\frac{1}{3}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(b+\frac{2}{3}\cdot\tau^2\right)$$

. . . .

. . . .

$$l^{ii}_{n+\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot l^{ii}_{n+\lambda-1}\cdot\left(b+\frac{\lambda-1}{3}\cdot\tau^2\right)$$

$$=\lambda\cdot l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot b\cdot\left(b+\frac{1}{3}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(b+\frac{2}{3}\cdot\tau^2\right)\cdot$$

$$\cdots\cdots\left(b+\frac{\lambda-1}{3}\cdot\tau^2\right)$$

. . . .

Es leuchtet ein, dass man aus obiger Gleichung (19a) auf mannigfache Art Näherungsformeln ableiten kann. Als letztes Beispiel sei die folgende Formel (20′) angeführt, in der nur Glieder von höherer als dritter Ordnung vernachlässigt sind und die als *dritte Annäherung* angesehen werden kann:

$$\frac{l^{ii}_{x+1}}{l^{\overline{ii}}_{x}}=\left[\left(1-\sigma\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{x-n}\right]\cdot\left[1+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\cdot(2\cdot x-2\cdot n+1)\right] \quad (20')$$

Dabei bedeutet n wieder dasjenige Alter, in welchem alle Versicherten noch aktiv sind, und die Bedeutung von σ und τ ist aus den Gleichungen (3) und (7) in § 38 zu entnehmen. Die Genauigkeit der Formel (20′) wird noch durch den Umstand erhöht, dass der erste Faktor, gleich $\left(1-\sigma+\frac{1}{2}\sigma^2-\frac{1}{6}\sigma^3\right)$, etwas zu klein, der letzte Faktor etwas zu gross ist, so dass sich die Fehler teilweise aufheben. Da sogar die Glieder fünften Grades dabei teilweise berücksichtigt werden, ist unter den getroffenen Annahmen die Approximation eine sehr scharfe.

Bei Anwendung der Formel (20′) gestaltet sich die Invaliditätsordnung wie folgt:

$$l^{\overline{ii}}_{n}=0$$

$$l^{ii}_{n+1}=l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\left[1+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\right]$$

$$l^{\overline{ii}}_{n+2}=l^{ii}_{n+1}\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\frac{2}{1}\cdot\left[1+\frac{3}{6}\cdot\tau^2\right]$$

$$=2\cdot l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]^2$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(1+\frac{3}{6}\cdot\tau^2\right)$$

$$l^{\overline{ii}}_{n+3}=l^{ii}_{n+2}\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(1+\frac{5}{6}\cdot\tau^2\right)$$

$$=3\cdot l^{\overline{aa}}_{n}\cdot\nu_n\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]^3$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(1+\frac{3}{6}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(1+\frac{5}{6}\cdot\tau^2\right)$$

$$\overline{l}^{ii}_{n+4} = \overline{l}^{ii}_{n+3} \cdot \left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(1+\frac{7}{6}\cdot\tau^2\right)$$

$$= 4\cdot\overline{l}^{aa}_n\cdot\nu_n\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]^4$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{6}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(1+\frac{3}{6}\cdot\tau^2\right)\cdot\left(1+\frac{5}{6}\cdot\tau^2\right)$$

$$\cdot\left(1+\frac{7}{6}\cdot\tau^2\right)$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\overline{l}^{ii}_{n+\lambda} = \overline{l}^{ii}_{n+\lambda-1}\cdot\left[(1-\sigma)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\right)+\frac{1}{3}\cdot\sigma^3\right]$$

$$\cdot\frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot\left(1+\frac{2\cdot\lambda-1}{6}\cdot\tau^2\right)$$

. . . .

§ **47.** Wir gehen nun dazu über, eine Beziehung zwischen $\overline{l}^{aa}_x$ und $\overline{l}^{aa}_{x+1}$ abzuleiten. Setzt man zur Abkürzung

$$x - n = x' \text{ und } \sigma - \overline{\mu}^{aa}_n - \nu_n = k, \tag{a}$$

so geht die Gleichung (15a) von § 42 in die folgende über:

$$z_x = z_n \cdot e^{-\sigma\cdot x'}\cdot\left\{\mathfrak{Cof}\,(\tau\cdot x')+\frac{k}{\tau}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\tau\cdot x')\right\}$$

Ersetzt man hierin x durch $x+1$, so wird:

$$z_{x+1} = z_n\cdot e^{-\sigma\cdot(x'+1)}\cdot\left\{\mathfrak{Cof}\,(\tau\cdot(x'+1)) + \frac{k}{\tau}\cdot\mathfrak{Sin}\,(\tau\cdot(x'+1))\right\}$$

Nach Division der letzteren durch die vorletzte Gleichung ergibt sich als streng gültige Beziehung:

$$\frac{z_{x+1}}{z_x} = \frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_x}$$

$$= e^{-\sigma}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}(\tau\cdot(x-n+1))+\frac{k}{\tau}\cdot\mathfrak{Sin}(\tau\cdot(x-n+1))}{\mathfrak{Cof}(\tau\cdot(x-n))+\frac{k}{\tau}\cdot\mathfrak{Sin}(\tau\cdot(x-n))} \tag{21}$$

Es wird zweckmässig sein, neben dieser genauen Relation eine einfachere, in der Praxis handliche Beziehung abzuleiten, in welcher Exponential- und Hyperbelfunktionen nicht mehr auftreten.

Näherungsformeln.

§ **48.** Zu Approximationswerten für das Verhältnis $\dfrac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_x}$ gelangt man durch Entwicklung der auftretenden Funktionen in Potenzreihen. Unter Benutzung der allbekannten Exponentialreihe (16″) findet man für den *hyperbolischen Cosinus:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Cof}\,x &= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x}+e^{-x}\right)\\ &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\ \textit{in inf.}\end{aligned} \tag{16b}$$

Benutzt man daneben die Entwicklung (16a) in § 44 für $\mathfrak{Sin}\,x$, so verwandelt sich der Bruch in § 47, Gleichung (21), bei Anwendung der dort eingeführten Abkürzungen (a), folgendermassen:

$$\frac{1+\frac{\tau^2\cdot(x'+1)^2}{2!}+\cdots+\frac{k}{\tau}\cdot\left(\tau\cdot(x'+1)+\frac{\tau^3\cdot(x'+1)^3}{3!}+\cdots\right)}{1+\frac{\tau^2\cdot x'^2}{2!}+\frac{\tau^4\cdot x'^4}{4!}+\cdots+\frac{k}{\tau}\cdot\left(\tau\cdot x'+\frac{\tau^3\cdot x'^3}{3!}+\frac{\tau^5\cdot x'^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\lambda}^{0\ldots\infty}\left(\frac{\tau^{2\cdot\lambda}\cdot(x'+1)^{2\cdot\lambda}}{(2\cdot\lambda)!}\cdot\left[1+\frac{k}{2\cdot\lambda+1}\cdot(x'+1)\right]\right)}{\sum\limits_{\lambda}^{0\ldots\infty}\left(\frac{\tau^{2\cdot\lambda}\cdot x'^{2\cdot\lambda}}{(2\cdot\lambda)!}\cdot\left[1+\frac{k\cdot x'}{2\cdot\lambda+1}\right]\right)}$$

Durch Entwicklung in eine Potenzreihe vermittelst des binomischen Lehrsatzes findet man:

$$\frac{1}{\sum\limits_{\lambda}^{0\ldots\infty}\left(\frac{\tau^{2\cdot\lambda}\cdot x'^{2\cdot\lambda}}{(2\cdot\lambda)!}\cdot\left[1+\frac{k\cdot x'}{2\cdot\lambda+1}\right]\right)} = \frac{1}{H(x';k;\tau)}$$

$$= 1-k\cdot x'+k^2\cdot x'^2-k^3\cdot x'^3+k^4\cdot x'^4-k^5\cdot x'^5+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\tau^2\cdot x'^2+\frac{5}{24}\cdot\tau^4\cdot x'^4+\cdots$$

$$+k\cdot\tau^2\cdot x'^3\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{61}{120}\cdot\tau^2\cdot x'^2+\cdots\right)$$

$$-\frac{7}{6}\cdot k^2\cdot\tau^2\cdot x'^4+\frac{3}{2}\cdot k^3\cdot\tau^2\cdot x'^5+\cdots$$

Beachtet man, dass k und τ von gleicher Grössenordnung sind und schreibt man demgemäss die Glieder in der Reihenfolge ihrer Grössenordnung, so ergibt sich:

$$\frac{1}{H(x';k;\tau)} = 1 - k \cdot x' + \left(k^2 - \frac{1}{2} \cdot \tau^2\right) \cdot x'^2$$
$$- k \cdot \left(k^2 - \frac{5}{6} \cdot \tau^2\right) \cdot x'^3 + \left(k^4 - \frac{7}{6} \cdot k^2 \cdot \tau^2 + \frac{5}{24} \cdot \tau^4\right) \cdot x'^4$$
$$- k \cdot \left(k^4 - \frac{3}{2} \cdot k^2 \cdot \tau^2 + \frac{61}{120} \cdot \tau^4\right) \cdot x'^5 + \cdots$$

Der Bruch in § 47, Gleichung (21), ist nun das Produkt aus

$$\frac{1}{H(x';k;\tau)} \text{ und } \left\{1 + k \cdot (x'+1) + \frac{\tau^2 \cdot (x'+1)^2}{2!}\right.$$
$$\left. + \frac{k \cdot \tau^2 \cdot (x'+1)^3}{3!} + \frac{\tau^4 \cdot (x'+1)^4}{4!} + \frac{k \cdot \tau^4 \cdot (x'+1)^5}{5!} + \cdots\right\},$$

und dieses Produkt, nach der Grössenordnung der Glieder entwickelt, ergibt:

$$1 + k + \left\{\frac{1}{2} \cdot \tau^2 + x' \cdot (\tau^2 - k^2)\right\}$$
$$+ \left\{\frac{1}{6} \cdot k \cdot \tau^2 - x'^2 \cdot k \cdot (\tau^2 - k^2)\right\}$$
$$+ \left\{\frac{\tau^4}{24} + k^2 \cdot x'^3 \cdot (\tau^2 - k^2) - \frac{1}{6} \cdot \tau^2 \cdot (\tau^2 - k^2) \cdot x' \cdot (2x'^2 - 1)\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (21')$$

Diese letztere Reihe, mit $e^{-\sigma}$ multipliziert, liefert den Wert des Verhältnisses $\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}}$. Ersetzt man noch $e^{-\sigma}$ durch die bekannte Exponentialreihe (16″), so wird schliesslich:

$$\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}} = \left(1 - \sigma + \frac{\sigma^2}{2!} - \frac{\sigma^3}{3!} + - \cdots\right) \cdot \left(1 + k + \frac{1}{2} \cdot \tau^2\right.$$
$$+ x' \cdot (\tau^2 - k^2) + \frac{1}{6} \cdot k \cdot \tau^2 - k \cdot x'^2 \cdot (\tau^2 - k^2)$$
$$\left. + \frac{\tau^4}{24} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) \qquad (21a)$$

Endlich kann man noch das Produkt aus diesen zwei Reihen durch eine einzige Reihe ersetzen:

$$\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}} = 1 + k - \sigma + \left\{\frac{1}{2} \cdot \tau^2 + x' \cdot (\tau^2 - k^2) - \sigma \cdot k + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2\right\}$$
$$+ \left\{\frac{k}{6} \cdot \tau^2 - k \cdot (\tau^2 - k^2) \cdot x'^2 - \frac{\sigma}{2} \cdot [\tau^2 + 2 \cdot x' \cdot (\tau^2 - k^2)]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \cdot k \cdot \sigma^2 - \frac{1}{6} \cdot \sigma^3\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (21b)$$

Die Formeln (21a) und (21b) gestatten es nun, den durch die Gleichung (21) in § 47 genau ausgedrückten Zusammenhang in mannigfacher Weise durch Näherungen zu ersetzen, wobei an Stelle von x' sein ursprünglicher Wert $x - n$ zu substituieren ist.

§ 49. Die drei Werte σ, τ und $k = \sigma - \overline{\mu}^{aa}_{n} - \nu_n$ sind von derselben Grössenordnung. Vernachlässigt man die Glieder höherer als erster Ordnung, so erreicht man die erste Approximation an den tatsächlichen Verlauf. Da $k - \sigma = -\left(\overline{\mu}^{aa}_{n} + \nu_n\right)$, so wird:

$$\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}} = 1 - \left(\mu^{aa}_{n} + \nu_n\right) = c \qquad (22')$$

Die entsprechende Aktivitätsordnung lautet dann einfach:

$$\begin{aligned}
\overline{l}^{aa}_{n} &= z_n \\
\overline{l}^{aa}_{n+1} &= c \cdot \overline{l}^{aa}_{n} \\
\overline{l}^{aa}_{n+2} &= c \cdot \overline{l}^{aa}_{n+1} &&= c^2 \cdot \overline{l}^{aa}_{n} \\
\overline{l}^{aa}_{n+3} &= c \cdot \overline{l}^{aa}_{n+2} &&= c^3 \cdot \overline{l}^{aa}_{n} \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\overline{l}^{aa}_{n+\lambda} &= c \cdot \overline{l}^{aa}_{n+\lambda-1} &&= c^\lambda \cdot \overline{l}^{aa}_{n} \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die in Jahresintervallen aufeinanderfolgenden Zahlen $\overline{l}^{aa}_{n+\lambda}$ ($\lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$) bilden *eine geometrische Progression.* Mit andern Worten: die Anzahlen $\overline{l}^{aa}_{n+\lambda}$ der Aktivitätsordnung gehorchen dem vielgenannten „Gesetz der Bevölkerungsvermehrung“ (oder -verminderung) welches aussagt, dass die Einwohnerzahl einer (von Ein- und Auswanderungen freien) Bevölkerung nach geometrischer Progression zu- oder abnehme, ein „Gesetz“, das nach *Leonhard Euler* viele Statistiker ihren Berechnungen zugrunde gelegt haben. Dieses „Gesetz“ stellt aber bekanntlich, wie auch in unserer Formel, nur eine Annäherung an den tatsächlichen Verlauf dar und behält nur für kleine Zeiträume seine approximative Gültigkeit.

Etwas genauer ist die Formel

$$\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}} = (1 - \sigma) \cdot (1 + k) \qquad (22)$$

Sie liefert zwar auch für die Anzahlen $\overline{l}^{aa}_{x}$ der Aktiven eine geometrische Progression, solange man σ, und folglich auch k, konstanten Wert beilegt, da sich die entsprechende Aktivitätsordnung folgendermassen gestaltet:

$$l_n^{\overline{aa}} = z_n$$

$$l_{n+1}^{\overline{aa}} = l_n^{\overline{aa}} \cdot \left\{(1-\sigma)\cdot(1+k)\right\}$$

$$l_{n+2}^{\overline{aa}} = l_{n+1}^{\overline{aa}} \cdot \left\{(1-\sigma)\cdot(1+k)\right\} = l_n^{\overline{aa}} \cdot \left\{(1-\sigma)\cdot(1+k)\right\}^2$$

$$l_{n+3}^{\overline{aa}} = l_{n+2}^{\overline{aa}} \cdot \left\{(1-\sigma)\cdot(1+k)\right\} = l_n^{\overline{aa}} \cdot \left\{(1-\sigma)\cdot(1+k)\right\}^3$$

. . . .

. . . .

Der Hauptvorzug der Formel (22), im Vergleich mit der Formel (22′), besteht aber, abgesehen von der grösseren Genauigkeit, in folgendem Umstande: Die Grösse $c = 1 - \mu_n^{\overline{aa}} - \nu_n$ ist eine absolute Konstante; sie gestattet es also nicht, den im Laufe der Jahre sich tatsächlich einstellenden Veränderungen von Sterblichkeits-, Invalidisierungs- und Reaktivierungsintensität Rechnung zu tragen. Dies gestattet nun das in (22) auftretende Produkt $(1-\sigma)\cdot(1+k)$, wobei, nach den Gleichungen (1) und (3) in § 38:

$$\sigma = \frac{1}{2}\cdot\left(\mu_x^{\overline{aa}} + \mu_x^{\overline{ii}} + \nu_x + \varrho_x\right) \text{ und } k = \sigma - \mu_n^{\overline{aa}} - \nu_n.$$

Nach der in § 38 aufgestellten Grundhypothese sind nämlich die vier Intensitätsfunktionen $\mu_x^{\overline{aa}}$, $\mu_x^{\overline{ii}}$, ν_x und ϱ_x, *während der Dauer eines Jahres* konstant. Man kann ihnen aber sehr wohl von Jahr zu Jahr wechselnde Werte beilegen und so dem tatsächlichen Verlauf möglichst nahe kommen. Für die jüngeren Alter, bei denen die Schwankungen der Intensitätsfunktionen nur gering sind, wird man diese Konstanz, ohne erheblichen Fehler, auf einen längeren Zeitraum ausdehnen können und das Produkt $(1-\sigma)\cdot(1+k)$ nur für Zeitabschnitte von z. B. *fünf* Jahren neu berechnen. Die entsprechende Aktivitätsordnung setzt sich dann aus einer Serie von geometrischen Progressionen zusammen.

§ **50.** Von den mannigfachen Näherungsformeln, die aus den Gleichungen (21a) und (21b) gezogen werden können, seien hier noch einige erwähnt; zunächst die folgende, die alle Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt:

$$\frac{l_{x+1}^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = (1-\sigma)\cdot(1+k) + \frac{1}{2}\cdot(\tau^2+\sigma^2) + (x-n)\cdot(\tau^2-k^2) \qquad (23)$$

Die dabei erzielte Genauigkeit ist eine grosse, denn die weggelassenen Glieder sind von der Grössenordnung einiger Hundertmillionstel, solange die Intensitätsfunktionen einige Tausendstel betragen, wie es bei jüngeren Altern tatsächlich zutrifft; selbst wenn Sterblichkeits- und Invalidisierungsintensität auf 0,1 anwachsen, übersteigt der Gesamtbetrag der vernachlässigten Glieder einige Tausendstel nicht.

Setzt man, zur Abkürzung,

$$a = (1-\sigma)\cdot(1+k) + \frac{1}{2}\cdot(\tau^2+\sigma^2),$$

so gestaltet sich die entsprechende Aktivitätsordnung wie folgt:

$$l_n^{\overline{aa}} = z_n$$

$$l_{n+1}^{\overline{aa}} = l_n^{\overline{aa}} \cdot (a + \tau^2 - k^2)$$

$$l_{n+2}^{\overline{aa}} = l_{n+1}^{\overline{aa}} \cdot (a + 2\cdot[\tau^2 - k^2])$$

$$= l_n^{\overline{aa}} \cdot (a + \tau^2 - k^2)\cdot(a + 2\cdot[\tau^2 - k^2])$$

$$l_{n+3}^{\overline{aa}} = l_{n+2}^{\overline{aa}} \cdot (a + 3\cdot[\tau^2 - k^2])$$

$$= l_n^{\overline{aa}} \cdot (a+\tau^2-k^2)\cdot(a+2\cdot[\tau^2-k^2])\cdot(a+3\cdot[\tau^2-k^2])$$

. . . .

. . . .

$$l_{n+\lambda}^{\overline{aa}} = l_{n+\lambda-1}^{\overline{aa}} \cdot (a + \lambda\cdot[\tau^2 - k^2])$$

. . . .

Für die Grösse a gelten dieselben Überlegungen, die am Schlusse von § 49 bezüglich des Produktes $(1-\sigma)\cdot(1+k)$ gemacht wurden: man kann auch a für längere Zeiträume als konstant ansehen und seinen Wert nur für Zeitintervalle von z. B. je fünf Jahren neu berechnen.

Bemerkenswert ist ferner die Formel:

$$\frac{l_{x+1}^{\overline{aa}}}{l_x^{\overline{aa}}} = (1-\sigma)\cdot(1+k) + \frac{1}{2}\cdot(\tau^2+\sigma^2) = \beta. \qquad (22'')$$

Sie liefert nämlich eine Aktivitätsordnung, deren Anzahlen $l_x^{\overline{aa}}$ eine Serie von geometrischen Progressionen bilden, ganz wie die Formel (22), unterscheidet sich demnach von letzterer nur durch die grössere Genauigkeit (vergl. den Schluss von § 49). Die entsprechende Ausscheideordnung der Aktiven lautet:

$$\overline{l}^{aa}_{n} = z_n$$

$$\overline{l}^{aa}_{n+1} = \beta \cdot z_n$$

$$\overline{l}^{aa}_{n+2} = \beta^2 \cdot z_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\overline{l}^{aa}_{n+r} = \beta^r \cdot z_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\overline{l}^{aa}_{x} = \beta^{x-n} \cdot z_n$$

Sehr grosse Approximation an die Wirklichkeit wird durch die Beziehung

$$\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_{x}} = \left(1 - \sigma + \frac{1}{2}\cdot\sigma^2 - \frac{1}{6}\cdot\sigma^3\right)\cdot\left(1 + k + \frac{\tau^2}{2}\cdot\left(1+\frac{k}{3}\right) + (x-n)\cdot[\tau^2 - k^2]\right) \tag{24}$$

geliefert. Sie berücksichtigt teilweise die Glieder bis zur fünften Ordnung, und ihre Genauigkeit wird noch durch den Umstand verschärft, dass der erste Faktor zu klein, der zweite zu gross ist.

Bemerkung.

§ **51.** Durch die Fixierung des Anfangszustandes, den wir durch die Gleichungen (11) in § 40 definiert haben, ist die Symmetrie in bezug auf $\overline{l}^{aa}_x$ und $\overline{l}^{ii}_x$ aufgehoben, da $\overline{l}^{ii}_n = 0$ und $\overline{l}^{aa}_n \neq 0$ angenommen wurde. Bis zu jener Stelle ergaben sich die auf den Bestand der Invaliden bezüglichen Formeln aus den entsprechenden für den Bestand der Aktiven einfach durch Verwandlung der Indices $\overline{aa}$ in $\overline{ii}$ einerseits, von ν_x in ϱ_x anderseits, und *vice versa*. Aber von § 41 ab ist dies nicht mehr der Fall. Es wirft sich nun die Frage auf, wie sich die Beziehungen gestalten, wenn man die Symmetrie des Vorganges bis zum Schlusse wahrt; diese Frage wollen wir jetzt kurz beantworten.

Zu diesem Zweck definieren wir den Anfangszustand so, dass weder $\overline{l}^{aa}_n$ noch $\overline{l}^{ii}_n$ verschwindet. Es bedeutet dann n nicht mehr das niedrigste Alter, bei dem die Möglichkeit der Erwerbsunfähigkeit überhaupt erst beginnt, sondern irgendeinen späteren Zeitpunkt. An Stelle der Gleichungen (11) von § 40 mögen demnach die folgenden treten:

$$\overline{l}^{aa}_n = z_n, \qquad \overline{l}^{ii}_n = \zeta_n, \tag{24'}$$

und z_n sowohl als ζ_n *positive* ganze Zahlen vorstellen.

Durch einen Gedankengang, der dem in § 41 entwickelten ganz analog ist, findet man nach leichten Rechnungen, die wir der Kürze halber hier unterdrücken, für die Anzahl der Aktiven und der Invaliden des Alters x folgende Ausdrücke, worin zur Abkürzung

x' an Stelle von $x - n$ steht:

$$z_x = \overline{l}^{aa}_x = \frac{z_n}{s_1 - s_2}\cdot\left\{\left(s_1 + \mu^{\overline{aa}}_n + \nu_n\right)\cdot e^{s_2\cdot x'} - \left(s_2 + \mu^{\overline{aa}}_n + \nu_n\right)\cdot e^{s_1\cdot x'}\right\} - \frac{\zeta_n\cdot\varrho_n}{s_1 - s_2}\cdot\left(e^{s_2\cdot x'} - e^{s_1\cdot x'}\right), \tag{25}$$

und entsprechend:

$$\zeta_x = \overline{l}^{ii}_x = \frac{\zeta_n}{s_1 - s_2}\cdot\left\{\left(s_1 + \mu^{\overline{ii}}_n + \varrho_n\right)\cdot e^{s_2\cdot x'} - \left(s_2 + \mu^{\overline{ii}}_n + \varrho_n\right)\cdot e^{s_1\cdot x'}\right\} - \frac{z_n\cdot\nu_n}{s_1 - s_2}\cdot\left(e^{s_2\cdot x'} - e^{s_1\cdot x'}\right) \tag{26}$$

Diese Ausdrücke offenbaren ganz deutlich die Symmetrie des Aufbaues, denn durch Verwandlung der Indices $\overline{aa}$ in $\overline{ii}$ einerseits, von ϱ in ν anderseits, und *vice versa*, ändern sich weder s_1 noch s_2, was aus ihrer Definition sofort einleuchtet. Erinnert man sich, dass $s_1 = -\sigma + \tau$ und $s_2 = -\sigma - \tau$ und führt man, wie in § 42, die Hyperbelfunktionen ein, so wird man die obigen Ausdrücke leicht in folgende umwandeln:

$$z_x = \overline{l}^{aa}_x = z_n\cdot e^{-\sigma\cdot x'}\cdot\left\{\mathfrak{Cof}\,(\tau\cdot x') + \left(\frac{\zeta_n\cdot\varrho_n}{z_n} + \sigma - \mu^{\overline{aa}}_n - \nu_n\right)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,(\tau\cdot x')}{\tau}\right\} \tag{25'}$$

und entsprechend:

$$\zeta_x = \overline{l}^{ii}_x = \zeta_n\cdot e^{-\sigma\cdot x'}\cdot\left\{\mathfrak{Cof}\,(\tau\cdot x') + \left(\frac{z_n\cdot\nu_n}{\zeta_n} + \sigma - \mu^{\overline{ii}}_n - \varrho_n\right)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,(\tau\cdot x')}{\tau}\right\} \tag{26'}$$

oder auch:

$$\zeta_x = z_n\cdot e^{-\sigma\cdot x'}\cdot\left\{\frac{\zeta_n}{z_n}\cdot\mathfrak{Cof}\,(\tau\cdot x') + \left(\nu_n + \frac{\zeta_n}{z_n}\cdot\left[\sigma - \mu^{\overline{ii}}_n - \varrho_n\right]\right)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,(\tau\cdot x')}{\tau}\right\}$$

Setzt man speziell $\zeta_n = 0$, so gehen diese Formeln in die früher direkt abgeleiteten Ausdrücke (15a) und (17a) über, wie es auch *a priori* sein muss.

§ 52. Sucht man endlich den Ausdruck für das Verhältnis $\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}}$, so findet man vermöge obiger Gleichungen, wenn man, zur Abkürzung,

$$\sigma - \overline{\mu^{aa}_n} - \nu_n = k \quad \text{und} \quad \frac{\zeta_n \cdot \varrho_n}{z_n} + k = k' \tag{27}$$

setzt, für das betreffende Verhältnis folgende Formel:

$$\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}} = e^{-\sigma} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}[\tau \cdot (x'+1)] + k' \cdot \frac{\mathfrak{Sin}[\tau \cdot (x'+1)]}{\tau}}{\mathfrak{Cos}(\tau \cdot x') + k' \cdot \frac{\mathfrak{Sin}(\tau \cdot x')}{\tau}} \tag{28}$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich aber von dem in § 47 Gleichung (21) figurierenden nur dadurch, dass k' an Stelle von k steht.

Nun unterscheiden sich k' und k nur durch das Glied $\frac{\zeta_n \cdot \varrho_n}{z_n}$, sind infolgedessen von derselben Grössenordnung. Als Resultat der Untersuchung ergibt sich hiernach der Satz: *Die Formel* (21) *in § 47 stellt auch im allgemeinen Fall,* d. h. bei beliebigen Anfangsbedingungen, *den Zusammenhang zwischen* $\overline{l^{aa}_{x+1}}$ *und* $\overline{l^{aa}_x}$ *dar,* vorausgesetzt nur, dass der Konstanten k der richtige Wert erteilt wird. Die in den §§ 48—50 entwickelten Näherungsformeln behalten also ihre Gültigkeit, wenn k durch $k' = k + \frac{\zeta_n \cdot \varrho_n}{z_n}$ ersetzt wird. Die einfachsten seien hier zusammengestellt:

$$\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}} = 1 - \overline{\mu^{aa}_n} - \nu_n + \frac{\zeta_n \cdot \varrho_n}{z_n},$$

oder genauer:

$$\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}} = (1 - \sigma) \cdot \left(1 + \sigma - \overline{\mu^{aa}_n} - \nu_n + \frac{\zeta_n \cdot \varrho_n}{z_n}\right), \tag{29}$$

wobei immer: $\sigma = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{\mu^{aa}_x} + \overline{\mu^{ii}_x} + \nu_x + \varrho_x\right)$

Entsprechend lauten die Näherungsformeln für den Bestand der Invaliden:

$$\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}} = 1 - \overline{\mu^{ii}_n} - \varrho_n + \frac{z_n \cdot \nu_n}{\zeta_n}$$

oder, genauer,

$$\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}} = (1 - \sigma) \cdot \left(1 + \sigma - \overline{\mu^{ii}_n} - \varrho_n + \frac{z_n \cdot \nu_n}{\zeta_n}\right) \tag{30}$$

Am empfehlenswertesten scheinen die folgenden, der Beziehung (23) in § 50 entsprechenden Formeln: setzt man, unter Berücksichtigung von (27), zur Abkürzung

$$b' = (1 - \sigma) \cdot (1 + k') + \frac{1}{2} \cdot (\sigma^2 + \tau^2) \tag{30'}$$

wobei, wie immer, die Bedeutung von σ und τ aus den Gleichungen (3) und (7) in § 38 zu entnehmen ist, so wird:

$$\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}} = b' + (x - n) \cdot (\tau^2 - k'^2) \tag{31}$$

Entsprechend sei:

$$\varkappa' = \sigma - \overline{\mu^{ii}_n} - \varrho_n + \frac{z_n \cdot \nu_n}{\zeta_n} \tag{27'}$$

$$\beta' = (1 - \sigma) \cdot (1 + \varkappa') + \frac{1}{2} \cdot (\sigma^2 + \tau^2) \tag{30''}$$

Dann wird:

$$\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}} = \beta' + (x - n) \cdot (\tau^2 - \varkappa'^2) \tag{32}$$

§ 53. Ich habe es vermieden, das Verhältnis $\frac{\overline{l^{aa}_{x+1}}}{\overline{l^{aa}_x}}$ mit $\overline{p^{aa}_x}$, oder den Bruch $\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}}$ mit $\overline{p^{ii}_x}$ zu bezeichnen. Konsequenterweise bedeutet nämlich $\overline{p^{ii}_x}$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige dienstunfähige Person das Alter $x + 1$ im Zustande der Invalidität erreichen werde (gleichgültig übrigens, ob diese Person im Laufe des Jahres einmal oder mehrmals, infolge von Genesung, vorübergehend in die Reihen der Aktiven eintritt). Diese Wahrscheinlichkeit wäre gleich dem Quotienten $\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}}$ nur dann, wenn der unter Beobachtung stehende Bestand der $\overline{l^{ii}_x}$ Versicherten keinen Zuwachs an Mitgliedern erhielte. Im vorliegenden Fall trifft dies aber nicht zu, so dass der Bruch $\frac{\overline{l^{ii}_{x+1}}}{\overline{l^{ii}_x}}$ die formalen Bedingungen einer Wahrscheinlichkeitsgrösse nicht erfüllt (vergl. die „Bemerkung“ in § 23). In der Tat befinden sich, am Ende des betreffenden Altersjahres, unter den $\overline{l}^{ii}_{x+1}$ Invaliden solche, die erst im Verlaufe der fraglichen Zeitspanne aus dem Bestande der Aktiven herüberkamen und demnach unter den $\overline{l}^{ii}_x$ Invaliden des Jahresanfanges nicht mitgezählt sind. Infolgedessen beziehen sich Zähler und Nenner des Bruches $\frac{\overline{l}^{ii}_{x+1}}{\overline{l}^{ii}_x}$ nicht immer auf dieselbe Gesamtheit, denn die Menge, die im Zähler $\overline{l}^{ii}_{x+1}$ figuriert, ist nicht notwendigerweise als Teilmenge in der durch den Nenner $\overline{l}^{ii}_x$ abgezählten Menge enthalten. Ähnliches gilt für den Quotienten $\frac{\overline{l}^{aa}_{x+1}}{\overline{l}^{aa}_x}$.

Die richtige Bedeutung von $\overline{p}^{ii}_x$ und $\overline{p}^{aa}_x$ erhellt aus den Relationen:

$$\overline{l}^{aa}_{x+1} = \overline{l}^{aa}_x \cdot \overline{p}^{aa}_x + \overline{l}^{ii}_x \cdot \overline{p}^{ia}_x \tag{33}$$

$$\overline{l}^{ii}_{x+1} = \overline{l}^{ii}_x \cdot \overline{p}^{ii}_x + \overline{l}^{aa}_x \cdot \overline{p}^{ai}_x \tag{34}$$

Dabei hat $\overline{p}^{ai}_x$ die in § 36 angegebene Bedeutung und kann in erster Annäherung durch den dort unter (t) angeführten Ausdruck ersetzt werden. $\overline{p}^{ia}_x$ ist, wie unmittelbar einleuchtet, die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige, dienstunfähige Person das Alter $x+1$, aber im Zustande der Aktivität, erreichen werde.

Hiermit ist der erste Teil meiner Arbeit zu Ende geführt: das System der simultanen Differentialgleichungen (35) und (36) ist vollständig integriert für den Fall, dass die vier Intensitätsfunktionen

$$\overline{\mu}^{aa}_x, \; \overline{\mu}^{ii}_x, \; \varrho_x \text{ und } \nu_x$$

während der Dauer eines Jahres konstant bleiben, und die entsprechenden Aktivitäts- und Invaliditätsordnungen sind aufgestellt.

In einem zweiten Teil soll jene Hypothese von der Konstanz der Intensitätsfunktionen fallen gelassen und dazu übergegangen werden, auf Grund der gefundenen Beziehungen Formeln zur Berechnung von Rentenbarwerten und Prämien abzuleiten.

Le taux de l'intérêt dans l'assurance sur la vie en Suisse[1].

Par M. **S. Dumas**, Docteur ès Sciences.

Nous possédons un grand nombre de travaux importants sur la mortalité; les compagnies d'assurances sur la vie ne reculent devant aucuns frais ni aucunes peines pour se procurer de bonnes tables de mortalité et pour étudier les phénomènes qui influent sur la durée de la vie humaine. En revanche, la littérature ne nous fournit guère d'études d'ensemble sur le taux de l'intérêt; les indications relatives à ce sujet sont disséminées dans une foule de publications et par cela même peu accessibles. La difficulté de rien prévoir en cette matière ne doit pourtant pas nous empêcher de jeter un coup d'œil sur le passé et de nous efforcer d'en tirer quelques enseignements pour l'avenir. C'est pourquoi nous avons réuni les quelques données que nous avons pu nous procurer sur le produit des placements effectués par les sociétés suisses d'assurances sur la vie.

Nous devons dès maintenant faire bien remarquer que nos tableaux ne donnent qu'une idée approximative du taux de l'intérêt en Suisse. Indépendamment du fait que dans un pays et un moment donnés le taux varie dans de très larges limites suivant la nature et les conditions des placements, il ne faut pas oublier que les sociétés d'assurances possèdent des immeubles et des titres dont l'acquisition remonte à plusieurs années. Le taux qu'elles réalisent est ainsi une sorte de moyenne dans le temps; comme il est influencé par les taux antérieurs, il oscille relativement lentement.

Notre tableau 1 montre quels taux d'intérêt les sociétés suisses d'assurances sur la vie ont retiré de leurs placements. Nous en avons pris la plus grande partie des éléments dans les comptes rendus des compagnies; nous ne pouvons donc pas nous en servir à

[1]) Un grand nombre de chiffres publiés dans cette étude sont tirés des rapports du Bureau fédéral des Assurances; quelques-uns relatifs à la Société suisse d'assurances générales sur la vie humaine et à la Patria ont été publiés dans les comptes rendus de ces sociétés; enfin MM. Ney, Riem, Rubli et Verdier ont eu la grande obligeance de nous communiquer les résultats des compagnies dont ils sont actuaires; nous leur en témoignons ici notre sincère reconnaissance.