Quelques considérations sur le calcul des index généraux des prix[1].

Par **L. Hersch**, professeur de statistique à l'Université de Genève.

§ 1. — Nous appellerons *index particuliers* les index des prix des *articles individuels* compris par un système *d'index numbers* de prix. Par *index général,* nous désignons la moyenne des index particuliers, qui résume ainsi, en un chiffre synthétique, le mouvement des prix d'un certain nombre d'articles individuels[2]). Sous le terme d'index général, nous comprenons donc tout aussi bien l'index synthétique des prix de plusieurs articles constituant un groupe commun (p. ex. denrées agricoles, produits minéraux, textiles ou autres) que celui qui résume le mouvement des prix de tous les articles compris par le système des *index numbers.*

Le grand problème qui se pose au sujet des index généraux et qui a tout particulièrement attiré l'attention des statisticiens est avant tout celui de la pondération: ces index doivent-ils être des moyennes pondérées et, si oui, comment, d'après quel critère établir le poids des divers articles dont les prix sont résumés par l'index général? — Notre tâche, dans la présente étude, est autre; elle est aussi plus restreinte et plus modeste. Sans prétendre avoir le moins du monde épuisé le sujet, nous voulons seulement émettre quelques considérations sur le côté exclusivement *mathématique,* voire simplement *arithmétique,* du calcul des index généraux des prix. Nous envisagerons donc les index pondérés et non-pondérés comme diverses modalités de calcul possibles sans nous préoccuper de la préférence à donner à l'une ou à l'autre de ces modalités.

Du point de vue du calcul, on distingue généralement trois espèces d'index généraux: index arithmétiques non-pondérés, index arithmétiques pondérés et index géométriques. Mais, au fond, on ne voit pas pourquoi seuls les index arithmétiques puissent présenter les deux modalités; index pondérés et index non-pondérés. *Les moyennes en général et les index des prix en particulier peuvent, en réalité, être pondérés ou non qu'ils soient arithmétiques ou géométriques.* Nous distinguerons donc *quatre* espèces d'index généraux: index arithmétiques non-pondérés, index arithmétiques pondérés, index géométriques non-pondérés et index géométriques pondérés.

On voudra bien nous excuser si, pour la clarté de nos déductions, nous commençons par l'exposé de quelques notions élémentaires qui sont certainement connus du lecteur.

Chapitre premier.

Du calcul fondamental des index généraux.

A. Index arithmétiques non-pondérés.

§ 2. — Supposons que nous avons un groupe G de trois articles (A_1, A_2, A_3), dont les prix ont été respectivement comme suit:

Années	Prix (francs)			Somme des prix fr.	Index général (?)
	A_1 (la livre)	A_2 (le litre)	A_3 (le mètre)		
1913	5.00	2.00	0.40	7.40	100
1920	4.80	3.60	1.50	9.90	134

Supposons qu'il nous faut établir l'index général des prix de ce groupe pour 1920 en prenant les prix de 1913 comme base. Peut-on, pour obtenir cet index général, additionner les prix de ces articles pour chacune des années en question, comme nous venons de le faire, mettre la somme obtenue pour 1913 égale à 100 et exprimer la somme des prix de 1920 par un chiffre proportionnel (134)? — Et, en général, désignant les prix d'une série d'articles $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$, à une date de base D_a, respectivement par a_1, a_2, $a_3, \dots a_n$ et, à une autre date D_b, par b_1, b_2, b_3, $\dots b_n$, peut-on dire que l'index général (I_b) à la date D_b est égal (exprimé en %%):

$$I_b = \frac{\sum b}{\sum a}\,?$$

[1]) Le présent article forme une partie indépendante d'un cours consacré à la *statistique des prix* et professé à l'Université de Genève pendant le semestre d'hiver 1922/23. Sous sa forme actuelle (pourtant sauf l'annexe II), l'article a été achevé en mars 1923 alors que l'auteur n'a pas encore eu connaissance de l'ouvrage capital *The Making of Index Numbers* que le professeur Irving Fisher vient de publier en Amérique. Nous croyons cependant que, même après l'ouvrage de Fisher, la présente étude n'a pas perdu toute sa valeur, surtout pour ceux des lecteurs qui ne possèdent pas l'anglais.

[2]) Dans certains tableaux *d'index numbers,* l'index général n'est pas présenté comme moyenne des index particuliers, mais comme leur somme. Au fond, cependant, la somme doit être considérée ici comme forme inachevée de la même idée de moyenne.

Ce serait *parfaitement erroné.*

D'abord, avec un pareil procédé de calcul, un changement de prix qui affecterait les divers articles dans une proportion égale influencerait la somme des prix et, par suite, aussi l'index général dans des proportions inégales. Ainsi, dans notre exemple, si, de 1913 à 1920, A_1 renchérissait de 100 % (les prix des autres articles restant les mêmes), l'index général calculé de la façon indiquée monterait de 68 % (modalité I du petit tableau ci-dessous) tandis que si A_3 augmentait de 100 %, l'index général marquerait une hausse de 5 % seulement (modalité II du même tableau).

	Prix (francs)			Somme des prix (fr.)	Index général (?)
	A_1	A_2	A_3		
1913	5.00	2.00	0.40	7.40	100
1920 I	10.00	2.00	0.40	12.40	168
1920 II	5.00	2.00	0.80	7.80	105
1920 III	4.60	2.00	0.80	7.40	100

En général, si, d'une date à l'autre, le prix d'un article A_1 passait de a_1 à $\varkappa a_1$ ($\varkappa$ étant une valeur positive quelconque $\gtrless 1$) tandis que les prix des autres articles resteraient les mêmes, la somme des prix deviendrait à cette seconde date $= \varkappa a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$; si, à la place de A_1, un autre article, p. ex. A_2 (dont le prix $a_2 \mp a_1$), changeait de prix dans la même proportion $\varkappa$, passant ainsi de a_2 à $\varkappa a_2$, la somme des prix deviendrait $= a_1 + \varkappa a_2 + a_3 + \ldots + a_n$; or, puisque $a_1 \mp a_2$, il s'ensuit que

$$\varkappa a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \mp a_1 + \varkappa a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

c'est-à-dire *un changement de prix de proportion égale, mais portant sur des articles de prix différents, aboutirait à des sommes de prix différentes et, par suite, aussi à des index généraux différents si les index étaient établis d'après ces sommes.*

De même, des changements de prix proportionnellement très inégaux, mais portant sur des articles différents pourraient influer sur la somme des prix, et sur l'index général, dans une mesure égale. Ainsi, dans notre exemple (modalité III du précédent tableau), si le prix de A_1 changeait de 8 % (passant de 5. — fr. à 4. 60) et celui de A_3 de 100 % (passant de 0. 40 à 0. 80 fr.), l'index général en serait affecté exactement dans la même mesure de telle sorte que, si ces changements se faisaient en sens opposés (A_1 baissant de 8 % et A_3 montant de 100 % ou vice versa), l'index général demeurerait inchangé.

Notons bien que cette disproportion n'a rien de commun avec l'assimilation, par les index non-pondérés, des articles de grande importance économique à ceux d'importance restreinte: là, on assimile un même pourcentage de hausse ou de baisse portant sur des articles d'importance différente tandis qu'ici on va jusqu'à assimiler des pourcentages très différents.

D'un autre côté, un pareil index dépendrait complètement de notre *arbitraire.* Car il suffirait de changer *l'unité de mesure* de tel ou tel article pour changer, du même coup, la somme des prix et, ce qui va avec, l'index général. — En effet, conservant aux lettres la même signification et en prenant toujours la date D_a pour base, l'index général à la date D_b serait, d'après ce mode de calcul,

$$I_b = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n};$$

supposons maintenant que les prix ne changent pas, mais que, au lieu d'exprimer le prix d'un article donné A_1 dans des unités de mesure données (livres, kilos ou autres), nous l'exprimons en des unités $\varkappa$ fois plus grandes ($\varkappa$ pouvant être une valeur positive quelconque $\gtrless 1$); le prix de A_1 par unité nouvelle sera $\varkappa$ fois plus élevé que par unité ancienne, il sera donc $\varkappa a_1$ à la date D_a et $\varkappa b_1$ à la date D_b tandis que les prix des autres articles, ayant conservé leurs précédentes unités de mesures, demeureront respectivement a_2, a_3, a_4, etc., b_2, b_3, $b_4, \ldots b_n$. L'index général, calculé d'après les prix des articles par unité de mesure, serait dès lors

$$I_b = \frac{\varkappa b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{\varkappa a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} \mp \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n},$$

c'est-à-dire *l'index ainsi calculé changerait avec les unités de mesure,* qui, à leur tour, dépendent simplement de notre manière de voir.

A titre d'illustration, reprenons notre exemple du groupe d'articles G et supposons qu'au lieu d'exprimer le prix de A_1 en livres, nous l'exprimons en kilos, les autres articles conservant leurs unités de mesure (litres, mètres). Les prix, supposons encore, sont toujours ceux indiqués dans notre premier petit tableau. Quel serait, dans ce cas, l'index général que l'on obtiendrait?

Années	Prix (francs)			Somme des prix (fr.)	Index général (?)
	A_1 (le kilo)	A_2 (le litre)	A_3 (le mètre)		
1913	10. 00	2. 00	0. 40	12. 40	100
1920	9. 60	3. 60	1. 50	14. 70	119

Tous les prix sont exactement les mêmes que dans notre premier tableau; seule l'unité de mesure adoptée pour A_1 a changé et, rien que pour cela, l'index, qui marquait d'abord un renchérissement de 34 %, en accuse maintenant un de 19 % seulement. Si, au lieu d'un kilo, on prenait une tonne, un gramme, etc., on obtiendrait, pour les mêmes prix, toute une série d'index différents. *Un index ainsi obtenu ne caractérise donc nullement la réalité.*

§ 3. — Pour obtenir l'index général cherché, il n'y a donc pas d'autre procédé que celui prévu par notre définition même des index généraux (§ 1): il faut prendre *la moyenne des index particuliers;* et puisqu'il s'agit d'un index arithmétique non-pondéré, il faut prendre la moyenne arithmétique non-pondérée des index particuliers. — Si nous désignons les index particuliers des divers articles, à la date D_b, respectivement par

$$\beta_1\left(=\frac{b_1}{a_1}\right),\ \beta_2\left(=\frac{b_2}{a_2}\right),\ \beta_3\left(=\frac{b_3}{a_3}\right),\dots\beta_n\left(=\frac{b_n}{a_n}\right),$$

nous pouvons donc écrire (n étant le nombre des articles) que l'index arithméthique non-pondéré, à la date D_b, est égal:

$$I_b=\frac{\Sigma\beta}{n}. \tag{1}$$

Pour notre exemple du groupe d'articles G (dont les prix sont donnés au début du § 2), nous trouvons ainsi les valeurs suivantes:

Années	Index particuliers A_1	Index particuliers A_2	Index particuliers A_3	Somme des index	Index général
1913	100	100	100	300	100
1920	96	180	375	651	217

C'est le *seul* procédé correct pour établir un index général arithmétique non-pondéré.

B. Index arithmétiques pondérés.

§ 4. — Reprenons l'exemple du groupe d'articles G et admettons qu'à un moment donné (en 1913), les poids des trois articles A_1, A_2 et A_3 étaient respectivement 3, 2 et 5 tandis que leurs prix, par unité de mesure, étaient de 5. —, 2. — et 0. 40 francs.

Ces coefficients de poids 3, 2 et 5 ne signifient pas que si l'on prend 3 unités de A_1, il faut en prendre 2 de A_2 et 5 de A_3, car les unités des divers articles sont souvent hétérogènes et toujours conventionnelles. Par ces coefficients, on veut dire que, dans l'économie nationale (s'il s'agit de prix de gros) ou dans l'économie domestique des classes populaires (s'il s'agit de prix de détail) et d'après les données de l'observation (recensement des entreprises, budgets de familles, etc.) effectuée à un moment donné, les *valeurs globales* des articles envisagés se rapportent comme 3:2:5.

Admettons donc qu'il s'agit d'index de prix de gros et que les valeurs globales des trois articles considérés étaient, en 1913, respectivement de 6.000.000, de 4.000.000 et de 10.000.000 de francs; le nombre d'unités pour lequel chaque article figure dans l'économie nationale a donc été, à ce moment, de 1.200.000 pour A_1 $\left(\frac{6.000.000}{5}\right)$, de 2.000.000 pour A_2 $\left(\frac{4.000.000}{2}\right)$ et de 25.000.000 pour A_3 $\left(\frac{10.000.000}{0{,}40}\right)$.

Il va de soi dans ces conditions que *l'index général arithmétique pondéré ne saurait être déduit des prix (par unité) multipliés par les poids des articles considérés.* — En effet, en procédant de la sorte, on obtiendrait (pour 1913 par exemple):

	Poids	Prix	Prix × Poids
A_1	3	5. — fr.	15. — fr.
A_2	2	2. — „	4. — „
A_3	5	0. 40 „	2. — „
G			21. — fr.

Pour 21 francs de valeur totale du groupe G, on aurait ainsi 15 francs revenant à A_1, 4 francs revenant à A_2 et 2 francs à A_3, c'est-à-dire l'importance relative, le poids de chacun de ces trois articles dans la formation de l'index général serait respectivement de $\frac{15}{21}$, de $\frac{4}{21}$ et de $\frac{2}{21}$, soit de 0,71:0,19:0,10 tandis que, dans la réalité, ces poids sont de 0,30:0,20:0,50 (= 3:2:5).

En général, si, pour divers articles considérés (A_1, A_2, A_3, ... A_n), nous désignons les poids resp. par p_1, p_2, p_3, ... p_n, les prix par a_1, a_2, a_3, ... a_n, les nombres d'unités par u_1, u_2, u_3, ... u_n et les valeurs globales par v_1, v_2, v_3, ... v_n, nous avons alors:

$$p_1=\frac{u_1a_1}{u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3+\dots+u_na_n}=\frac{u_1a_1}{\Sigma(ua)}=\frac{v_1}{\Sigma v}$$

$$p_2=\frac{u_2a_2}{u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3+\dots+u_na_n}=\frac{u_2a_2}{\Sigma(ua)}=\frac{v_2}{\Sigma v},$$

et ainsi de suite, soit: **(2)**

$$p_n=\frac{u_na_n}{u_1a_1+u_2a_2+u_3a_3+\dots+u_na_n}=\frac{u_na_n}{\Sigma(ua)}=\frac{v_n}{\Sigma v}.$$

Aux erreurs que l'on commettrait en général en établissant l'index général arithmétique d'après la somme des prix des articles individuels, erreurs que nous avons vues en parlant des index arithmétiques non-pondérés (§ 2), on en ajouterait donc encore d'autres, résultant d'une pondération erronée, en prenant $p_n = u_n$.

§ 5. — Les index arithmétiques pondérés peuvent, cependant, être calculés de *deux* façons:

1° *Procédé des moyennes des index particuliers.* D'après notre définition même, l'index général étant la moyenne des index particuliers, il est clair que, pour obtenir un index arithmétique pondéré, on peut *calculer d'abord les index particuliers des articles envisagés, multiplier chacun de ces index par le poids de l'article correspondant et diviser la somme des produits ainsi obtenus par la somme des poids de tous les articles considérés;* en d'autres termes, *prendre la moyenne pondérée des index particuliers.* — En conservant aux lettres la signification indiquée plus haut et désignant l'index arithmétique pondéré, pour la date D_b, par J_b, nous pouvons donc écrire:

$$J_b = \frac{\frac{b_1}{a_1}p_1 + \frac{b_2}{a_2}p_2 + \frac{b_3}{a_3}p_3 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}p_n}{\Sigma p} = \tag{3}$$
$$= \frac{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \cdots + \beta_n p_n}{\Sigma p}.$$

Si les poids des divers articles ne sont pas exprimés en chiffres entiers, mais, comme nous l'avons fait dans notre formule (2), en fractions de la somme des poids de tout le groupe d'articles envisagé, notre formule (3) peut encore être simplifiée par la suppression du dénominateur Σp qui est alors égal à 1 [1]). Notre formule (3) peut donc être exprimée plus simplement:

$$J_b = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \cdots + \beta_n p_n = \Sigma(p\beta) \quad (4)$$

Appliqué, à titre d'illustration, à notre groupe d'articles G, ce procédé donne les résultats suivants:

[1]) En effet, d'après la formule (2), $p_1 = \frac{v_1}{\Sigma v}$, $p_2 = \frac{v_2}{\Sigma v}$, $p_3 = \frac{v_3}{\Sigma v}, \ldots p_n = \frac{v}{\Sigma v}$; on peut donc dire que $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n = \frac{v_1}{\Sigma v} + \frac{v_2}{\Sigma v} + \frac{v_3}{\Sigma v} + \ldots + \frac{v_n}{\Sigma v}$, soit: $\Sigma p = \frac{\Sigma v}{\Sigma v} = 1$.

Année	Coefficients de poids			Prix (francs)			Index particuliers			Index multipliés par coefficients de poids			Somme des Index × Poids	Index général
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3		
1913	3	2	5	5.00	2.00	0.40	100	100	100	300	200	500	1000	100
1920	—	—	—	4.80	3.60	1.50	96	180	375	288	360	1875	2523	252,3

Dans cet exemple, nous avons admis la somme des poids égale 10; divisant par ce chiffre la somme des produits des index particuliers par leur poids respectif, nous obtenons pour 1920 un index arithmétique pondéré de 252,3 (l'année 1913 étant prise comme année de base).

§ 6. — 2° *Procédé des rapports des valeurs globales:* Pour obtenir l'index arithmétique pondéré d'une série d'articles à une date donnée, on peut, sans calculer les index particuliers, prendre *la valeur totale de ces articles, à la date considérée, divisée par leur valeur totale à la date de base* [1]). Si nous désignons les valeurs globales des divers articles (A_1, A_2, $A_3, \ldots A_n$) à la date de base D_a par v_1, v_2, $v_3, \ldots v_n$ et leurs valeurs globales à une autre date quelconque par $v'_1, v'_2, v'_3, \ldots v'_n$, on peut ainsi écrire:

$$J_b = \frac{\Sigma v'}{\Sigma v}. \tag{5}$$

En effet, d'après la formule (4),

$$J_b = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \cdots + \beta_n p_n =$$
$$= \frac{b_1}{a_1}p_1 + \frac{b_2}{a_2}p_2 + \frac{b_3}{a_3}p_3 + \cdots + \frac{b_n}{a_n}p_n;$$

remplaçant, dans cette dernière expression, les p par leur valeur d'après la formule (2), nous pouvons écrire:

$$J_b = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{u_1 a_1}{\Sigma(ua)} + \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{u_2 a_2}{\Sigma(ua)} + \frac{b_3}{a_3} \cdot \frac{u_3 a_3}{\Sigma(ua)} + \cdots +$$
$$+ \frac{b_n}{a_n} \cdot \frac{u_n a_n}{\Sigma(ua)} = \frac{b_1 u_1}{\Sigma(ua)} + \frac{b_2 u_2}{\Sigma(ua)} + \frac{b_3 u_3}{\Sigma(ua)} + \cdots +$$
$$+ \frac{b_n u_n}{\Sigma(ua)} = \frac{b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 + \cdots + b_n u_n}{\Sigma(ua)}.$$

Mais $\Sigma(ua)$, la somme des produits du nombre d'unités de chaque article par son prix à la date D_a, n'est autre chose que la somme des valeurs globales de tous les articles à cette date, c'est-à-dire Σv. D'un autre côté, $b_1 u_1$, le produit du prix de l'article A_1, à la date D_b, par le nombre d'unités de cet article, veut dire la valeur globale de l'article A_1 à la date D_b, c'est-à-dire $= v'_1$; de même $b_2 u_2 = v'_2$; $b_3 u_3 = v'_3, \ldots b_n u_n = v'_n$. Nous pouvons donc écrire:

$$J_b = \frac{v'_1 + v'_2 + v'_3 + \cdots + v'_n}{\Sigma v} = \frac{\Sigma v'}{\Sigma v}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

[1]) Nous sousentendons continuellement „et le quotient exprimé en % %" qui est l'expression courante des *index numbers*.

Si nous appliquons ce procédé, à titre d'exemple, à notre groupe d'articles G, nous obtenons les chiffres que voici (pour le nombre d'unités de chaque article et pour leurs valeurs globales en 1913, voyez § 4):

Années	Unités (en milliers)			Prix (francs)			Valeurs globales (1000 fr.)			Somme des valeurs globales (1000 fr.)	Index arithmétique pondéré (rapport des valeurs totales)
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3		
1913	1.200	2.000	25.000	5.00	2.00	0.40	6.000	4.000	10.000	20.000	100
1920	1.200	2.000	25.000	4.80	3.60	1.50	5.760	7.200	37.500	50.460	252,3

Nous connaissons les valeurs globales des divers articles en 1913; aux prix de 1920, les 1.200.000 unités de A_1 ont une valeur globale de 5.760.000 francs, les 2.000.000 unités de A_2 ont une valeur de 7.200.000 francs et les 25.000.000 unités de A_3 ont une valeur globale de 37.500.000 francs; la valeur totale du groupe G est en 1920 de 50.460.000 francs, soit, par rapport à sa valeur totale de 1913 $\left(\frac{50.460.000}{20.000.000}\right) =$ 252,3 : 100. C'est le même index général que nous avons trouvé au § précédent par le procédé des moyennes des index particuliers.

§ 7. — *Remarques.* — 1° Les deux façons de calculer les index arithmétiques pondérés, qui, au fond, ne sont que deux formes d'un même raisonnement, reposent sur la prémisse, sur le postulat, que *la quantité de chaque article (u_n) reste invariable d'une date à l'autre* de sorte que le changement des valeurs globales ne doive être attribué qu'au mouvement des prix. C'est ainsi que, dans notre exemple aussi, nous avons dû admettre que le nombre d'unités (1.200.000, 2.000.000 et 25.000.000) des divers articles, observé pour 1913, restait le même aussi pour 1920 et que les valeurs globales des articles envisagés traduisaient ainsi l'effet du seul changement des prix. On admet donc que la quantité des divers articles sur le marché national, s'il s'agit de prix de gros, ou dans les budgets familiaux des masses populaires, s'il s'agit de prix de détail, ne change pas avec le changement de prix. *Cette hypothèse est tout à fait arbitraire et certainement contraire à la réalité.* S'il s'agit d'articles de consommation intérieure, la hausse des prix tend évidemment à réduire leur quantité sur le marché en général et dans l'économie domestique des couches populaires en particulier; la baisse des prix agit naturellement en sens inverse. S'il s'agit surtout d'articles d'exportation, on peut, au contraire, supposer que la hausse de leurs prix sur les marchés mondiaux encourage leur production dans le pays tandis que leur baisse tendrait à restreindre leur production. Dans un cas comme dans un autre, le changement des prix ne reste pas sans influence sur la quantité des articles considérés. Les index pondérés, qui ont précisément pour but de tenir compte de la quantité pour laquelle chaque article figure dans l'économie nationale ou domestique (bien qu'il n'y ait pas identité entre p et u) et qui reposent nécessairement sur cette hypothèse pour le moins arbitraire sinon complètement fausse, accusent donc un vice en quelque sorte *congénital* qui est peut-être plus grave que tous les défauts pratiques qu'on reproche souvent à cette espèce d'index généraux.

2° Notons que, la quantité (u) de chaque article restant la même et les prix (a, b, etc.) changeant d'une date à l'autre dans des proportions différentes pour les différents articles, il s'ensuit que *le poids (p) des divers articles*, l'importance relative de leurs valeurs globales, *doit nécessairement changer aussi d'une date à l'autre.* — En effet, d'après la formule (2), pour toute article A_n, le poids à la date D_a est de $p_n = \frac{v_n}{\Sigma v}$; à la date D_b, son poids $p'_n = \frac{v'_n}{\Sigma v'}$; pour que p'_n soit $= p_n$, il faut donc que:

$$\frac{v'_n}{\Sigma v'} = \frac{v_n}{\Sigma v}, \quad \text{ou:} \quad \frac{v'_n}{v_n} = \frac{\Sigma v'}{\Sigma v}.$$

Mais $v'_n = u_n b_n$ (c'est-à-dire: la valeur globale de l'article A_n à la date D_b est égale au nombre d'unités de cet article multiplié par son prix à cette date); $v_n = u_n a_n$; d'autre part, d'après la formule (5), $\frac{\Sigma v'}{\Sigma v} = J_b$; nous pouvons donc écrire l'expression ci-dessus sous la forme suivante:

$$\frac{u_n b_n}{u_n a_n} = J_b, \quad \text{soit:} \quad \frac{b_n}{a_n} = J_b;$$

$\frac{b_n}{a_n}$ n'étant pas autre chose que l'index particulier de A_n à la date D_b, nous pouvons donc dire: *pour que le poids d'un article* (sa quantité restant invariable) *ne change pas d'une date à l'autre, il faut que son index particulier coïncide avec l'index général.* Or, il est pratiquement tout à fait impossible que les index particuliers de tous les articles envisagés coïncident entre eux (et, par suite aussi, avec l'index général). Par conséquent, dans la réalité, ce serait une erreur d'admettre que, malgré les changements des prix, les poids des divers articles restent les mêmes d'une date à l'autre, c'est-à-dire que

$$p'_1 = p_1;\ p'_2 = p_2;\ p'_3 = p_3, \ldots p'_n = p_n.$$

Et plus les index particuliers sont divergents, plus ils s'écartent les uns des autres et de l'index général, et plus aussi les poids des divers articles observés à une date donnée s'écartent de leurs poids à une autre date.

Ainsi dans notre exemple (§ 6), l'article A_1 avait, en 1913, un poids égal à 0,3 et, en 1920, un poids de $0{,}114 \left(= \frac{5.760.000}{50.460.000}\right)$; A_2 avait un poids de 0,2 en 1913 et de 0,143 en 1920 $\left(\frac{7.200.000}{50.460.000}\right)$; A_3 avait un poids de 0,5 en 1913 et de 0,743 en 1920 $\left(\frac{37.500.000}{50.460.000}\right)$.

Nous verrons encore plus loin l'importance de cette observation pour certains calculs.

C. Index géométriques simples.

§ 8. — Les index géométriques simples (ou non-pondérés) peuvent être calculés de *trois* façons différentes:

1° *Procédé des moyennes géométriques des index particuliers.* Il est simplement l'application de notre définition des index généraux (§ 1). Comme pour les index arithmétiques, pondérés ou non, on calcule donc d'abord les index particuliers et l'on en tire la moyenne qui, dans ce cas, est une moyenne géométrique simple. — Si nous désignons l'index géométrique simple d'une date quelconque D_b par i_b et les index particuliers des divers articles, pour la même date, par β_1, β_2, $\beta_3, \ldots \beta_n$ (n étant le nombre des articles envisagés), nous pouvons donc écrire:

$$i_b = \sqrt[n]{\beta_1\,\beta_2\,\beta_3 \ldots \beta_n}. \tag{6}$$

Ainsi, si nous reprenons notre exemple, nous trouvons:

Années	Index particuliers			Index géométriques simples
	A_1	A_2	A_3	
1913	100	100	100	$\sqrt[3]{100^3} = 100$
1920	96	180	375	$\sqrt[3]{96 \cdot 180 \cdot 375} = 186$

L'index géométrique simple de 1920, l'année 1913 étant prise comme base, est ainsi de 186.

§ 9. — 2° *Procédé des moyennes des prix des articles envisagés.* Contrairement à ce que nous avons vu pour les index arithmétiques, simples ou pondérés (§§ 2 et 4), les index géométriques simples peuvent être tirés directement des *prix* des articles envisagés. Il suffit ici de prendre *le rapport de la moyenne géométrique des prix constatés pour les dates données à la moyenne géométrique des prix de la date de base.* — Si nous désignons, comme d'habitude, les prix des articles A_1, A_2, $A_3, \ldots A_n$ pour la date de base D_a par a_1, a_2, $a_3, \ldots a_n$ et leurs prix à une autre date D_b par b_1, b_2, $b_3, \ldots b_n$, nous pouvons donc exprimer ce second procédé par la formule que voici:

$$i_b = \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}. \tag{7}$$

En effet, les index particuliers β_1, β_2, $\beta_3, \ldots \beta_n$ ne sont d'autre chose que les rapports des prix des articles respectifs observés à la date D_b à leurs prix de la date de base D_a, c'est-à-dire: $\beta_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $\beta_2 = \frac{b_2}{a_2}$, $\beta_3 = \frac{b_3}{a_3}$ etc.; nous pouvons donc écrire la formule (6) de la façon suivante:

$$i_b = \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{b_3}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{a_n}} = \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}.$$

Pour établir un index général géométrique simple, il n'est donc pas nécessaire de calculer au préalable la série des index particuliers, cet index général pouvant être déduit directement des prix des articles envisagés.

Ainsi, dans notre exemple, l'index géométrique simple du groupe d'articles G peut être établi de la façon suivante:

Années	Prix (francs)			Moyennes géométriques des prix	Index géométriques simples (rapports des moyennes)
	A_1	A_2	A_3		
1913	5.00	2.00	0.40	$\sqrt[3]{5 \cdot 2 \cdot 0{,}4} = 1{,}59$	100
1920	4.80	3.60	1.50	$\sqrt[3]{4{,}8 \cdot 3{,}6 \cdot 1{,}5} = 2{,}96$	186

C'est le même index que nous avons obtenu aussi par le premier procédé.

§ 10. — 3° *Procédé des moyennes des valeurs globales des articles envisagés.* Pour obtenir l'index géométrique simple à une date quelconque, on peut prendre aussi *le rapport de la moyenne géométrique des valeurs globales des divers articles, constatées pour la date donnée, à leur moyenne géométrique pour la date de base.* — Si l'on désigne les valeurs globales des divers articles pour la date de base D_a par v_1, v_2, $v_3, \ldots v_n$ et, pour une autre date D_b, par v'_1, v'_2, $v'_3, \ldots v'_n$, on peut donc écrire que l'index géométrique simple à cette dernière date sera:

$$i_b = \frac{\sqrt[n]{v'_1 v'_2 v'_3 \ldots v'_n}}{\sqrt[n]{v_1 v_2 v_3 \ldots v_n}}. \tag{8}$$

En effet, nous savons déjà (§ 6) que $v'_1 = u_1 b_1$; $v'_2 = u_2 b_2$; $v'_3 = u_3 b_3$; ... $v'_n = u_n b_n$; de même, $v_1 = u_1 a_2$; $v_2 = u_2 a_2$; $v_3 = u_3 a_3$; ... $v_n = u_n a_n$. Nous pouvons donc écrire:

$$\frac{\sqrt[n]{v'_1 v'_2 v'_3 \ldots v'_n}}{\sqrt[n]{v_1 v_2 v_3 \ldots v_n}} = \frac{\sqrt[n]{u_1 b_1 \cdot u_2 b_2 u_3 b_3 \ldots u_n b_n}}{\sqrt[n]{u_1 a_1 \cdot u_2 a_2 u_3 a_3 \ldots u_n a_n}} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{u_1 b_1 \cdot u_2 b_2 \cdot u_3 b_3 \ldots u_n b_n}{u_1 a_1 \cdot u_2 a_2 \cdot u_3 a_3 \ldots u_n a_n}} = \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}.$$

Mais la dernière expression, d'après la formule (7), égale i_b; on peut donc dire:

$$\frac{\sqrt[n]{v'_1 v'_2 v'_3 \ldots v'_n}}{\sqrt[n]{v_1 v_2 v_3 \ldots v_n}} = i_b.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Dans l'exemple de notre groupe d'articles G, l'index géométrique simple peut donc être calculé encore de la façon suivante (d'après les valeurs globales indiquées au § 6):

Années	Valeurs globales (1000 francs)			Moyennes géométriques des valeurs globales (1000 francs)	Index géométriques simples (rapports des moyennes des valeurs globales)
	A_1	A_2	A_3		
1913	6.000	4.000	10.000	$\sqrt[3]{6000 \cdot 4000 \cdot 10\,000} = 6.214{,}_4$	100
1920	5.760	7.200	37.500	$\sqrt[3]{5760 \cdot 7200 \cdot 37\,500} = 11.585{,}_9$	186

L'index général obtenu par ce procédé (186) est donc, pour 1920, le même que celui obtenu par les deux autres procédés.

§ 11. — *Remarques.* Le fait que l'index géométrique simple tiré directement des prix des articles envisagés coïncide avec celui fourni par la moyenne des index particuliers, prouve déjà que l'index *géométrique* tiré directement des prix ne pèche par aucun des défauts qui seraient inévitables si, des prix, on voulait tirer des index *arithmétiques* (cf. § 2). Il ne peut, en effet, plus dépendre des unités de mesure adoptées pour les divers articles; un changement de prix de proportion égale, mais portant sur des articles différents, doit dès lors affecter l'index général dans une mesure égale de même qu'un changement inégal doit l'affecter dans une mesure inégale. — On peut cependant s'en convaincre aussi directement. Supposons, en effet, que nous exprimions le prix d'un article donné A_1 par unités de mesure $\varkappa$ fois plus grandes qu'auparavant ($\varkappa$ étant une valeur positive quelconque $\gtrless 1$) de sorte que le prix de A_1 devienne $\varkappa a_1$ à la date D_a et $\varkappa b_1$ à la date D_b:

$$i_b = \frac{\sqrt[n]{\varkappa b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots b_n}}{\sqrt[n]{\varkappa a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{\varkappa b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{\varkappa a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}} = \frac{\sqrt[n]{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}}.$$

L'index demeure donc le même que celui obtenu pour des unités de mesure $\varkappa$ fois moindre (7), il est *indépendant des unités de mesure adoptées.*

De même,

$$\sqrt[n]{\varkappa a_1 \cdot a_2 a_3 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \varkappa a_2 \cdot a_3 \ldots a_n},$$

c'est-à-dire quel que soit l'article dont ce prix aurait changé dans une proportion donnée ($\varkappa$), la simple moyenne géométrique des prix (donc l'index géométrique non-pondéré) s'en trouve affectée dans une égale mesure. Et d'un autre côté, si nous avons $\varkappa \neq l$, alors

$$\sqrt[n]{\varkappa a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n} \neq \sqrt[n]{a_1 \cdot l a_2 \cdot a_3 \ldots a_n},$$

c'est-à-dire si les prix de différents articles changent dans des proportions différentes, l'index géométrique simple tiré directement des prix doit en être affecté dans des proportions différentes. Ainsi aucun des défauts que le procédé des moyennes des prix présenterait si l'on voulait l'appliquer aux index arithmétiques ne se retrouve là où il s'agit d'index géométriques simples. — Le lecteur pourra lui-même vérifier ces déductions sur des chiffres concrets pareils à ceux que nous avons employés au § 2.

Notons encore une différence entre les index arithmétiques et les index géométriques: *tandis que la moyenne arithmétique des valeurs globales des divers articles nous donne un index* (arithmétique) *pondéré, la moyenne géométrique de ces valeurs globales donne,* comme nous l'avons vu, *un index* (géométrique) *non-pondéré.*

D. Index géométriques pondérés.

§ 12. — Si, dans l'établissement des moyennes des prix, on veut tenir compte du poids inégal des divers articles (A_1, A_2, A_3, etc.), *on doit considérer chacun d'eux comme équivalent à un groupe d'autant d'articles qu'il compte d'unités de poids;* alors, en effet, les divers articles seront ramenés à des éléments ayant tous le même poids. Ainsi, si dans l'exemple de notre groupe d'articles G, nous comptons A_1 pour un sous-groupe de 3 articles, A_2 pour un sous-groupe de 2 articles et A_3 pour un sous-groupe de 5 articles, tous les articles auront le même poids et le problème de leur index général se ramènera à celui envisagé dans la section C du présent chapitre. Nous aurons ainsi 10 articles dont 3, constituant A_1, ont pour index particulier celui de A_1 (donc 100 en 1913 et 96 en 1920), 2 articles ont l'index de A_2 et 5 l'index de A_3. Toute l'opération se présentera sous la forme suivante:

Coefficients de poids	3	2	5	Moyennes géométriques pondérées des index particuliers	Index géométriques pondérés
Années	A_1	A_2	A_3		
	Index particuliers				
1913	100	100	100	$\sqrt[10]{100^{10}}$ . . . =	100
1920	96	180	375	$\sqrt[10]{96^3 \cdot 180^2 \cdot 375^5}$ =	215

Les index généraux, qui, par définition, ne sont autre chose que les moyennes géométriques des index particuliers sont alors, dans cet exemple, resp. 100 pour 1913 et 215 pour 1920.

§ 13. — *Les mêmes procédés de calcul, applicables aux index géométriques simples, sont applicables aussi aux index géométriques pondérés avec cette seule différence que, pour ces derniers, il faut toujours prendre des moyennes géométriques pondérés.* — Ces procédés de calcul sont donc au nombre de *trois*, à savoir:

1° *Procédé des moyennes* (ou des produits pondérés) *des index particuliers.* C'est précisément le procédé que nous venons d'appliquer à notre exemple concret et qui résulte de la notion même d'index géométrique pondéré en tant que moyenne géométrique pondérée des index particuliers.

D'une façon générale, si nous avons une série d'articles A_1, A_2, A_3, ... A_n dont les poids sont resp. $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ et dont les index particuliers, à une date quelconque D_b, sont β_1, β_2, β_3, ... β_n, l'index géométrique pondéré de ce groupe d'article à la date considérée (j_b) est égal:

$$j_b = \sqrt[\Sigma p]{\beta_1^{p_1}\,\beta_2^{p_2}\,\beta_3^{p_3}\ldots\ldots\beta_n^{p_n}}\,, \qquad (9)$$

c'est-à-dire *à la moyenne géométrique des index particuliers élevés à une puissance égale à leur poids respectif (la racine de leurs produits ayant pour indice la somme de ces poids).*

Si nous exprimons les coefficients de poids (p), non pas en nombres entiers, mais en fractions de la somme des poids de tous les articles envisagés — comme nous l'avons fait dans notre formule (2) — de sorte que $\Sigma p = 1$, notre dernière formule peut être exprimée plus simplement comme suit:

$$j_b = \beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\beta_3^{p_3}\ldots\beta_n^{p_n} \qquad (10)$$

c'est-à-dire *l'index géométrique pondéré est égal au produit des index particuliers élevés à une puissance égale à leur poids respectif.*

§ 14. — 2° *Procédé des moyennes* (ou des produits pondérés) *des prix.* — Si, dans la formule (10), nous remplaçons β par la valeur identique $\frac{b}{a}$, nous trouvons:

$$j_b = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{p_1}\cdot\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{p_2}\cdot\left(\frac{b_3}{a_3}\right)^{p_3}\ldots\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{p_n} = \frac{b_1^{p_1}\,b_2^{p_2}\,b_3^{p_3}\ldots b_n^{p_n}}{a_1^{p_1}\,a_2^{p_2}\,a_3^{p_3}\ldots a_n^{p_n}}. \qquad (11)$$

Cela veut dire que pour obtenir l'index géométrique pondéré d'une série d'article à une date donnée, on peut prendre *le rapport du produit des prix de ces articles, constatés pour la date considérée et élevés à une puissance égale au poids respectif de chaque article, au produit des prix de la date de base élevés à la même puissance.*

Il va de soi que la dernière formule peut être représentée aussi sous la forme d'une expression radicale et valable également pour les cas où les coefficients de poids sont exprimés en nombres entiers:

$$j_b = \frac{\sqrt[\Sigma p]{b_1^{p_1}\,b_2^{p_2}\,b_3^{p_3}\ldots b_n^{p_n}}}{\sqrt[\Sigma p]{a_1^{p_1}\,a_2^{p_2}\,a_3^{p_3}\ldots a_n^{p_n}}}. \qquad (12)$$

Appliqué à notre exemple concret, ce procédé se présente comme suit (pour varier, nous exprimons ici les poids sous forme de fractions):

Coefficients de poids	0,3	0,2	0,5	Moyennes géométriques pondérées des prix	Index géométriques pondérés (rapports des moyennes)
Années	A_1	A_2	A_3		
	Prix (francs)				
1913. . . .	5.00	2.00	0.40	$5^{0,3} \cdot 2^{0,2} \cdot 0,4^{0,5}$ . . . . . . $= 1,1774$	100
1920. . . .	4.80	3.60	1.50	$4,8^{0,3} \cdot 3,6^{0,2} \cdot 1,5^{0,5}$ . . . . $= 2,5332$	215

Le résultat est donc identique à celui obtenu au § 12 par le procédé des moyennes géométriques pondérées des index particuliers.

§ 15. — 3° *Procédé des moyennes* (ou des produits pondérés) *des valeurs globales.* — Pour obtenir l'index géométrique pondéré d'une série d'articles à une date donnée, on peut encore prendre *le rapport du produit des valeurs globales des divers articles, constatées pour la date considérée et élevées à des puissances égales aux poids respectifs des divers articles, au produit de leurs valeurs globales à la date de base élevées à ces mêmes puissances.* — En conservant aux lettres la signification que nous leur avons attribuée plus haut (§ 6), nous pouvons ainsi écrire:

$$(13) \qquad j_b = \frac{(v_1')^{p_1} (v_2')^{p_2} (v_3')^{p_3} \dots (v_n')^{p_n}}{v_1^{p_1} v_2^{p_2} v_3^{p_3} \dots v_n^{p_n}}.$$

En effet:

$$\frac{(v_1')^{p_1} (v_2')^{p_2} (v_3')^{p_3} \dots (v_n')^{p_n}}{v_1^{p_1} v_2^{p_2} v_3^{p_3} \dots v_n^{p_n}} =$$

$$= \frac{(u_1 b_1)^{p_1} \cdot (u_2 b_2)^{p_2} \cdot (u_3 b_3)^{p_3} \dots (u_n b_n)^{p_n}}{(u_1 a_1)^{p_1} \cdot (u_2 a_2)^{p_2} \cdot (u_3 a_3)^{p_3} \dots (u_n a_n)^{p_n}} =$$

$$= \frac{b_1^{p_1} b_2^{p_2} b_3^{p_3} \dots b_n^{p_n}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} \dots a_n^{p_n}}, \text{ soit d'après la formule (11)} = j_b.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

La formule (13) peut naturellement, elle aussi, être représentée sous forme d'une expression radicale, la racine ayant pour indice Σp.

Nous laissons au lecteur le soin d'appliquer ce procédé à quelques exemples concrets.

§ 16. — *Résumé du chapitre.* — Nous constatons ainsi:

1° Des trois façons de calculer les index généraux, *seul le procédé des moyennes des index particuliers est applicable à toutes les espèces d'index généraux:* arithmétiques ou géométriques, simples ou pondérés.

2° *Les index géométriques, et eux seuls, peuvent être déduits directement des prix des articles envisagés.*

3° *Les index arithmétiques pondérés ainsi que les index géométriques peuvent être déduits directement aussi des valeurs globales des articles envisagés;* cependant, pour les index *géométriques,* les valeurs globales, sans autre prise en considération de poids, aboutissent à des index *non-pondérés.*

Des trois procédés indiqués, de beaucoup le plus simple est certainement le second, qui permet d'établir directement l'index général d'après les prix des articles individuels. Ce procédé n'étant applicable qu'aux index *géométriques,* on voit ainsi l'avantage qu'offrent ces index du point de vue du calcul et qui est surtout appréciable quand il s'agit d'index *non-pondérés:* par opposition aux index arithmétiques, *les index géométriques peuvent être établis sans calcul préalable des index particuliers des divers articles envisagés.*

Chapitre II.

Le changement de la date de base des index généraux [1].

§ 17. — Il arrive parfois qu'on doit changer la base d'un système *d'index numbers:* au lieu de prendre, comme base de comparaison (avec index 100), les prix d'une date donnée, on désire donc prendre pour base les prix d'une autre date. Cette nécessité se fait sentir notamment dans deux cas:

1° Elle se fait sentir, d'abord, lorsque les circonstances historiques se trouvent profondément changées, soit par suite d'une longue évolution, soit à cause d'un bouleversement brusque, de sorte que le niveau des prix de l'ancienne date de base ne peut plus être considéré comme normal pour le temps présent et, par conséquent, ne peut plus servir d'étalon des fluctuation récentes des prix; on est donc amené à adopter une base plus récente. Ainsi, à la place de la période 1845—1850, qui était à la base de son index des prix, la revue *The Economist* de Londres adopta plus tard celle de 1901 à 1905. — S'il s'agit d'étudier les effets produits sur les prix par quelque grand événement historique, on ne peut pas non plus com-

[1]) Nous laissons de côté les index construits d'après le *chain system* et les problèmes qui s'y rattachent.

parer les prix qui accompagnaient ou qui suivirent cet événement à ceux d'une date quelconque, mais on doit les comparer aux prix de certaines dates déterminées, surtout à ceux qui ont immédiatement précédé l'événement en question. Tel est particulièrement le cas aujourd'hui où, par suite de la révolution des prix provoquée par la grande guerre et par les événements d'après-guerre, les anciennes bases, en usage avant la guerre, ont, pour presque tous les pays, perdu leur valeur comparative. C'est ainsi, par exemple, que la base de l'index du *Bureau of Labor Statistics* fut ramenée de 1890/99 à 1913.

2° La nécessité de changer la date de base se présente aussi lorsqu'on fait une étude internationale comparative des prix. Pour pouvoir comparer les fluctuations des prix, la dépréciation de la monnaie, le renchérissement de la vie, etc. dans des pays différents, on est obligé d'établir une période de base commune pour divers pays. Or, dans la réalité, les bases des index varient non seulement d'un pays à l'autre, mais encore, pour le même pays, d'un système d'index à l'autre. Le problème se pose donc de *transformer la série des index calculés sur une base donnée, en une série d'index calculés sur une base nouvelle.*

§ 18. — Au prime abord, la solution du problème paraît on ne peut plus simple et elle l'est réellement lorsqu'il s'agit *d'index particuliers.*

Admettons ainsi que nous avons, pour un article donné, une série d'index particuliers (J) correspondant à une série de dates successives D_a, D_b, D_c, etc. et ayant pour base la date D_a:

	J	J'
D_a	100	91
D_b	95	86
D_c	110	100
D_d	125	114
D_e	150	136

Disons encore qu'à la place de D_a, nous voulons prendre pour base D_c. Nous raisonnons donc simplement comme suit:

D_a a pour index 100 lorsque celui de D_c est égal 110; donc si l'index de D_c est de 100, celui de D_a devient $= \frac{100}{110} \cdot 100 = 91$; J'_a (l'index de D_a sur la nouvelle base D_c) est ainsi $= 91$. Nous trouvons de même que J'_b (l'index de D_b sur la nouvelle base D_c) $= \frac{95}{110} \cdot 100 = 86$; $J'_d = \frac{125}{110} \cdot 100 = 114$, et ainsi de suite (série J'): on divise chaque index donné par l'index de D_c 110 et l'on multiplie le quotient par 100.

D'une façon générale, admettons que, pour un article donné A et pour une série de dates successives, nous avons les données suivantes:

	Prix	Index particuliers
D_a	a	$\alpha = 100$
D_b	b	$\beta = \frac{b}{a} \cdot 100$
⋮		
D_m	m	$\mu = \frac{m}{a} \cdot 100$;

supposons encore que nous cherchons $\mu' = \frac{m}{b} \cdot 100$, c'est-à-dire l'index de D_m sur la base de D_b. — En divisant (comme nous venons de le faire) l'index donné de D_m, calculé sur l'ancienne base D_a (μ), par l'index (β) de D_b devant servir de nouvelle base et multipliant le résultat par 100, nous obtenons:

$$\frac{\mu}{\beta} \cdot 100 = \frac{\frac{m}{a} \cdot 100}{\frac{b}{a} \cdot 100} \cdot 100 = \frac{m \cdot a}{a \cdot b} \cdot 100 = \frac{m}{b} \cdot 100 = \mu', \tag{14}$$

c'est-à-dire *pour obtenir l'index d'une date quelconque sur une nouvelle base, on n'a qu'à diviser l'index donné de cette date* (calculé sur l'ancienne base) *par l'index donné de la date devant servir de nouvelle base et multiplier le résultat par 100.*

Si, au lieu d'exprimer l'index de base par 100, nous le désignons par 1,00, représentant la serie des index successifs par des fractions correspondantes (comme nous l'avons, au fond, déjà fait dans notre premier chapitre, omettant partout l'expression „et multiplié par 100", et comme nous le ferons continuellement dans la suite), nous pouvons donc dire plus simplement *qu'on n'a qu'à diviser la série des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base* pour obtenir la série des index sur la base nouvelle. — En effet,

$$\frac{\mu}{\beta} = \frac{m}{a} : \frac{b}{a} = \frac{m}{b} = \mu'. \tag{15}$$

En outre, si l'on compare l'index de l'ancienne date de base (D_a) dans la nouvelle série d'index (α') à l'index de la nouvelle date de base (D_b) dans l'ancienne série (β), on peut remarquer:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = \alpha', \tag{16}$$

c'est-à-dire *l'index de l'ancienne date de base dans la nouvelle série et l'index de la nouvelle date de base dans l'ancienne série d'index sont l'inverse l'un de l'autre.*

Ainsi, pour l'exemple cité au début de ce §, nous voyons que l'index de D_a sur la base de D_b (série J') est de $0{,}91 = \frac{1}{1{,}10}$ de même que l'index de D_b sur la base de D_a (série J) est de 1,10 soit $= \frac{1}{0{,}91}$.

Le passage d'une base d'index à une autre est donc extrêmement simple lorsqu'il s'agit d'index *particuliers*. Il n'en est pas toujours de même pour ce qui concerne les index *généraux*. C'est ce que nous allons voir.

Notons encore que, pour simplifier les opérations et afin de rendre plus clair le raisonnement, nous exprimons les index non pas par rapport à 100, mais relativement à l'unité (1,00) prise comme index de base.

Ceci dit, examinons successivement le problème du changement de base par rapport à chacune des quatre espèces d'index généraux.

A. Index arithmétiques simples.

§ 19. — Reprenons l'exemple du groupe d'articles G et supposons que les prix et les index, ayant pour base l'année 1913, ont été comme suit:

Années	Prix (francs)			Index particuliers				Index arithmétique simple	Index donné divisé par celui de 1920
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	Somme des index		
1913	5.00	2.00	0.40	1,00	1,00	1,00	3,00	1,00	0,46
1920	4.80	3.60	1.50	0,96	1,80	3,75	6,51	2,17	1,00
1922	4.70	2.40	0.80	0,95	1,20	2,00	4,15	1,38	0,64

D'après les prix indiqués, les index arithmétiques simples de ce groupe d'articles (l'année 1913 prise comme date de base) sont ainsi pour les années 1913, 1920 et 1922 respectivement de 1,00, 2,17 et 2,38. Supposons maintenant que l'on veut changer la base, que l'on désire, par exemple, prendre pour base des index les pris de 1920. *Peut-on obtenir la nouvelle série d'index généraux en divisant les index généraux donnés par 2,17* (qui est l'index de 1920 dans la série des index donnés) tout comme nous l'avons fait pour les index particuliers (15)?

Au prime abord, on pourrait croire qu'une réponse affirmative s'imposait. Aussi, nombreux sont les auteurs qui ont réellement procédé de la sorte sans même se douter qu'il y eût là quelque problème. En effet, si l'index général de 1920 est à celui de 1913 comme 2,17 à 1,00, n'est-il pas exact de dire que l'index général de 1920 étant égal 1, celui de 1913 serait de $\frac{1{,}00}{2{,}17} = 0{,}46$ (comme dans la formule 16)? Et puisque l'index de 1920 est à celui de 1922 comme 2,17 à 1,38, n'est-il pas évident que, l'index de 1920 étant $= 1$, celui de 1922 deviendrait $\frac{1{,}38}{2{,}17} = 0{,}64$ (formule 15)?

Calculons, cependant, effectivement les index généraux du groupe G pour les années 1913, 1920 et 1922 en prenant 1920 comme année de base et en appliquant le procédé exposé plus haut (§ 3), tout comme nous venons de calculer les index généraux de ce groupe G sur la base l'année 1913. Nous obtenons alors le tableau que voici:

Années	Prix (francs)			Index particuliers				Index arithmétique simple
	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3	Somme des index	
1913	5.00	2.00	0.40	1,04	0,56	0,27	1,87	0,62
1920	4.80	3.60	1.50	1,00	1,00	1,00	3,00	1,00
1922	4.70	2.40	0.80	0,98	0,67	0,53	2,18	0,73

Le résultat est donc bien différent de celui qu'on obtiendrait en divisant les index généraux ayant pour base 1913 par l'index général de 1920 pris sur la même base. Au lieu de 46, nous avons, en réalité, 62 comme index général de 1913 et, pour 1922, nous avons 73 au lieu de 64.

§ 20. — Il n'est pas difficile de découvrir la raison pour laquelle la division des index généraux donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base (1920) ne nous a pas donné les index généraux cherchés. — Pour plus de clarté, arrêtons nous d'abord sur les index des deux dates de base. Disons que ces dates sont D_a, base de l'ancienne série d'index, et D_b, base des index nouveaux. Pour les index *particuliers*, nous savons que l'index d'un article pour la date D_a dans la nouvelle série (a') est l'inverse de l'index du même article pour la date D_b dans l'ancienne série d'index (16). Si nous avons un groupe de n articles A_1, A_2, A_3, ... A_n, dont les index particuliers sont, dans l'ancienne série et pour la date D_b, respectivement $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$ et, dans la nouvelle série et pour la date D_a, $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots \alpha'_n$, nous pouvons donc écrire:

$$\alpha'_1 = \frac{1}{\beta_1};\ \alpha'_2 = \frac{1}{\beta_2};\ \alpha'_3 = \frac{1}{\beta_3};\ \ldots\ \alpha'_n = \frac{1}{\beta_n}.$$

Il s'ensuit que:

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_n = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}$$

soit:

$$\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_n}{n} = \frac{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}}{n}$$

Mais *la moyenne arithmétique des inverses de plusieurs quantités n'est pas identique à l'inverse de la moyenne de ces quantités et, pour les index des prix, ces deux grandeurs ne sont même jamais égales* [1], c'est-à-dire:

$$\frac{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}}{n} \neq 1 : \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n}{n}. \quad (17)$$

Il s'ensuit donc que:

$$\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots + \alpha'_n}{n} \neq 1 : \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n}{n}.$$

Or, le premier membre de cette inégalité représente la moyenne arithmétique simple des index particuliers de $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ à la date D_a calculés sur la nouvelle base, il présente donc l'index général arithmétique non-pondéré des articles envisagés pour la date D_a dans la nouvelle série d'index généraux, c'est-à-dire $= I'_a$. Le diviseur du second membre de l'inégalité est la moyenne arithmétique simple des index particuliers de ces mêmes articles à la date D_b calculés sur l'ancienne base, c'est-à-dire I_b, l'index général arithmétique simple des articles envisagés pour la date D_b dans l'ancienne série d'index. La dernière inégalité peut donc être écrite sous la forme suivante:

$$I'_a \neq \frac{1}{I_b}, \quad (18)$$

c'est-à-dire *lorsqu'il s'agit d'index arithmétiques non-pondérés, l'index général de la date de l'ancienne base dans la nouvelle série d'index n'est pas égal à l'inverse de l'index général de la date de la nouvelle base dans l'ancienne série.*

L'identité, qui est réelle pour les index particuliers (formule 16), n'existe donc pas pour les index généraux arithmétiques non-pondérés.

§ 21. — Ainsi donc pour *un* des index généraux de la nouvelle série, pour I'_a (qui est l'index de l'ancienne date de base D_a), on ne peut pas dire qu'il soit égal à sa valeur dans l'ancienne série ($= 1$) divisée par l'index (I_b) de la nouvelle date de base (D_b). Par conséquent, la formule (15), d'après laquelle tout index de la nouvelle série est égal à sa valeur dans l'ancienne divisée par l'index de la date servant de nouvelle base $\left(\mu' = \frac{\mu}{\beta}\right)$, formule qui est exacte pour les index particuliers, n'est donc plus vraie quand il s'agit d'index généraux arithmétiques simples. Et cela non seulement parce qu'elle se montre inapplicable à un cas particulier (pour ce qui concerne I'_a), mais encore pour une raison plus générale. — En effet, le raisonnement développé au § 18 (application de la règle de trois) qui nous a amenés à ladite

[1]) Il suffit, au fond, que la moyenne arithmétique des inverses ne soit pas *identique* à l'inverse de la moyenne pour qu'on n'ait pas le droit de substituer, dans une formule générale, l'une de ces expressions à l'autre. Mais il n'est pas difficile de démontrer que dans la réalité, pour autant qu'il s'agit *d'index de prix,* ces expressions, loin d'être identiques, ne sont même *jamais* égales. Car le contraire serait vrai dans un seul cas, à savoir *si les quantités considérées étaient toutes égales entre elles* (cas qui pour des index de prix de toute une série d'articles n'est, naturellement, jamais réalisable). — Supposons, en effet, que nous avons *deux* quantités x et y et que le contraire de notre proposition soit vrai, c'est-à-dire que:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} = \frac{1}{\frac{x+y}{2}}.$$

Il s'ensuivrait que

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2, \text{ soit: } \frac{(y+x)(x+y)}{2} = 2xy;$$

$(x+y)^2 = 4xy$; soit: $x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = 0$; $(x-y)^2 = 0$; d'où $x = y$.

De même, si nous avons *trois* quantités x, y, et z et si l'on suppose:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} = \frac{1}{\frac{x+y+z}{3}}.$$

Il s'ensuivrait que

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{3xyz}{yz + xz + xy},$$

soit: $(x+y+z)(yz+xz+xy) = 9xyz$; ou encore:

$$xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + xy^2 + yz^2 + xz^2 + xyz - 9xyz = 0$$
$$x^2z + x^2y + y^2z + xy^2 + yz^2 + xz^2 - 6xyz = 0$$
$$(x^2z - 2xyz + y^2z) + (x^2y - 2xyz + yz^2) + (xy^2 - 2xyz + xz^2) = 0$$
$$z(x-y)^2 + y(x-z)^2 + x(y-z)^2 = 0$$

Mais x, y et z étant (en tant qu'index de prix) des quantités positives, la somme obtenue ne peut égaler 0 que lorsque: $(x-y) = 0$, $(x-z) = 0$ et $(y-z) = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = y = z$.

Et ainsi de suite, quel que soit le nombre des quantités considérées, l'inverse de leur moyenne ne serait égale à la moyenne de leurs inverses que si elles étaient toutes égales entre elles. Or, dans la réalité, une pareille coïncidence des index de tous les articles figurant sur un tableau *d'index numbers* de prix ne se présente jamais. Pour les index des prix, on doit donc dire que *toujours*

$$\frac{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + \ldots + \frac{1}{\beta_n}}{n} \neq 1 : \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n}{n}.$$

L'erreur que l'on commettrait en prenant un membre de cette inégalité pour l'autre serait minime si les quantités considérées ($\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_n$) se rapprochaient entre elles de l'égalité parfaite; cette erreur sera d'autant plus grande que les quantités envisagées diffèrent davantage les unes des autres.

formule repose sur le principe que les rapports des divers index entre eux, dépendant uniquement du rapport entre les prix correspondants, doivent rester les mêmes, pour des prix donnés, quelle que soit la date adoptée comme base de la série des index, c'est-à-dire que $\frac{\mu'}{\beta'} = \frac{\mu}{\beta}$ $\left(\beta' \text{ étant} = 1, \text{ on trouve } \mu' = \frac{\mu}{\beta}\right)$; $\frac{\mu'}{\alpha'} = \frac{\mu}{\alpha}$; $\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha}{\beta}$, et ainsi de suite. Si cette formule était applicable aussi à nos index généraux (arithmétiques simples), on aurait donc: $\frac{I'_m}{I'_a} = \frac{I_m}{I_a}$. Mais I_a, l'index de la date D_a, base de l'ancienne série, est $= 1$; on pourrait donc écrire: $\frac{I'_m}{I'_a} = \frac{I_m}{1}$, soit $I'_m = I_m I'_a$. Or, nous savons déjà (formule 18) que $I'_a \mp \frac{1}{I_b}$. Il s'ensuit donc que:

$$I'_m = I_m I'_a \mp I_m \frac{1}{I_b},$$

(**19**) soit: $I'_m \mp \frac{I_m}{I_b}$,

c'est-à-dire la formule (15), n'étant pas applicable à un des index généraux, n'est pas vraie non plus pour n'importe quel autre de ces index. En d'autres termes, *il est erroné de croire qu'en divisant les index arithmétiques simples donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base, on obtiendrait la série des index généraux calculés sur la nouvelle base.* — L'erreur que l'on commettrait en prenant le membre droit de notre inégalité pour le membre gauche sera, comme nous l'avons déjà remarqué dans la dernière note, d'autant plus forte que les index particuliers diffèrent davantage les uns des autres.

§ 22. — Notre analyse nous amène ainsi aux deux importants corollaires que voici:

1° *Pour changer la base d'une série donnée d'index arithmétiques simples, le seul procédé correct est* de refaire tous les calculs, c'est-à-dire *de calculer, pour chaque date, tous les index particuliers sur la nouvelle base et d'établir les index généraux d'après les index particuliers ainsi obtenus.* — C'est aussi ce que nous avons fait dans le 2e tableau du § 19. — Les changements de base effectués à l'aide de la simple division des index donnés par celui de la date devant servir de nouvelle base doivent donc être considérés comme erronés [1]).

[1]) Les index généraux publiés, par exemple, dans le *Bulletin Mensuel de Statistique* de la Société des Nations, se rapportant à divers pays et ramenés tous à 1913 comme année de base par le procédé de la simple division des index généraux des divers pays par leur index de 1913, sont donc *tous plus ou moins erronés* pour autant qu'il s'agit (comme c'est le plus souvent le cas pour les index des prix de gros) d'index arithmétiques non-pondérés.

2° *Les index généraux arithmétiques simples nous montrent seulement le pourcent de hausse ou de baisse des prix à divers moments par rapport au prix de la date de base, mais ils ne nous permettent pas d'établir la mesure des variations des prix d'un moment à l'autre en dehors de la date de base.*

En effet, soit une série d'index arithmétiques non-pondérés qui ont pour base la date D_a et qui égalent I_b à la date D_b et I_m à la date D_m. Si nous exprimons l'index des prix de D_m sur la base de D_b par I'_m, nous savons (formule 19) que:

$$I'_m \mp \frac{I_m}{I_b},$$

c'est-à-dire le rapport des index généraux de D_m et de D_b tels qu'ils figurent dans notre série $\left(\frac{I_m}{I_b}\right)$ n'exprime pas le niveau des prix de D_m comparé à celui de D_b (I'_m).

Ainsi, pour prendre l'exemple du groupe d'articles G (premier tableau du § 19), si nous avons comme index généraux (arithmétiques simples) 2,17 en 1920 et 1,38 en 1922, il serait érroné de conclure que les prix de 1922 étaient à ceux de 1920 comme 1,38 : 2,17 = 64 : 100, c'est-à-dire que les prix étaient en 1922 de 36 % inférieurs à ceux de 1920. Malgré sa quasi-évidence, une pareille conclusion serait fausse. Et, en réalité, en comparant effectivement les prix de 1922 à ceux de 1920 (2e tableau du § 19), nous trouvons que les prix de 1922 étaient à ceux de 1920 non pas comme 64 à 100, mais comme 73 à 100, marquant ainsi une baisse non pas de 36, mais seulement de 27 %.

Si l'on prend en considération que le but des index des prix n'est pas seulement de montrer l'état des prix à un moment donné par rapport à un point fixe, passé depuis plus ou moins longtemps, mais aussi, sinon surtout, d'indiquer les variations des prix entre deux moments observés quelconques (soit immédiatement voisins, soit plus éloignés l'un de l'autre), on comprend toute l'importance du défaut des index arithmétiques non-pondérés que nous venons de signaler. De plus, l'erreur que l'on commettrait en prenant un des membres de notre inégalité (19) pour l'autre est, comme nous l'avons déjà signalé, d'autant plus grande que les index particuliers sont plus divergents; on doit donc reconnaître que ce défaut des index arithmétiques simples est particulièrement grave de nos jours où, par suite de l'état troublé de la circulation internationale des marchandises, les variations des prix diffèrent dans des proportions énormes d'un article à l'autre. L'erreur ainsi commise, s'ajoutant à l'inexactitude inhérente en général au caractère non-pondéré de ces index, peut nous amener loin de la réalité [1]).

B. Index arithmétiques pondérés.

§ 23. — Pour changer la base d'une série donnée d'index arithmétiques pondérés, on peut procéder de *trois* façons:

1er procédé: division des valeurs globales. — Pour obtenir une série d'index arithmétiques pondérés calculés sur une nouvelle base, on n'a qu'à diviser, pour chaque date, la valeur totale des articles envisagés par leur valeur totale à la date devant servir de nouvelle base.

[1]) Cette erreur deviendrait cependant = 0 si les index particuliers étaient tous égaux entre eux. Il serait, par suite, intéressant d'étudier les variations de cette erreur en fonction du degré de divergence des index particuliers. Pour ce qui concerne ce dernier point, à savoir comment fixer le degré de divergence des index particuliers, nous retrouvons ce problème plus loin (chapitre III).

Si la valeur totale des articles envisagés est désignée par Σv_a pour la date D_a, Σv_b pour la date D_b, Σv_m pour D_m et ainsi de suite, et si nous voulons prendre D_b comme date de base de la nouvelle série d'index généraux, nous pouvons donc dire que ces nouveaux index (J') seront respectivement égaux:

$$J'_a = \frac{\Sigma v_a}{\Sigma v_b};\ J'_b = \frac{\Sigma v_b}{\Sigma v_b} = 1, \text{ et en général}: J'_m = \frac{\Sigma v_m}{\Sigma v_b}. \tag{20}$$

Cette formule n'est, à proprement parler, que la reproduction de la formule (5) et le procédé indiqué n'est qu'une application du procédé de calcul des index arithmétiques pondérés d'après les valeurs globales des articles envisagés, procédé que nous avons déjà examiné plus haut (§ 6).

Appliqué à l'exemple du groupe G, ce procédé se présente comme suit:

Unités (en milliers)	1.200	2.000	25.000	Valeurs globales (1000 francs)			Somme des valeurs globales (1000 fr.)	Index arithmétiques pondérés	
Années	A_1	A_2	A_3	A_1	A_2	A_3		sur la base de 1913	sur la base de 1920
	Prix (francs)								
1913 . . .	5.00	2.00	0.40	6.000	4.000	10.000	20.000	1,00	0,40
1920 . . .	4.80	3.60	1.50	5.760	7.200	37.500	50.460	2,52	1,00
1922 . . .	4.70	2.40	0.80	5.640	4.800	20.000	30.440	1,52	0,60

Divisant la série des sommes des valeurs globales de G par celle de 1913, nous avons obtenu la série des index généraux arithmétiques pondérés sur la base de 1913. Divisant les mêmes sommes des valeurs globales (20.000, 50.460 et 30.440) par celle de 1920 (50.460), nous obtenons la série d'index arithmétiques 40, 100 et 60 ayant pour base l'année 1920.

§ 24. — *2e procédé: division des index généraux donnés.* — Contrairement à ce que nous avons vu pour les index arithmétiques simples, *pour obtenir des index arithmétiques pondérés sur une nouvelle base, on n'a qu'à diviser la série des index arithmétiques pondérés donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base.*

Soient J_a, J_b, J_m, etc. les index arithmétiques pondérés donnés calculés sur la base de D_a et J'_a, J'_b, J'_m, etc. les index cherchés sur la nouvelle base D_b; notre proposition s'exprimera alors par la formule suivante:

$$J'_m = \frac{J_m}{J_b}. \tag{21}$$

En effet, d'après la formule (4), nous savons que $J_b = \Sigma(p\beta)$ et $J_m = \Sigma(p\mu)$; nous pouvons donc dire:

$$\frac{J_m}{J_b} = \frac{\Sigma(p\mu)}{\Sigma(p\beta)} = \frac{p_1\mu_1 + p_2\mu_2 + p_3\mu_3 + \cdots + p_n\mu_n}{p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + p_3\beta_3 + \cdots + p_n\beta_n}.$$

Mais $\beta_1 = \frac{b_1}{a_1}$, $\beta_2 = \frac{b_2}{a_2}, \ldots \beta_n = \frac{b_n}{a_n}$; $\mu_1 = \frac{m_1}{a_1}$, $\mu_2 = \frac{m_2}{a_2}, \ldots \mu_n = \frac{m_n}{a_n}$. D'un autre côté (2), $p_1 = \frac{u_1 a_1}{\Sigma(ua)}$, $p_2 = \frac{u_2 a_2}{\Sigma(ua)}, \ldots p_n = \frac{u_n a_n}{\Sigma(ua)}$. En substituant à β, μ et p leurs valeurs, on obtient:

$$\frac{J_m}{J_b} = \frac{\frac{u_1a_1}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{m_1}{a_1} + \frac{u_2a_2}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{m_2}{a_2} + \frac{u_3a_3}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{m_3}{a_3} + \cdots + \frac{u_na_n}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{m_n}{a_n}}{\frac{u_1a_1}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{b_1}{a_1} + \frac{u_2a_2}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{b_2}{a_2} + \frac{u_3a_3}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{u_na_n}{\Sigma(ua)}\cdot\frac{b_n}{a_n}} = \frac{\frac{u_1m_1}{\Sigma(ua)} + \frac{u_2m_2}{\Sigma(ua)} + \frac{u_3m_3}{\Sigma(ua)} + \cdots + \frac{u_nm_n}{\Sigma(ua)}}{\frac{u_1b_1}{\Sigma(ua)} + \frac{u_2b_2}{\Sigma(ua)} + \frac{u_3b_3}{\Sigma(ua)} + \cdots + \frac{u_nb_n}{\Sigma(ua)}} =$$

$$=\frac{u_1m_1+u_2m_2+u_3m_3+\ldots+u_nm_n}{u_1b_1+u_2b_2+u_3b_3+\ldots+u_nb_n}=\frac{\Sigma(um)}{\Sigma(ub)}.$$

Or, $\Sigma(ub)$, la somme des produits du nombre des unités (u) de chaque article par son prix (b) à la date D_b, présente la valeur totale des articles envisagés à la date D_b, c'est-à-dire $=\Sigma v_b$; de même, $\Sigma(um)$ présente la valeur totale de ces articles à la date D_m, c'est-à-dire $=\Sigma v_m$. Nous pouvons donc écrire:

$$\frac{J_m}{J_b}=\frac{\Sigma v_m}{\Sigma v_b},\ \text{soit (20)}=J_m.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Appliqué à notre exemple du groupe G, ce procédé prend la forme extrêmement simple que voici:

	Index généraux donnés (base 1913)	Index généraux nouveaux (base 1920)
1913	1,00	1,00 : 2,52 = 0,40
1920	2,52	2,52 : 2,52 = 1,00
1922	1,52	1,52 : 2,52 = 0,60

En divisant simplement les index donnés par celui de 1920 (2,52), nous obtenons ainsi les mêmes chiffres que nous avons trouvés plus haut par la division des valeurs globales.

Le procédé de la division des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base, procédé correct lorsqu'il s'agit d'index particuliers (§ 18), mais incorrect si l'on a à faire à des index généraux arithmétiques simples (§ 21), est donc parfaitement légitime aussi quand il s'agit d'index généraux arithmétiques pondérés.

§ 25. — *3e procédé: calcul des index particuliers sur la nouvelle base.* — Reste enfin un procédé beaucoups plus compliqué, analogue à celui applicable aux index arithmétiques simples, qui demande à *refaire d'abord le calcul des index particuliers sur la nouvelle base et d'en tirer ensuite les moyennes pondérées.*

Seulement ici, on doit faire bien attention de *ne pas modifier le poids des divers articles pendant que l'on change la date de base.* Or, cela se produirait nécessairement, comme nous le verrons toute de suite, *si l'on appliquait aux index particuliers calculés sur la nouvelle base les coefficients de poids observés pour l'ancienne.*

Nous avons déjà vu (§ 7, 2°) qu'avec le changement des prix, le poids des divers articles change d'une date à l'autre, de sorte que le poids p_n observé pour un article donné A_n à la date (et aux prix de) D_a n'égale pas p'_n, son poids à une autre date D_b. Lui attribuer à D_b un poids p_n signifie lui attribuer un poids différent de celui avec lequel il figurait dans le calcul des index donnés, pour cette date comme pour toutes les autres, y compris D_a pour laquelle on avait des données directes de l'observation; car le poids de cet article étant p_n à D_b, il ne sera plus, à la date D_a, p_n, mais quelque autre valeur p''_n. — Il en est de même du changement des index particuliers des divers articles provenant du changement de la date de base: si aux index changés nous appliquons les mêmes coefficients de poids qu'aux anciens index, nous changeons le poids des divers articles envisagés [1]). Les coefficients à appliquer aux nouveaux index doivent donc être tels qu'ils ne changent pas les poids observés des divers articles. Cela se rapporte avant tout aux index de la nouvelle date de base lorsque les index particuliers de tous les articles sont mis égaux au même chiffre de 100 (ou 1,00): les coefficients de poids doivent alors être proportionnels aux valeurs globales de chaque article à cette date; ces coefficients nouveaux seront conservés aux autres dates, de sorte que tout changement ultérieur du produit de l'index de chaque article par son coefficient sera l'effet du seul changement de sont prix.

Avant de tirer la moyenne pondérée des index particuliers calculés sur la nouvelle base (D_b), il faut donc établir les valeurs p' marquant le poids des divers articles à cette date de base. Ce calcul se fait du reste d'après la formule générale (2), à savoir:

$$p'_n=\frac{v'_n}{\Sigma v'}=\frac{u_nb_n}{\Sigma(ub)}$$

(v'_n étant la valeur globale de l'article A_n à la date D_b).

Conservant ainsi aux divers articles le même poids que, pour chaque date donnée, ils avaient dans le calcul de l'ancienne série d'index et tirant les moyennes des index particuliers calculés sur la nouvelle base et *ainsi* pondérés, on obtient la série des index généraux cherchés.

Désignons, en effet, pour une date quelconque D_m, les index particuliers des articles A_1, A_2, A_3, ... A_n, calculés sur la base de D_b, respectivement par

$$\mu'_1\left(=\frac{m_1}{b_1}\right),\ \mu'_2\left(=\frac{m_2}{b_2}\right),\ \mu'_3\left(=\frac{m_3}{b_3}\right),\ldots\mu'_n\left(=\frac{m_n}{b_n}\right),$$

[1]) En général, le poids des articles dans la formation de l'index général se traduit par un *produit de deux facteurs:* l'index particulier et le coefficient de poids; si l'un change dans des proportions variant d'un article à l'autre tandis que l'autre demeure invariable, le poids de l'article change; pour que ce poids reste le même, il faut que, pendant qu'un des facteurs change, l'autre change également dans une proportion correspondante.

et leurs poids respectifs, à la date de cette base D_b, par

$$p'_1 = \frac{u_1 b_1}{\Sigma(ub)},\ p'_2 = \frac{u_2 b_2}{\Sigma(ub)},\ p'_3 = \frac{u_3 b_3}{\Sigma(ub)}, \ldots p'_n = \frac{u_n b_n}{\Sigma(ub)};$$

la moyenne pondérée des index particuliers sera alors égale :

$$\frac{p'_1\mu'_1 + p'_2\mu'_2 + p'_3\mu'_3 + \ldots + p'_n\mu'_n}{\Sigma p'},\ \text{soit } (\Sigma p' \text{ étant} = 1) =$$

$$= p'_1\mu'_1 + p'_2\mu'_2 + p'_3\mu'_3 + \ldots + p'_n\mu'_n = \frac{u_1 b_1}{\Sigma(ub)} \cdot \frac{m_1}{b_1} +$$

$$+ \frac{u_2 b_2}{\Sigma(ub)} \cdot \frac{m_2}{b_2} + \frac{u_3 b_3}{\Sigma(ub)} \cdot \frac{m_3}{b_3} + \ldots + \frac{u_n b_n}{\Sigma(ub)} \cdot \frac{m_n}{b_n} =$$

$$= \frac{u_1 m_1 + u_2 m_2 + u_3 m_3 + \ldots + u_n m_n}{\Sigma(ub)} = \frac{\Sigma(um)}{\Sigma(ub)} = \frac{\Sigma v_m}{\Sigma v_b}.$$

Mais d'après la formule (20), $\frac{\Sigma v_m}{\Sigma v_b} = J'_m$. Nous pouvons donc dire que les moyennes arithmétiques pondérées des index particuliers calculés sur la nouvelle base nous donnent les index généraux cherchés, soit

$$\Sigma(p'\mu') = J'_m. \tag{22}$$

Ce qu'il fallait démontrer. (Cette formule n'est d'ailleurs qu'une reproduction de la formule 4.)

Si nous appliquons ce procédé à notre exemple du groupe d'articles G, nous obtenons les chiffres suivants (pour les poids des articles en 1920, voyez plus haut, § 7, 2°; pour les index particuliers calculés sur la base de 1920, voyez § 19, 2e tableau):

Coefficients de poids (p')	0,114	0,143	0,743	Index × coefficients de poids ($p'\mu'$)			Index arithmétiques pondérés $\Sigma(p'\mu')$
Années	A_1	A_2	A_3				
	Index particuliers (μ')			A_1	A_2	A_3	
1913	1,04	0,56	0,27	0,119	0,080	0,201	0,40
1920	1,00	1,00	1,00	0,114	0,143	0,743	1,00
1922	0,98	0,67	0,53	0,112	0,096	0,394	0,60

Ce sont les mêmes chiffres (40, 100 et 60) que nous avons obtenus également par les deux autres procédés.

§ 26. — *Remarques.* — Nous nous arrêtons un peu plus longuement sur ce dernier procédé. Car, à première vue, on peut être porté à multiplier les index particuliers, calculés sur la nouvelle base, par les coefficients de poids qui étaient appliqués aux anciens index, sans s'apercevoir que le produit du même coefficient par un index changé confère au même article une importance relative, un poids changé [1]).

Il ne sera peut-être pas inutile de voir sur notre exemple concret du groupe G quel serait le résultat si l'on avait appliqué aux index changés, aux index calculés sur une nouvelle base (1920), les coefficients appliqués aux index anciens (qui avaient pour base 1913):

Coefficients de poids (p)	0,3	0,2	0,5	Index × coefficients de poids ($p\mu'$)			Index arithmétiques pondérés $\Sigma(p\mu')$
Annees	A_1	A_2	A_3				
	Index particuliers (μ')			A_1	A_2	A_3	
1913	1,04	0,56	0,27	0,312	0,112	0,135	0,56
1920	1,00	1,00	1,00	0,300	0,200	0,500	1,00
1922	0,98	0,67	0,53	0,294	0,134	0,265	0,69

On voit combien le résultat serait différent des vrais index que nous avons obtenus plus haut, et de combien les index *ainsi* calculés sur la base de 1920 s'écarteraient du mouvement des prix tel qu'il se présente d'après les index ayant 1913 comme base. En effet, d'après les index donnés (ayant pour base 1913), la hausse des prix de 1913 à 1920 a été de 152 %, l'index général ayant passé de 100 à 252 (§§ 5—6) tandis que, d'après les index *ainsi* transformés, la hausse de 1913 à 1920 n'aurait été que de 80 % l'index général ayant passé de 56 à 100!

Et rien d'étonnant. Car, comme nous l'avons vu d'après les chiffres des valeurs globales des articles envisagés, chiffres fournis par l'observation, le poids de l'article A_1 était, en 1913, égal à 0,30 de tout le groupe G; or, si l'on appliquait le coefficient 0,30 à notre *nouvel* index particulier de A_1, cet article rentrerait dans la formation de l'index général de 1913 pour $\left(\frac{0,312}{0,56} =\right)$ 0,56; par contre A_3, dont le poids était en 1913 de 0,50, n'entrerait dans la formation de l'index général de cette année que pour $\left(\frac{0,135}{0,56} =\right)$ 0,24. De même, en 1920, tandis que la valeur globale de A_1 faisait seulement 0,11 $\left(= \frac{5,760}{50,460}\right)$ de la valeur totale du groupe G, cet article entrerait pourtant dans la formation de l'index général pour 0,30; par contre A_3, dont la valeur globale constituait 0,74 de la valeur totale de G, n'entrerait dans le calcul de l'index général de cette année qu'avec un

[1]) Nous avons critiqué plus haut (§ 7, 1°) la réalité du postulat des index pondérés d'après lequel la quantité de chaque article reste la même malgré les variations des prix; mais cette critique n'a rien à faire avec la question qui nous occupe ici et ne confère aucun droit de changer arbitrairement le poids des divers articles. Si un pareil arbitraire était admis, quelle serait encore la raison d'être de la pondération en général?

poids de 0,50. Or, les moyennes pondérées dépendent du poids des éléments dont la moyenne est tirée. *En changeant ainsi tout à fait arbitrairement le poids des divers articles,* par l'application aux nouveaux index de coefficients de poids qui ne leur sont pas propres et qui contredisent les données de l'observation, *nous changeons arbitrairement aussi les index généraux;* ils s'écartent alors nécessairement de la marche des prix tracée par les index donnés ou par les index transformés correctement qui, tout en changeant la date de base conservent pourtant aux divers articles le poids correspondant à la date considérée.

§ 27. — Nous avons remarqué plus haut (§ 20), en parlant des index arithmétiques simples, que l'inverse de la moyenne n'est pas égal à la moyenne des inverses et que, par suite, l'index général de l'ancienne date de base dans la nouvelle série n'est pas égal à l'inverse de l'index de la nouvelle date de base dans l'ancienne série. Que l'inverse de la moyenne n'est pas égal à la moyenne des inverses, cela est vrai non seulement pour les moyennes arithmétiques simples mais aussi pour les pondérées [1]).

Par conséquent, *si les index particuliers, calculés sur la nouvelle base D_b, avaient les mêmes coefficients que ceux calculés sur la base D_a,* la moyenne de ceux-là (c'est-à-dire l'index général nouveau) à la date D_a ne saurait être égale à l'inverse de la moyenne de ceux-ci (c'est-à-dire de l'index général ancien) à la date D_b (car n'oublions pas que les index particuliers $a' = \frac{1}{\beta}$ d'après la formule 16).

C'est ce qu'on trouverait effectivement aussi pour notre exemple du groupe G si l'on conservait aux index changés les coefficients anciens (cf. notre tableau du § précédent): l'index général de 1913 dans la nouvelle série ne serait nullement égal à l'inverse de l'index général de 1920 dans l'ancienne série ayant pour base 1913, le premier étant égal 0,56 tandis que l'inverse de l'autre est $\frac{1}{2{,}52} = 0{,}40$.

Cette inégalité entre la moyenne des inverses et l'inverse de la moyenne, par contre, ne s'applique pas aux index arithmétiques pondérés correctement calculés, car, comme nous l'avons vu, le changement des index particuliers entraîne nécessairement, pour les mêmes poids des articles envisagés, des coefficients changés. Et, comme nous l'avons vu encore, on peut réellement passer d'une base d'index arithmétiques pondérés à l'autre à l'aide d'une simple division des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base. Cette propriété (formule 21) appliquée à l'index J'_a de la date de l'ancienne base aboutit précisément à la conclusion que:

$$J'_a = \frac{J_a}{J_b} = \frac{1}{J_b}, \tag{23}$$

c'est-à-dire *l'index arithmétique pondéré de l'ancienne date de base dans la nouvelle série d'index est égal à l'inverse de l'index de la date de la nouvelle base dans l'ancienne série.*

§ 28. — Le fait que le passage d'une base à l'autre peut être effectué, pour les index arithmétiques pondérés, à l'aide de la simple division des index donnés par l'index de la date servant de nouvelle base, confère aux index arithmétiques pondérés une supériorité considérable par rapport aux non-pondérés. — D'abord, cette facilité de calculer des index nouveaux sur une base changée constitue déjà un avantage important. On s'en rendra compte surtout si l'on prend en considération que rarement sont publiés les index particuliers dont les index généraux sont tirés et plus rarement encore les prix nécessaires pour le calcul des index particuliers sur une nouvelle base. Par suite, le public comme les chercheurs scientifiques ne disposent le plus souvent que des index généraux construits sur une base donnée. De cette façon, si, pour les besoins de la comparaison, on se voit dans la nécessité de changer la base des index donnés et que l'on ait devant soi les index arithmétiques simples, on n'a en réalité qu'une alternative: ou bien faire ce calcul incorrectement en divisant quand même les index donnés par celui de la date de la nouvelle base ou, par un scrupule de vérité scientifique, renoncer à la recherche.

Et puis, les index arithmétiques pondérés nous montrent non seulement le niveau des prix par rapport au niveau de base, comme le font les non-pondérés, mais permettent également d'établir les variations des prix d'un moment à l'autre en dehors de la date de base, comparaison qu'on ne peut pas faire d'après les index

---

[1]) Supposons, en effet, le contraire et admettons que l'inverse de la moyenne pondérée des *deux* quantités x et y, ayant respectivement pour coefficients $\varkappa$ et l, soit égal à la moyenne pondérée des inverses de ces quantités. On aurait alors:

$$1 : \frac{\varkappa x + ly}{\varkappa + l} = \frac{\varkappa\frac{1}{x} + l\frac{1}{y}}{\varkappa + l}, \text{ soit: } \frac{\varkappa + l}{\varkappa x + ly} = \frac{\varkappa y + lx}{(\varkappa + l)\,xy}$$

d'où: $(\varkappa + l)^2\,xy = (\varkappa x + ly)(\varkappa y + lx)$, soit: $\varkappa^2 xy + 2\varkappa lxy +$
$+ l^2 xy = \varkappa^2 xy + \varkappa lx^2 + \varkappa ly^2 + l^2 xy;$

ou: $\varkappa lx^2 - 2\varkappa lxy + \varkappa ly^2 = 0$; soit; $\varkappa l(x - y)^2 = 0$.

Mais ni $\varkappa$, ni l n'étant $= 0$, il faut conclure que $x - y = 0$, soit $x = y$.

D'une façon analogue, on arrive à la même conclusion pour des moyennes pondérées tirées de trois quantités et plus. En d'autres termes, pour la moyenne pondérée aussi, l'inverse de la moyenne ne serait égal à la moyenne des inverses que si les éléments dont la moyenne est tirée étaient tous égaux entre eux, hypothèse jamais réalisée pour les index généraux des prix.

arithmétiques non-pondérés (§ 22, 2°). Car la comparaison du niveau des prix à des moments différents (D_m et D_b) en dehors de la date de base n'est au fond autre chose qu'un calcul de l'index des prix à un moment donné (D_m), l'index de l'autre moment (D_b) étant pris pour nouvelle base.

Ainsi, par exemple, si les index arithmétiques pondérés, calculés sur la base de 1913, marquent pour 1920 et 1922 respectivement 2,52 et 1,52 et si nous voulons établir l'importance de la baisse de 1922 par rapport au niveau de 1920, nous n'avons qu'à diviser l'index de 1922 par celui de 1920 pour obtenir le chiffre cherché; nous trouvons ainsi $\frac{1,52}{2,52} = 0,60$; en d'autres termes, l'index général des prix était en 1922 de 40 °/₀ en baisse sur celui de 1920. Et nous avons vu (§§ 23—25) que, les prix de 1920 étant pris comme base (1,00), l'index de 1922 marque réellement 0,60.

En général, pour établir l'importance des variations des prix d'une date à l'autre, nous n'avons qu'à prendre le rapport des index des dates considérés. Ce qui est incorrect pour des index arithmétiques simples est ainsi parfaitement juste lorsqu'il s'agit d'index arithmétiques pondérés.

C. Index géométriques simples.

§ 29. — Dans le cas d'index géométriques simples (comme dans celui d'index arithmétiques pondérés), on peut changer la base des index généraux donnés de deux manières: 1° On peut *remonter aux éléments dont ces index ont été tirés et calculer les nouveaux index par l'une des méthodes qui sont, en général, valables pour le calcul de cette espèce d'index généraux;* — 2° on peut simplement *diviser les index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base.* — D'une façon plus détaillée, on peut ainsi distinguer les *quatre* procédés suivants:

Premier procédé: on calcule les **index particuliers** *sur la nouvelle base et l'on en prend ensuite les moyennes géométriques simples.*

Soient

$$\mu_1'\left(=\frac{m_1}{b_1}\right),\ \mu_2'\left(=\frac{m_2}{b_2}\right),\ \mu_3'\left(=\frac{m_3}{b_3}\right),\ldots\mu_n'\left(=\frac{m_n}{b_n}\right)$$

les index particuliers des articles A_1, A_2, A_3, ... A_n à une date quelconque D_m calculés sur la nouvelle base D_b. Leur index général géométrique simple i_m' sera ainsi:

$$i_m' = \sqrt[n]{\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_3'\ldots\mu_n'}. \qquad (24)$$

C'est l'application pure et simple de notre formule (6).

Appliqué à l'exemple concret du groupe G, ce procédé se présente comme suit:

Années	Index particuliers			Index géométriques simples
	A_1	A_2	A_3	
1913	1,04	0,56	0,27	$\sqrt[3]{1,04 \cdot 0,56 \cdot 0,27} = 0,54$
1920	1,00	1,00	1,00	$\sqrt[3]{1,00^3} \;\ldots\ldots = 1,00$
1922	0,98	0,67	0,53	$\sqrt[3]{0,98 \cdot 0,67 \cdot 0,53} = 0,70$

2e procédé: on divise la moyenne géométrique des **prix** *des divers articles, constatés pour chaque date, par la moyenne géométrique de leurs prix à la nouvelle date de base.*

En effet, en substituant, dans la dernière formule, $\frac{m_1}{b_1}$ à μ_1', $\frac{m_2}{b_2}$ à μ_2', $\frac{m_3}{b_3}$ à μ_3' et ainsi de suite on trouve:

$$i_m' = \sqrt[n]{\frac{m_1}{b_1}\cdot\frac{m_2}{b_2}\cdot\frac{m_3}{b_3}\cdots\frac{m_n}{b_n}} = \frac{\sqrt[n]{m_1 m_2 m_3\ldots m_n}}{\sqrt[n]{b_1 b_2 b_3\ldots b_n}}. \qquad (25)$$

Cette dernière formule n'est autre chose que la reproduction de la formule (7).

Appliqué à l'exemple du groupe G, ce procédé donne le résultat suivant:

Années	Prix (francs)			Moyennes géométriques des prix	Index géométriques simples (Moyenne donnée divisée par celle de 19..0)
	A_1	A_2	A_3		
1913	5.00	2.00	0.40	$\sqrt[3]{5 \cdot 2 \cdot 0,4} = 1,59$	0,54
1920	4.80	3.60	1.50	$\sqrt[3]{4,8 \cdot 3,6 \cdot 1,5} = 2,96$	1,00
1922	4.70	2.40	0.80	$\sqrt[3]{4,7 \cdot 2,4 \cdot 0,8} = 2,08$	0,70

Le résultat est ainsi le même que celui obtenu par le premier procédé.

3e procédé: on divise la moyenne géométrique des **valeurs globales** *des divers articles, constatées pour chaque date, par la moyenne géométrique de leurs valeurs globales à la date de la nouvelle base.*

Soient v_1', v_2', v_3', ... v_n' les valeurs globales des divers articles envisagés à la date de la nouvelle base D_b et v_1'', v_2'', v_3'', ... v_n'' leurs valeurs globales à une autre date quelconque D_m. D'après la formule (8) nous pouvons écrire:

$$i_m' = \frac{\sqrt[n]{v_1'' v_2'' v_3'' \ldots v_n''}}{\sqrt[n]{v_1' v_2' v_3' \ldots v_n'}}. \qquad (26)$$

Appliqué au groupe d'articles G, ce procédé donne les chiffres suivants:

Années	Valeurs globales (1000 francs)			Moyennes géométriques des valeurs globales (1000 francs)	Index géométriques simples (rapport de la moyenne donnée à celle de 1920)
	A_1	A_2	A_3		
1913	6.000	4.000	10.000	$\sqrt[3]{6000 \cdot 4000 \cdot 10\,000}$ . . . = 6.214	0,54
1920	5.760	7.200	37.500	$\sqrt[3]{5760 \cdot 7200 \cdot 37\,500}$ . . . = 11.586	1,00
1922	5.640	4.800	20.000	$\sqrt[3]{5640 \cdot 4800 \cdot 20\,000}$ . . . = 8.155	0,70

Ici encore le résultat est le même.

§ 30. — 4° procédé: *on divise les index généraux donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base,* soit:

$$i'_m = \frac{i_m}{i_b}. \tag{27}$$

En effet, nous savons que:

$$\frac{m_1}{a_1} = \mu_1;\ \frac{m_2}{a_2} = \mu_2;\ \frac{m_3}{a_3} = \mu_3; \ldots \frac{m_n}{a_n} = \mu_n;$$

d'où: $m_1 = a_1\mu_1$; $m_2 = a_2\mu_2$; $m_3 = a_3\mu_3$; ... $m_n = a_n\mu_n$;

de même:

$$\frac{b_1}{a_1} = \beta_1;\ \frac{b_2}{a_2} = \beta_2;\ \frac{b_3}{a_3} = \beta_3; \ldots \frac{b_n}{a_n} = \beta_n;$$

d'où: $b_1 = a_1\beta_1$; $b_2 = a_2\beta_2$; $b_3 = a_3\beta_3$; ... $b_n = a_n\beta_n$.

Substituant, dans la formule (25), à m_1, m_2, m_3, etc. et à b_1, b_2, b_3, etc. leurs valeurs, nous pouvons écrire:

$$i'_m = \sqrt[n]{\frac{m_1}{b_1} \cdot \frac{m_2}{b_2} \cdot \frac{m_3}{b_3} \cdots \frac{m_n}{b_n}} = \sqrt[n]{\frac{a_1\mu_1}{a_1\beta_1} \cdot \frac{a_2\mu_2}{a_2\beta_2} \cdot \frac{a_3\mu_3}{a_3\beta_3} \cdots \frac{a_n\mu_n}{a_n\beta_n}} =$$

$$= \sqrt[n]{\frac{\mu_1\mu_2\mu_3 \ldots \mu_n}{\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n}} = \frac{\sqrt[n]{\mu_1\mu_2\mu_3 \ldots \mu_n}}{\sqrt[n]{\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_n}} = \frac{i_m}{i_b}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, dans l'exemple du groupe G, où les index géométriques simples, calculés sur la base de 1913, sont respectivement 1,00, 1,86 et 1,31 pour 1913, 1920 et 1922, on n'a qu'à diviser ces index par 1,86 pour obtenir les index nouveaux ayant pour base 1920. On trouve alors les index nouveaux que voici:

1913 . . . . 1,00 : 1,86 = 0,54
1920 . . . . 1,86 : 1,86 = 1,00
1922 . . . . 1,31 : 1,86 = 0,70

Ce sont les mêmes index que nous avons obtenus par les autres procédés.

§ 31. — Le fait que les nouveaux index géométriques simples peuvent être déduits des anciens à l'aide d'une simple division des index généraux donnés par l'index de la date servant de nouvelle base a pour ces index des conséquences analogues à celles que nous avons vues pour les index arithmétiques pondérés. Notons en particulier:

1° *L'index géométrique simple de l'ancienne date de base dans la nouvelle série d'index est égal à l'inverse de l'index de la nouvelle date de base dans l'ancienne série.*

En effet, d'après la formule (27),

$$i'_a = \frac{i_a}{i_b} = \frac{1}{i_b}. \tag{28}$$

Ceci n'a rien de surprenant, car *l'inverse de la moyenne géométrique de plusieurs quantités est égal à la moyenne géométrique des inverses de ces quantités.* — En effet,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2a_3 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2a_3 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdots \frac{1}{a_n}}.$$

2° Les index géométriques simples ne montrent pas seulement le niveau des prix à divers moments par rapport à la date de base, mais *permettent également d'établir l'importance des variations des prix d'un moment à l'autre en dehors de la date de base.* — Car $\frac{i_m}{i_b} = i'_m$, c'est-à-dire le rapport des index de deux dates (D_m et D_b) exprime bien l'index des prix à un de ces moments (D_m), l'autre (D_b) étant prix comme base de comparaison.

D. Index géométriques pondérés.

§ 32. — Pour ce qui concerne le changement de base des index géométriques pondérés, notons d'abord les deux propriétés suivantes de cette espèce d'index:

1° *Si l'on divise une série d'index géométriques pondérés donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base, on arrive au même résultat qu'en prenant les moyennes géométriques pondérées des index particuliers calculés sur la nouvelle base et affectés de coefficients de poids égaux à ceux des index calculés sur l'ancienne base.*

Si nous conservons aux lettres les significations que nous leur avons données jusqu'ici, la moyenne géométrique pondérée des index particuliers d'une date quelconque D_m, calculés sur la nouvelle base D_b et affectés de coefficients de poids (p) égaux à ceux des index calculés sur l'ancienne base (D_a), prend l'expression suivante:

$$\sqrt[\Sigma p]{\left(\frac{m_1}{b_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{m_2}{b_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{m_3}{b_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{m_n}{b_n}\right)^{p_n}},$$

soit, en mettant $\Sigma p = 1$:

$$\left(\frac{m_1}{b_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{m_2}{b_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{m_3}{b_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{m_n}{b_n}\right)^{p_n}.$$

Mais (§ 30):

$$m_1 = a_1\mu_1;\ m_2 = a_2\mu_2;\ m_3 = a_3\mu_3; \ldots m_n = a_n\mu_n;$$

$$b_1 = a_1\beta_1;\ b_2 = a_2\beta_2;\ b_3 = a_3\beta_3; \ldots b_n = a_n\beta_n.$$

Nous pouvons donc dire:

$$\left(\frac{m_1}{b_1}\right)^{p} \cdot \left(\frac{m_2}{b_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{m_3}{b_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{m_n}{b_n}\right)^{p_n} =$$

$$= \left(\frac{a_1\mu_1}{a_1\beta_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{a_2\mu_2}{a_2\beta_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{a_3\mu_3}{a_3\beta_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{a_n\mu_n}{a_n\beta_n}\right)^{p_n} =$$

$$= \left(\frac{\mu_1}{\beta_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{\mu_2}{\beta_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{\mu_3}{\beta_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{\mu_n}{\beta_n}\right)^{p_n} = \frac{\mu_1^{p_1}\,\mu_2^{p_2}\,\mu_3^{p_3} \cdots \mu_n^{p_n}}{\beta_1^{p_1}\,\beta_2^{p_2}\,\beta_3^{p_3} \cdots \beta_n^{p_n}}.$$

Or, d'après la formule (10),

$$\beta_1^{p_1} \cdot \beta_2^{p_2} \cdot {}_3^{p_3} \cdots \beta_n^{p_n} = j_b \text{ et } \mu_1^{p_1} \cdot \mu_2^{p_2} \cdot \mu_3^{p_3} \cdots \mu_n^{p_n} = j_m.$$

On peut donc écrire:

$$\left(\frac{m_1}{b_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{m_2}{b_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{m_3}{b_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{m_n}{b_n}\right)^{p_n} = \frac{j_m}{j_b}. \qquad \textbf{(29)}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, pour reprendre notre exemple, nous trouvons (1920 pris comme base):

Coefficients de poids (des anciens index)	0,3	0,2	0,5	Moyennes géométriques pondérées des index particuliers	Index géométriques pondérés ayant pour base 1913 (d'après § 12)	Index géométriques donnés divisés par l'index de 1920
Années	A_1	A_2	A_3			
	Index particuliers					
1913	1,04	0,56	0,27	$1{,}04^{0,3} \cdot 0{,}56^{0,2} \cdot 0{,}27^{0,5}$. . = 0,47	1,00	0,47
1920	1,00	1,00	1,00	$1{,}00^{1,0}$ . . . . = 1,00	2,15	1,00
1922	0,98	0,67	0,53	$0{,}98^{0,3} \cdot 0{,}67^{0,2} \cdot 0{,}53^{0,5}$. . = 0,67	1,44	0,67

On arrive donc aux mêmes résultats en prenant les moyennes géométriques *ainsi* pondérées des index particuliers calculés sur la base de 1920 qu'en divisant les index donnés (ayant pour base 1913) par 2,15, c'est-à-dire par l'index de 1920.

2° Cependant, nous avons déjà vu plus haut (§ 7, 2°, et §§ 25—26) que, si l'on applique aux index calculés sur une nouvelle base les mêmes coefficients qu'aux anciens, on change arbitrairement le poids des divers articles et, par suite, aussi les moyennes des index de leurs prix. Les moyennes provenant de cette pondération inexacte ne coïncident, par conséquent, pas avec les vraies moyennes pondérées des index particuliers, c'est-à-dire avec les index généraux. En d'autres termes,

$$\left(\frac{m_1}{b_1}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{m_2}{b_2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{m_3}{b_3}\right)^{p_3} \cdots \left(\frac{m_n}{b_n}\right)^{p_n} \mp j'_m;$$

or, le membre gauche de notre inégalité est, comme nous venons de voir, égal à $\frac{j_m}{j_b}$. Il s'ensuit donc que

$$\textbf{(30)} \qquad \frac{j_m}{j_b} \mp j'_m,$$

c'est-à-dire, malgré la concordance des résultats obtenus par les deux procédés de calcul ou, plus exactement, par suite de cette concordance, *ces deux procédés se montrent également inaptes à établir les index géométriques pondérés sur une base nouvelle.* En particulier, la division des index géométriques pondérés donnés par l'index de la nouvelle date de base ne nous donne pas les index généraux cherchés.

§ 33. — L'établissement des nouveaux index géométriques pondérés ne peut donc se faire que d'après les procédés généraux du calcul de ce genre d'index (§§ 13—15), en tenant compte de l'état de prix (b) à la nouvelle date de base et des coefficients (p') qu'il faut attribuer aux index particuliers modifiés afin qu'ils correspondent bien aux poids des divers articles. En d'autres termes, les index nouveaux peuvent être calculés d'après l'un des *trois* procédés suivants:

1° Par le procédé des *index particuliers* (d'après la formule 10). Nous obtenons alors:

$$j'_m = \mu_1'^{p'_1}\,\mu_2'^{p'_2}\,\mu_3'^{p'_3} \cdots \mu_n'^{p'_n}. \qquad \textbf{(31)}$$

2° Par le procédé des *rapports des prix des articles envisagés* (d'après la formule 11). On trouve ainsi:

(32) $$j'_m = \frac{m_1^{p'_1}\, m_2^{p'_2}\, m_3^{p'_3} \dots m_n^{p'_n}}{b_1^{p'_1}\, b_2^{p'_2}\, b_3^{p'_3} \dots b_n^{p'_n}}.$$

3° Par le procédé des rapports des valeurs globales (formule 13). On a ainsi:

(33) $$j'_m = \frac{v_{m(1)}^{p'_1}\, v_{m(2)}^{p'_2}\, v_{m(3)}^{p'_3} \dots v_{m(n)}^{p'_n}}{v_{b(1)}^{p'_1}\, v_{b(2)}^{p'_2}\, v_{b(3)}^{p'_3} \dots v_{b(n)}^{p'_n}}.$$

Dans ces formules, v_m veut dire la valeur globale de chaque article à la date D_m (donc: $v_{m(1)}$ = la valeur de l'article A_1 à cette date; $v_{m(2)}$ = la valeur, à cette date, de l'article A_2, etc.); v_b signifie la valeur globale des articles à la nouvelle date de base D_b; p' signifie le coefficient de poids à attribuer à chaque article qui, comme nous l'avons vu (§ 25), est égal:
$$p'_n = \frac{v_{b(n)}}{\sum v_b} = \frac{u_n b_n}{\sum (ub)}.$$

Appliqués à l'exemple de notre groupe d'articles G, ces procédés se présentent comme suit:

Articles		A_1	A_2	A_3	Moyennes géométriques pondérées	Index géométriques pondérés (rapports des moyennes)
Coefficients de poids		0,114	0,143	0,743		
Index particuliers (base 1920)	1913	1,04	0,56	0,27	$1,04^{0,114} \cdot 0,56^{0,143} \cdot 0,27^{0,743} = 0,35$	0,35
	1920	1,00	1,00	1,00	$1,00^{0,114} \cdot 1,00^{0,143} \cdot 1,00^{0,743} = 1,00$	1,00
	1922	0,98	0,67	0,53	$0,98^{0,114} \cdot 0,67^{0,143} \cdot 0,53^{0,743} = 0,59$	0,59
Prix (francs)	1913	5. 00	2. 00	0. 40	$5^{0,114} \cdot 2^{0,143} \cdot 0,4^{0,743} = 0,67$	0. 35
	1920	4. 80	3. 60	1. 50	$4,8^{0,114} \cdot 3,6^{0,143} \cdot 1,5^{0,743} = 1,94$	1. 00
	1922	4. 70	2. 40	0. 80	$4,7^{0,114} \cdot 2,4^{0,143} \cdot 0,8^{0,743} = 1,15$	0. 59
Valeurs globales (1000 fr.)	1913	6. 000	4. 000	10. 000	$6000^{0,114} \cdot 4000^{0,143} \cdot 10.000^{0,743} = 8.275,7$	0. 35
	1920	5. 760	7. 200	37. 500	$5760^{0,114} \cdot 7200^{0,143} \cdot 37.500^{0,743} = 23.921,1$	1. 00
	1922	5. 640	4. 800	20. 000	$5640^{0,114} \cdot 4800^{0,143} \cdot 20.000^{0,743} = 14.116,6$	0. 59

Les index généraux ainsi obtenus (35, 100 et 59) diffèrent donc beaucoup de ceux que l'on obtiendrait à l'aide de la division des index généraux ayant pour base 1913 par l'index de 1920 (respectivement: 47, 100 et 67; — § 32).

§ 34. — *Corollaires.* — 1° Il résulte de la formule (30) que: $j'_a \neq \frac{j_a}{j_b}$; mais j_a, l'index de l'ancienne date de base (D_a) dans l'ancienne série d'index, étant = 1, on peut donc écrire:

(34) $$j'_a \neq \frac{1}{j_b},$$

c'est-à-dire *l'index géométrique pondéré de la date de l'ancienne base dans la nouvelle série n'est pas égal à l'inverse de l'index de la date de la nouvelle base dans l'ancienne série.*

2° Il résulte de la même formule (30) que les index géométriques pondérés (comme les index arithmétiques simples) *ne permettent pas d'établir l'importance relative de la variation des prix d'un moment à l'autre en dehors de la date de base.* — Car $\frac{j_m}{j_b} \neq j'_m$, c'est-à-dire le rapport des index de deux dates (D_m et D_b) ne nous donne pas le niveau des prix d'une date (D_m), celui de l'autre date (D_b) étant pris comme base de comparaison.

Ainsi, dans notre exemple, où (l'année 1913 étant prise comme base) l'index géométrique pondéré est de 2,15 en 1920 et de 1,44 en 1922, on ne peut pas dire que le niveau des prix soit, en 1922, $\frac{1,44}{2,15}$ ou 67 % de leur hauteur de 1920 marquant ainsi une baisse de 33 % par rapport à 1920; car, comme nous l'avons vu (§ 33), les prix de 1920 étant mis égaux à 100, ceux de 1922 ne sont que 59, accusant ainsi une baisse de 41 % sur 1920.

3° Comme nous avons vu (formules 29 et 32), toute la différence entre $\frac{j_m}{j_b}$ et j'_m provient du fait que les coefficients de poids (p et p') ne sont pas les mêmes pour les index particuliers calculés sur l'ancienne base et pour ceux calculés sur la nouvelle. La différence entre $\frac{j_m}{j_b}$ et j'_m ou, si l'on préfère, l'erreur que l'on commettrait en divisant la série d'index généraux donnée par l'index de la nouvelle date de base afin d'obtenir la nouvelle série d'index généraux, sera donc d'autant plus grande que p' diffère davantage de p. Or, nous savons (§ 7, 2°) que p' diffère d'autant plus de p que les index particuliers sont plus divergents entre eux (si les index particuliers étaient tous égaux entre eux, p' serait $= p$). Il s'ensuit donc que pour les index géométriques pondérés (comme pour les index arithmétiques simples — § 22, 2° note), *l'erreur que l'on commettrait en prenant* $\frac{j_m}{j_b} = j'_m$ *varie avec le degré de divergence des index particuliers;* elle serait $= 0$ dans le cas, d'ailleurs purement théorique, où tous les index particuliers seraient égaux entre eux. Nous voici donc pour la 3e fois devant l'utilité qu'il y aurait d'établir le degré de divergance des index particuliers.

§ 35. — *Remarque.* — Les index géométriques pondérés présentent ainsi des caractères qui sont en quelque sorte l'opposé de ce que nous avons constaté pour les index *arithmétiques* pondérés. Nous savons que l'inverse de la moyenne arithmétique de plusieurs quantités n'est pas égal à la moyenne des inverses de ces quantités; cependant, l'index arithmétique pondéré de l'ancienne date de base dans la nouvelle série d'index est égal à l'inverse de l'index de la nouvelle date de base dans l'ancienne série et cela grâce au fait que les coefficients de poids des index particuliers ne sont pas les mêmes que ceux des inverses de ces mêmes index. Par contre, l'inverse de la moyenne géométrique est égal à la moyenne géométrique des inverses; mais l'index géométrique pondéré de l'ancienne date de base dans la nouvelle série d'index n'est pas égal à l'inverse de l'index de la nouvelle date de base dans l'ancienne série précisément grâce au même fait que les coefficients de poids ne sont pas les mêmes pour les index particuliers et leurs inverses. Il s'ensuit que, tandis que les index arithmétiques pondérés (par opposition aux non-pondérés) peuvent être établis sur une nouvelle base au moyen d'une simple division des index donnés par l'un d'entre eux, les index géométriques pondérés (aussi par opposition aux non-pondérés) ne peuvent pas être établis sur une nouvelle base par ce simple procédé. Il s'ensuit encore que, tandis que les index arithmétiques pondérés nous permettent de comparer les niveaux des prix aussi pour des moments pris en dehors de la date de base, les index géométriques pondérés ne nous le permettent pas.

On doit reconnaître dans ces conditions que les index géométriques pondérés, qui présentent toutes les difficultés du calcul des index pondérés (à un degré peut-être particulièrement fort), n'offrent pourtant, au point de vue qui nous occupe ici, aucun des avantages des index pondérés arithmétiques.

§ 36. — *Résumé du chapitre:*

a) On peut changer la date de base d'une série d'index généraux donnés par des ***procédés de deux espèces:*** 1° *en remontant aux éléments* dont les index donnés ont été tirés et en calculant, d'après ces éléments, les nouveaux index par l'un des procédés normaux de calcul d'index généraux, procédés exposés dans le 1er chapitre de cette étude; 2° *en divisant les index donnés par celui d'entre eux qui correspond à la date de la nouvelle base.*

b) Ce dernier procédé, de beaucoup le plus simple et, le plus souvent, le seul réalisable, *n'est correct que par rapport à des séries d'index arithmétiques pondérés ou géométriques non-pondérés;* il est toujours plus ou moins erroné s'il s'agit d'index arithmétiques simples ou géométriques pondérés.

c) Seuls les index arithmétiques pondérés et les index géométriques simples permettent de fixer l'importance des variations des prix d'un moment à l'autre en dehors de la date de base; la fixation de ces variations d'après des index arithmétiques simples ou géométriques pondérés est toujours plus ou moins erronée.

d) L'erreur des calculs mentionnés sous b) et c) et effectués à l'aide d'index arithmétiques simples ou géométriques pondérés varie en fonction du degré de divergence des index particuliers: elle augmente et diminue avec l'augmentation et la diminution de celle-ci et deviendrait nulle dans le cas, d'ailleurs irréel, où tous les index particuliers seraient égaux entre eux.

e) Au point de vue des problèmes qui nous occupent ici, *les index arithmétiques se montrent de beaucoup plus avantageux quand il s'agit d'index pondérés et les index géométriques lorsqu'il s'agit d'index non-pondérés.*

Chapitre III.

Les variations des prix et les écarts entre index arithmétiques et index géométriques.

§ 37. — Entre index arithmétiques et index géométriques, pondérés ou non, la différence est la même qu'entre moyennes arithmétiques et moyennes géométriques en général.

Comme on le sait, la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives est plus petite que leur moyenne arithmétique et cette différence est d'autant plus forte que les éléments dont les moyennes sont tirées diffèrent davantage les uns des autres. — Il s'en suit:

1° *Pour les mêmes prix* — et méthode de pondération, s'il s'agit d'index pondérés — *l'index géo-*

métrique se trouve toujours au-dessous de l'index arithmétique, à l'exception du cas (qui, en dehors de la date de base, est d'ailleurs purement théorique) où tous les articles envisagés accuseraient les mêmes index particuliers; dans un cas pareil, l'index géométrique serait égal à l'index arithmétique.

C'est ainsi que dans l'exemple du groupe G, nous avons trouvé les index suivants:

		Sur la base de 1913		Sur la base de 1920	
		arithmétiques	géométriques	arithmétiques	géométriques
simples	1913	100	100	62	54
	1920	217	186	100	100
	1922	138	131	73	70
pondérés	1913	100	100	40	35
	1920	252	215	100	100
	1922	152	144	60	59

Les index arithmétiques sont ici, toujours (sauf pour les années de base) et pour toutes les catégories, plus élevés que les index géométriques [1]).

[1]) Si l'on opérait le changement de la période de base, pour les index *arithmétiques simples,* par le procédé de la division (donc incorrectement!), on obtiendrait, sur la base de 1920, les index respectifs de 46, 100 et 64 (§ 19), c'est-à-dire les index arithmétiques seraient *inférieurs* aux index géométriques correspondants, qui sont respectivement 54, 100 et 70, ce qui serait évidemment erroné. De même, si l'on faisait ce changement de base pour les index *géométriques pondérés* également par le procédé simplifié de la division des index généraux donnés (donc de nouveau incorrectement), on obtiendrait des index géométriques pondérés 47, 100 et 67 (§ 32) *supérieurs* aux index arithmétiques correspondants (40, 100 et 60), ce qui serait de nouveau erroné (preuve nouvelle de la justesse de nos déductions antérieurs). Et, en effet, cette constatation n'a rien d'accidentel. Car l'inverse d'un chiffre plus grand est nécessairement moindre que l'inverse d'un chiffre plus petit; l'index arithmétique de l'ancienne date de base (1913) calculé sur la base nouvelle (1920) par le procédé de la division des index, c'est-à-dire *l'inverse de l'index arithmétique* de la nouvelle date de base (1920) dans l'ancienne série d'index, est donc *nécessairement* inférieur à l'index géométrique correspondant, qui est égal à *l'inverse de l'index géométrique* de la même date dans l'ancienne série. En d'autres termes, puisque $I_b > i_b$, il est nécessaire que $\frac{1}{I_b} < \frac{1}{i_b}$; de même, puisque $J_b > j_b$, il est nécessaire que $\frac{1}{J_b} < \frac{1}{j_b}$; or, si I'_a était $= \frac{1}{I_b}$ ou si J'_a était $= \frac{1}{J_b}$, on arriverait nécessairement à ce résultat que $I'_a < i'_a$ et $J'_a < j'_a$, c'est-à-dire des index arithmétiques seraient, pour les mêmes dates (et système de pondération), inférieurs aux index géométriques correspondants. — Et, en général, il n'y aurait rien d'étonnant si, divisant la série d'index arithmétiques par l'index arithmétique d'une certaine date, on pourrait obtenir des quotients plus petits qu'en divisant la série d'index géométriques par l'index géométrique de cette même date, le diviseur étant dans le premier cas plus grand que dans le second.

La proposition énoncée peut donc être exprimée de la façon suivante (en conservant aux lettres la signification que nous leur avons donnée jusqu'ici):

$$I_m > i_m$$
$$J_m > j_m \cdot$$

En désignant l'index arithmétique d'un certain genre (donc simple ou pondéré), pour des articles et des prix donnés, par J_a et l'index géométrique du même genre (simple ou pondéré) et pour les mêmes articles et prix par J_g, nous pouvons donc dire:

$$J_a > J_g. \qquad (35)$$

§ 38. — 2° *L'écart entre l'index arithmétique et l'index géométrique est,* pour les mêmes prix (et méthode de pondération), *d'autant plus fort que les index particuliers sont plus divergents.*

Cette seconde déduction comporte, à son tour, le corollaire que voici: *Le degré de divergence des index particuliers faisant partie d'un index général peut être aisément fixé par l'écart entre l'index général arithmétique et l'index général géométrique.*

La conclusion à laquelle nous aboutissons ainsi n'est pas dépourvue de tout intérêt. Car pour de nombreux calculs, il importe de pouvoir établir le degré de divergence des index particuliers. Nous l'avons nous-mêmes constaté à maintes reprises au cours de la présente étude. La différence des coefficients de poids à affecter aux index particuliers calculés sur des bases différentes (§§ 7, 2° et 25—26), l'erreur ou l'exactitude du calcul simplifié du changement de base des index généraux, l'erreur ou l'exactitude des comparaisons des index de dates différentes prises en dehors de la date de base pour autant qu'il s'agit d'index arithmétiques simples ou géométriques pondérés (§§ 20—22 et 32—34), tout cela dépend du degré de divergence des index particuliers. Mais laissant même de côté ces points plus ou moins spéciaux, il est évident qu'il n'est nullement indifférent que les index particuliers marquent des variations à peu près égales, s'écartant peu de l'index général, ou que cet index général ne soit qu'une „moyenne“ fort *peu typique* des mouvements réels, bien divergents, des prix des articles individuels. Il y a donc utilité de calculer *les deux* espèces d'index généraux, l'arithmétique et le géométrique: l'écart entre les deux servirait, à son tour, d'indice du degré de divergence des mouvements réels des prix des divers articles envisagés.

§ 39. — A première vue et jusqu'à nouvel avis, la forme la plus simple à donner à cet indice me paraît:

$$d = \frac{J_a - J_g}{J_g} \qquad (36)$$

d étant l'indice de divergence des index particuliers, J_a l'index général arithmétique et J_g l'index général géométrique. Plus les mouvements des prix des articles individuels sont divergents et plus d est élevé; par contre, d sera d'autant plus réduit que les mouvements des prix des articles individuels sont plus convergents, plus rapprochés du mouvement de l'index général et que cet index général est plus *typique*, plus caractéristique, pour les variations réelles des prix des articles concrets. Pour le cas théorique où tous les index particuliers seraient égaux entre eux, J_g serait aussi égal à J_a et d deviendrait $= 0$ [1]).

Si, à titre d'illustration, nous voulons appliquer notre formule à l'exemple concret du groupe d'articles G constamment employé dans cette étude (voyez notamment les chiffres pour J_a et J_g, § 37), nous trouvons (pour les index ayant comme base, par exemple, l'année 1913):

I. En comparant les index simples:

a) pour 1920:

$$J_a = 217\,;\ J_g = 186\,;\ d = \frac{217 - 186}{186} = \frac{31}{186} = 16{,}7\,\%;$$

b) pour 1922:

$$J_a = 138\,;\ J_g = 131\,;\ d = \frac{138 - 131}{131} = \frac{7}{131} = 5{,}4\,\%.$$

II. En comparant les index pondérés:

a) pour 1920:

$$J_a = 252\,;\ J_g = 215\,;\ d = \frac{252 - 215}{215} = \frac{37}{215} = 17{,}2\,\%;$$

b) pour 1922:

$$J_a = 152\,;\ J_g = 144\,;\ d = \frac{152 - 144}{144} = \frac{8}{144} = 5{,}6\,\%.$$

Appliquée aux index simples ou pondérés, notre formule aboutirait donc à la conclusion que les mouvements des prix des articles envisagés accusaient, en 1920, un indice de divergence trois fois (plus exactement: 3,1) plus fort qu'en 1922 (respectivement 16,7 : 5,4 et 17,2 : 5,6).

§ 40. — La portée que nous voudrions attribuer à notre indice de divergence ne doit cependant pas être exagérée. *Directement, cet indice montre seulement le degré de divergence entre l'index général géométrique et l'index général arithmétique;* ce n'est qu'indirectement qu'il reflète le degré de divergence des index particuliers et — ce qui est beaucoup plus grave — il ne reflète la divergence de ceux-ci que bien imparfaitement. Car la divergence des deux espèces d'index généraux (arithmétique et géométrique), tout en variant dans le même sens que celle des index particuliers, ne varie cependant *pas dans la même mesure* que cette dernière. Un indice de divergence n fois plus élevé, marquant un écart n fois plus fort entre l'index arithmétique et l'index géométrique, ne signifie donc pas une divergence n fois plus forte pour les index particuliers. *Pour ce qui concerne la divergence des index particuliers, d n'est donc qu'un indice* et nullement un coefficient, un étalon exact.

Pour mesurer *directement* le degré de divergence entre l'index général, d'un côté, et les index particuliers de l'autre, on peut se servir soit de *l'écart moyen,* soit de la *standard deviation* des index particuliers vis-à-vis de l'index général qui leur sert de moyenne. Pour mesurer directement la divergence des index particuliers entre eux, indépendamment de l'index général, on peut appliquer le *coefficient de variation* de Gini.

Mais, d'un autre côté, précisément parce que l'écart entre l'index arithmétique et l'index géométrique

[1]) On pourrait certainement imaginer d'autres combinaisons possibles de J_a et J_g capables de rendre compte du degré de divergence (ou de convergence) des index particuliers. La combinaison la plus simple serait, par exemple, $\frac{J_g}{J_a}$; cette expression serait plutôt un indice de convergence, augmentant à mesure que l'écart entre J_a et J_g (donc aussi entre les index particuliers) diminue; elle aurait pour maximum 1 (si $J_g = J_a$) qui serait le symbole de la convergence parfaite, c'est-à-dire de l'égalité de tous les index entre eux. Je ne proposerais cependant pas cette formule d'indice de convergence $\left(c = \frac{J_g}{J_a}\right)$ qui peut devenir une source d'illusions. En effet, le moindre écart entre J_a et J_g correspond à une considérable divergence des index particuliers (par exemple: si nous avons deux index particuliers 100 et 200, dont l'un est le *double* de l'autre, $J_a = \frac{100 + 200}{2} = 150$ et $J_g = \sqrt{100 \cdot 200} = 141$; l'indice de convergence serait alors $c = \frac{141}{150} = 0{,}93$). Par suite, si, au lieu de mesurer la divergence, on mesure la convergence, on risque d'avoir l'impression qu'elle est très élevée, très rapprochée de la perfection, même si, en réalité, les index particuliers sont très divergents (l'habitude du coefficient de corrélation aggraverait encore le danger psychologique de cette illusion). Pour exprimer la *divergence* des index, il faudrait donc prendre: $1 - \frac{J_g}{J_a}\left(= \frac{J_a - J_g}{J_a}\right)$ ou bien: $\frac{J_a}{J_g} - 1$ $\left(= \frac{J_a - J_g}{J_g}\right)$. Nous avons choisi cette dernière expression, qui a un dénominateur un peu plus petit et qui est, par suite, plus sensible aux fluctuations de $J_a - J_g$. — Il serait peut-être plus correct de ne rapporter cet écart entre J_a et J_g ni à J_a, ni à J_g, mais à leur moyenne, soit à leur moyenne arithmétique $\left(\frac{J_a - J_g}{\frac{J_a + J_g}{2}} = \frac{2(J_a - J_g)}{J_a + J_g}\right)$, soit à leur moyenne géométrique $\left(\frac{J_a - J_g}{\sqrt{J_a J_g}}\right)$, mais un tel indice compliquerait sensiblement le calcul sans offrir pratiquement d'avantages appréciables. — Pour la même raison, nous laissons de côté d'autres combinaisons de J_a et J_g aptes à servir d'indice de divergence des index particuliers. — Directement, d, tel que nous le proposons, exprime de quelle fraction, de combien p. 100 (de lui-même), l'index général géométrique s'écarte de l'index arithmétique.

ne varie pas dans la même mesure que la divergence des index particuliers, *l'écart moyen ou tout autre étalon des variations des index particuliers ne traduit, à son tour, qu'indirectement et imparfaitement l'écart entre les deux espèces d'index généraux,* entre l'index arithmétique et l'index géométrique. Or, pour certains problèmes dans le genre de ceux que nous avons vus au cours de la présente étude, il faut justement avoir la mesure de l'écart entre l'index arithmétique et l'index géométrique.

Je crois donc que notre indice de divergence d entre les deux espèces d'index généraux aurait son utilité à côté des étalons servant de mesure directe de la divergence des index particuliers.

Et puis, dans de nombreux cas, notamment quand on a déjà un système d'index géométriques, le calcul d'un index arithmétique à côté de l'index géométrique (qui permette d'établir, sans autre, notre indice de divergence) est bien plus simple que le calcul de l'écart moyen, etc. des index particuliers. Or, si, dans des cas pareils, la mesure exacte des variations des index particuliers n'est pas nécessaire et qu'un simple *indice* de la divergence plus ou moins grande de ces index suffise pour marquer le caractère plus ou moins typique de l'index général, l'emploi de notre indice de divergence d nous paraît bien indiqué.

Si l'on prend, enfin, en considération que la publication simultanée de l'index arithmétique et de l'index géométrique pourrait être utile encore pour d'autres raisons et que, dans le cas de l'existence d'un pareil index *double*, notre indice de divergence $\frac{J_a - J_g}{J_g}$ se ramène à une petite opération arithmétique des plus simples, on conviendra que l'adoption de cet indice pourrait parfois être extrêmement aisée[1]).

Quoi qu'il en soit, il nous paraît hautement désirable *que les index généraux d'une certaine espèce* (arithmétiques ou géométriques), publiés par les divers services des statistiques des prix, *soient complétés soit par des index de l'autre espèce* (géométriques ou arithmétiques) *ou*, ce qui revient au même, *par l'indice de divergence des index (d), soit par l'écart moyen ou par quelque autre étalon de variation des index particuliers.* On comblerait ainsi une importante lacune dans la statistique des prix où, jusqu'ici, l'on se contente du simple index général sans examiner à quel point cet index est typique ou fictif.

§ 41. — La marge entre l'index arithmétique (limite supérieure) et l'index géométrique (limite inférieure) s'élargissant avec l'accroissement de la divergence des index particuliers et se rétrécissant avec la diminution de celle-ci, il s'ensuit:

1° Si les prix montent et, en même temps, la divergence des index particuliers s'accroit (l'écart entre les deux espèces d'index généraux s'élargissant par conséquent), l'index géométrique monte moins rapidement que l'index arithmétique. De même, si les prix baissent et la divergence des index particuliers diminue (la marge entre les deux index généraux diminuant par conséquent), l'index géométrique baisse moins rapidement que l'index arithmétique (tout en demeurant plus bas que celui-ci). En d'autres termes, *lorsque le montant des prix et leur divergence d'un article à l'autre varient dans un même sens, l'index géométrique varie* (monte ou baisse) *moins que l'index arithmétique.*

2° Si les prix montent et, en même temps, la divergence des index particuliers diminue (la marge entre les deux index généraux diminuant donc aussi), l'index géométrique monte plus rapidement que l'index arithmétique (tout en ne pouvant jamais le dépasser). Si les prix baissent alors que la divergence des index particuliers augmente (et l'écart entre les deux index généraux augmentant par suite aussi), l'index géométrique baisse plus rapidement que l'index arithmétique. — En d'autres termes, *si le montant des prix et leur divergence varient dans des sens opposés, l'index géométrique varie plus fortement que l'index arithmétique.*

Ainsi, dans l'exemple de notre groupe d'articles G et prenant 1913 comme date de base, nous voyons (§ 37) que, de 1913 à 1920, les prix ayant monté et la divergence des index particuliers s'étant accrue (les index particuliers étant tous admis égaux à 100 en 1913), l'index arithmétique s'est accru (pour ne parler que des index non-pondérés) de 117 %, passant de 100 à 217, tandis que l'index géométrique n'a augmenté que de 86 %, passant de 100 à 186. De 1920 à 1922, les prix ayant baissé ainsi que la divergence des index particuliers (comme nous l'avons vu § 39), l'index arithmétique est tombé de 36,4 % $\left(=\frac{217 - 138}{217}\right)$ tandis que l'index géométrique n'est tombé que de $\frac{186 - 131}{186}$, soit de 29,6 %. — De même, prenant pour base 1920, nous voyons que de 1913 à 1920, les prix ayant monté et la divergence

---

[1]) Sans contester en quoi que ce soit la valeur incontestable des formules (plus générales et plus adéquates aux variations individuelles) de la *standard deviation* ou du degré de variabilité de Gini, on peut cependant se demander si notre formule ne saurait d'être *généralisée* et si, dans bien des cas en dehors de la statistique des prix, il n'y aurait intérêt de prendre *l'écart entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique* $\left(d = \frac{M_a - M_g}{M_g}\right)$ *comme indice de divergence ou de variation des faits réels* (notamment dans les cas où les dimensions des variations excluent d'emblée l'hypothèse de fluctuations produites par le pur hasard). Le problème mériterait peut-être un examen spécial.

des index particuliers calculés sur la base de 1920 (donc ayant tous, en 1920, le même index 100) ayant diminué, l'index arithmétique ne s'est accrû que de $\frac{100 - 62}{62}$, soit de 61 % alors que l'index géométrique augmenta de $\frac{100 - 54}{54}$, c'est-à-dire de 85 %. De 1920 à 1922, les prix ayant baissé et la divergence des index particuliers calculés sur la base de 1920 s'étant accrue, l'index arithmétique n'est tombé que de $\frac{100 - 73}{100}$, soit de 27 % tandis que l'index géométrique est tombé de $\frac{100 - 70}{100}$, c'est-à-dire 30 %.

Nous voyons ainsi que *l'accentuation ou l'atténuation de la divergence des index particuliers influent, et cela dans des mesures et dans des sens différents, sur la hauteur de l'un et de l'autre des index généraux.* Raison de plus pour ne pas nous contenter du seul index général; raison de plus pour publier à la fois les deux espèces d'index généraux, l'index arithmétique et l'index géométrique ou, à defaut, de faire accompagner l'index général publié soit de notre indice de divergence, soit d'un autre étalon des variations des index particuliers.

Annexe.

Pour la clarté de l'exposé, nous avons illustré nos déductions par des calculs effectués sur des chiffres conventionnels. Mais on peut se demander si, *dans la réalité,* les différents procédés de calcul, corrects ou incorrects, que nous avons examinés aboutissent vraiment à des résultats suffisamment différents pour justifier, *dans la pratique,* la prise en considération des conclusions auxquelles nous sommes arrivés.

Ce doute est d'autant plus légitime que certains statisticiens — et des plus éminents — semblent attribuer aux modes de calcul des index des prix une importance tout-à-fait secondaire. Ces index ne sont, en effet, que des indices et ne peuvent nullement prétendre à une exactitude mathématique; l'observation des prix, les méthodes de pondération (ou l'absence de toute pondération) laissent subsister des erreurs assez importantes; à quoi bon alors s'arrêter sur des finesses de calcul là où l'objet même du calcul ne comporte qu'une précision fort médiocre?

Tout en me rendant compte de ce que cette manière de voir a de fondé et de juste dans bien des cas, il me semble pourtant qu'il serait dangereux de la généraliser. Pour ce qui concerne spécialement la statistique des prix, je ferais les réserves suivantes:

1° Il se peut bien souvent que les erreurs du du calcul *s'ajoutent* aux inexactitudes de l'observation et nous éloignent parfois trop de la réalité.

2° Un examen attentif des faits m'a conduit à la conviction que, même en temps normal, les différents procédés de calcul exercent sur les résultats une influence qui n'est pas négligeable et qui souvent porte un caractère *systématique,* certains procédés favorisant systématiquement certains résultats plutôt que certains autres.

3° Si pour des temps normaux, lorsque les fluctuations des prix sont relativement faibles, les divers procédés de calcul aboutissent généralement à des résultats peu divergents, il n'en est plus le cas *aujourd'hui,* surtout pour les pays où la *révolution des prix* bat son plein: ici, les divers procédés de calcul peuvent aboutir et aboutissent réellement à des résultats tellement différents que même les inexactitudes de l'observation s'effacent souvent devant les erreurs provenant de calculs incorrects.

On pourrait longuement encore discuter là-dessus. Mais mieux que toutes les discussions, une simple application de divers procédés de calcul aux mêmes chiffres observés contribuera à éclaircir le sujet.

Nous tâcherons donc d'appliquer les principaux procédés examinés plus haut aux statistiques réelles des prix de deux pays dont l'un est celui où la révolution des prix est on ne peut plus profonde et dont l'autre, tout en ayant subi les contre-coups économiques de la guerre et de l'après-guerre, n'a cependant enregistré que des changements de prix relativement modérés. J'ai en vue l'*Allemagne,* d'un côté, la *Suisse* de l'autre.

I.

Pour l'*Allemagne,* nous appliquerons les différents procédés de calcul aux bien connus index des prix de gros publiés par la *Frankfurter Zeitung.*

Ce sont des index non-pondérés; mais le problème s'il faut pondérer ou non n'entre pas directement dans notre étude; nous pouvons donc, à la rigueur, nous contenter d'index non-pondérés. De plus, afin de ne pas allonger outre mesure les opérations purement arithmétiques, nous n'examinerons pas l'index total, embrassant le mouvement des prix de tous les articles envisagés par la *Frankfurter Zeitung;* nous nous bornerons au calcul de *l'index général du premier groupe d'articles* (denrées alimentaires et similaires) qui à lui seul comprend, d'ailleurs, pas moins de 26 articles. Pour ces articles, nous envisagerons les prix du milieu 1914, du 1er janvier 1920 et du 1er janvier 1922 (afin de nous rapprocher autant que possible des cadres de nos chiffres conventionnels) [1].

[1] Les prix des articles sont reproduits ici d'après la publication de la Gazette de Francfort intitulée *Die Wirtschaftskurve mit Indexzahlen,* III. Heft, August 1922, (p. 14—16).

Tableau I.

Prix de 26 articles „alimentaires et similaires“ en Allemagne.

(Prix et quantités indiqués par la *Frankfurter Zeitung.*)

Nº d'ordre	Articles	Quantités	Prix (Marks) 1914	1.I.1920	1.I.1922
1	Froment	100 kg	21. 50	64. —	758. —
2	Seigle	100 „	18. 20	91. 50	603. —
3	Avoine	100 „	18. 80	72. 50	570. —
4	Orge	100 „	16. 10	91. 50	726. —
5	Maïs	100 „	16. 25	190. —	620. —
6	Pommes de terre	50 „	4. 20	18. —	135. —
7	Haricots	1 „	0. 24	7. 20	5. 25
8	Pois	1 „	0. 16	7. 50	9. —
9	Lentilles	1 „	0. 19	9. —	13. 50
10	Riz	1 „	0. 26	13. 80	11. 50
11	Œufs	1000	66. —	2.100. —	3.950. —
12	Viande	1/2 kg	0. 54	4. 60	11. —
13	Graisse	1/2 „	0. 57	14. 75	24. 50
14	Margarine	1/2 „	0. 52	17. 25	21. 50
15	Beurre	50 „	119. —	800. 25	3.900. —
16	Lait	1 litre	0. 20	0. 83	5. 40
17	Lait condensé	48 boîtes	19. 70	395. —	850. —
18	Cacao	1 kg	1. 10	34. —	52. —
19	Café	1/2 „	0. 93	27. —	49. —
20	Sucre	100 „	43. —	178. 85	880. —
21	Bière	1 hl	20. —	65. —	320. —
22	Tabac	50 kg	65. —	350. —	1.500. —
23	Foin	50 „	3. 20	55. —	100. —
24	Paille	50 „	2. 50	30. —	44. —
25	Houblon	50 „	155. —	3.800. —	12.500. —
26	Vin	3/4 litre	0. 40	18. —	11. —
Somme des prix			593. 56	8.455. 53	27.669. 60
Index incorrects (rapport des sommes)			*100*	*1425*	*4662*

Tableau II.

Prix de 26 articles „alimentaires et similaires“ en Allemagne.

(Les prix des denrées mesurées au poids étant marqués pour quantités de 50 kg.)

Nº d'ordre	Articles	Quantités	Prix (Marks) 1914	1. I. 1920	1. I. 1922
1	Froment	50 kg	10. 75	32. —	379. —
2	Seigle	50 „	9. 10	45. 75	301. 50
3	Avoine	50 „	9. 40	36. 25	285. —
4	Orge	50 „	8. 05	45. 75	363. —
5	Maïs	50 „	8. 13	95. —	310. —
6	Pommes de terre	50 „	4. 20	18. —	135. —
7	Haricots	50 „	12. —	360. —	262. 50
8	Pois	50 „	8. —	375. —	450. —
9	Lentilles	50 „	9. 50	450. —	675. —
10	Riz	50 „	13. —	690. —	575. —
11	Œufs	1000	66. —	2.100. —	3.950. —
12	Viande	50 kg	54. —	460. —	1.100. —
13	Graisse	50 „	57. —	1.475. —	2.450. —
14	Margarine	50 „	52. —	1.725. —	2.150. —
15	Beurre	50 „	119. —	800. 25	3.900. —
16	Lait	1 l	0. 20	0. 83	5. 40
17	Lait condensé	48 boîtes	19. 70	395. —	850. —
18	Cacao	50 kg	55. —	1.700. —	2.600. —
19	Café	50 „	93. —	2.700. —	4.900. —
20	Sucre	50 „	21. 50	89. 42	440. —
21	Bière	1 hl	20. —	65. —	320. —
22	Tabac	50 kg	65. —	350. —	1.500. —
23	Foin	50 „	3. 20	55. —	100. —
24	Paille	50 „	2. 50	30. —	44. —
25	Houblon	50 „	155. —	3.800. —	12.500. —
26	Vin	3/4 l	0. 40	18. —	11. —
Somme des prix			875. 63	17.911. 25	40.556. 40
Index incorrects (rapport des sommes)			*100*	*2046*	*4632*

Le tableau I nous montre les prix des 26 articles examinés par quantités (unités de mesure) adoptées par la *Frankfurter Zeitung.* Si nous voulions dégager les index généraux arithmétiques directement des prix (donc *incorrectement;* voy. § 2), nous obtiendrions, d'après ce tableau, pour 1914, 1920 et 1922, respectivement, les index suivants:

100 1425 4662

Mais les unités de mesure de ce tableau sont tout-à-fait conventionnelles, sinon simplement arbitraires. En effet, comment justifier ce fait que le sucre est pris par quantités de 100 kg, les pommes de terres ou le tabac par 50 kg, le riz et les pois par kilo? ou pourquoi la graisse et la margarine sont prises par ½ kg et le beurre pas 50 kg? — Nous pouvons donc tout aussi bien adopter d'autres unités de mesure et prendre, par exemple, toutes les denrées qui se mesurent au poids par quantités de 50 kg (car il s'agit de prix de gros) ce qui aura du moins l'avantage de l'uniformité. Avec les mêmes niveaux de prix, nous obtiendrons alors le tableau II.

Si nous cherchions à dégager les index arithmétiques généraux directement des prix (donc de nouveau incorrectement!) d'après le tableau II, nous aurions les index généraux que voici:

100 2046 4632

Pour 1922, l'index ne s'écarterait pas beaucoup de celui obtenu d'après le tableau I (4632 contre 4662); mais quelle énorme différence entre les index de 1920: avec le même niveau des prix, sur la même base de 1914 et, naturellement, avec les mêmes articles envisagés, on obtiendrait, pour le 1er janvier 1920, un index général de 1425 d'après le premier tableau et 2046 d'après le second; en d'autres termes, d'après le tableau I, les prix seraient devenus 14 fois plus élevés tandis que, d'après le tableau II, ils auraient vingtuplé.

Mais ce qui est le plus important c'est que ces index seraient bien erronés tous les deux. En effet, en calculant correctement les index arithmétiques généraux pour les dates en question, c'est-à-dire en prenant, pour chaque date, la moyenne des index particuliers (§ 3), on obtient le tableau III[1]).

Tableau III.

Index particuliers des prix des 26 articles „alimentaires et similaires“.

(Les prix de 1914 étant mis égaux 100.)

Articles par n^{os} d'ordre	Index des prix	
	1. I. 1920	1. I. 1922
1	298	3. 526
2	503	3. 313
3	386	3. 032
4	568	4. 509
5	1. 169	3. 815
6	429	3. 215
7	3. 000	2. 188
8	4. 688	5. 625
9	4. 737	7. 105
10	5. 307	4. 423
11	3. 182	5. 985
12	852	2. 037
13	2. 588	4. 298
14	3. 317	4. 135
15	673	3. 277
16	415	2. 700
17	2. 005	4. 315
18	3. 091	4. 728
19	2. 903	5. 269
20	416	2. 047
21	325	1. 600
22	539	2. 308
23	1. 719	3. 125
24	1. 200	1. 760
25	2. 452	8. 065
26	4. 500	2. 750
Somme des index particuliers	51. 262	99. 150
Index général (moyenne) . .	1. 972	3. 813

Les index arithmétiques corrects sont donc pour les dates en question:

100 *1972* *3813*

Ces index, comme on le voit, s'écartent considérablement à la fois de ceux du tableau I et de ceux du tableau II. On remarquera que, malgré la concordance relative des deux index incorrects pour 1922 (respectivement 4662 et 4632), les deux s'écartent beaucoup de la vérité (3813), marquant une hausse de prix qui serait *d'un quart* environ plus forte que la hausse réelle (4562 et 4532 au lieu de 3713 %). — Pour 1920, l'index correct (1972) ne s'écarte pas beaucoup de celui obtenu d'après le tableau II (2046), bien que cet écart ne soit pourtant pas négligeable; par contre, il diffère énormément de celui du tableau I (1425): l'index dégagé d'après ce tableau marquerait, en effet, une hausse qui atteindrait seulement les 70 % de la hausse réelle des prix (1325 : 1872) ou, en d'autres termes, la hausse réelle de 1920 est de *deux-cinquièmes* plus forte qu'elle ne le paraîtrait d'après le tableau I (1872 : 1325).

* * *

Les index *géométriques,* pour les mêmes prix, diffèrent-ils ici beaucoup des index arithmétiques.?

Dégageons les index géométriques des prix pour le 1er janvier 1920 et 1922 d'après la formule (6), c'est-à-dire en calculant, pour chaque année, la moyenne géométrique des index particuliers. Nous obtenons alors le tableau IV[1]):

Tableau IV.

Logarithmes des index particuliers figurant au tableau III.

Articles par n^{os} d'ordre	Logarithmes	
	1. I. 1920	1. I. 1922
1	2, 47 422	3, 54 728
2	2, 70 157	3, 52 022
3	2, 58 659	3, 48 173
4	2, 75 435	3, 65 408
5	3, 06 781	3, 58 149
6	2, 63 246	3, 50 718
7	3, 47 712	5, 34 005
8	3, 67 099	3, 75 012
9	3, 67 550	3, 85 156
10	3, 72 485	3, 64 572
11	3, 50 270	3, 77 706
12	2, 93 044	3, 30 899
13	3, 41 296	3, 63 327
14	3, 52 075	3, 61 648
15	3, 82 802	3, 51 548
16	2, 61 805	3, 43 136
17	3, 30 211	3, 63 498
18	3, 49 010	3, 67 468
19	3, 46 285	3, 72 173
20	2, 61 909	3, 31 112
21 . . . . , .	2, 51 188	3, 20 412
22	2, 73 159	3, 36 324
23	3, 23 528	3, 49 485
24 . . . . , .	3, 07 918	3, 24 551
25	3, 38 952	3, 90 660
26	3, 65 321	3, 43 933
Somme des logarithmes . . .	81, 05 319	92, 15 823
Idem : 26	3, 11 743	3, 54 455
Nombre correspondant (ou moyenne géométrique des index particuliers), soit index géométrique général .	1310	3504

[1]) Dans la publication citée de la *Frankfurter Zeitung,* où ces index sont calculés correctement, se sont glissées cependant quelques petites fautes de calcul ou d'impression; ainsi l'index du beurre, pour 1922 n'est pas 3777, mais 3277, et l'index général de 1922 n'est pas 3840, mais 3813.

[1]) D'après notre formule (6), $i_b = \sqrt[n]{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_n}$, soit $\text{Log}\; i_b = \frac{\text{Log}\beta_1 + \text{Log}\beta_2 + \text{Log}\beta_3 + \ldots \text{Log}\beta_n}{n}$.

On voit ainsi que les index géométriques pour les dates considérées sont respectivement:

100 *1310* et *3504*

Afin de vérifier encore, sur cet exemple réel, l'application pratique de notre formule (7), nous donnons aussi le tableau V, où les index généraux géométriques sont déduits directement des *prix* des articles envisagés.

Tableau V.

Logarithmes des prix des 26 articles marqués au tableau II.

Articles par n^os d'ordre	Logarithmes		
	1914	1. I. 1920	1. I. 1922
1	1, 03 141	1, 50 515	2, 57 864
2	0, 95 904	1, 66 039	2, 47 929
3	0, 97 313	1, 55 931	2, 45 484
4	0, 90 580	1, 66 039	2, 55 991
5	0, 91 009	1, 97 772	2, 49 136
6	0, 62 325	1, 25 527	2, 13 033
7	1, 07 918	2, 55 630	2, 41 913
8	0, 90 309	2, 57 403	2, 65 321
9	0, 97 772	2, 65 321	2, 82 930
10	1, 11 394	2, 83 885	2, 75 967
11	1, 81 954	3, 32 222	3, 59 660
12	1, 73 239	2, 66 276	3, 04 139
13	1, 75 587	3, 16 879	3, 38 917
14	1, 71 600	3, 23 679	3, 33 244
15	2, 07 555	2, 90 323	3, 59 106
16	$\bar{1}$, 30 103	$\bar{1}$, 91 908	0, 73 239
17	1, 29 447	2, 59 660	2, 92 942
18	1, 74 036	3, 23 045	3, 41 497
19	1, 96 848	3, 43 136	3, 69 020
20	1, 33 244	1, 95 143	2, 64 345
21	1, 30 103	1, 81 291	2, 50 515
22	1, 81 291	2, 54 407	3, 17 609
23	0, 50 515	1, 74 036	2, 00 000
24	0, 39 794	1, 47 712	1, 64 345
25	2, 19 033	3, 57 978	4, 09 691
26	$\bar{1}$, 60 206	1, 25 527	1, 04 139
Somme des logarithmes.	30, 02 220	59, 07 284	70, 17 976
Idem : 26	1, 15 470	2, 27 203	2, 69 922
Nombre correspondant (ou moyenne géométrique des prix)	14, 279	187, 083	500, 29
Index géométrique général (rapport des moyennes)	100	1310	3504

Les chiffres de ce tableau représentent les logarithmes des prix des articles individuels pris par quantités indiquées au tableau II. Les index généraux obtenus (100, 1310 et 3504) sont cependant exactement les mêmes que ceux déduits par le procédé des moyennes géométriques des index particuliers (tableau IV). Cela montre donc que les index géométriques peuvent être dégagés directement des prix et qu'ils ne défendent pas des unités de mesure adoptées pour les différents articles (§ 11).

D'un autre côté, comparant les index géométriques aux index arithmétiques (tableau III), nous constatons qu'ils s'écartent effectivement dans une forte mesure les uns des autres. Si nous voulons mesurer cette divergence des index des deux espèces à l'aide de notre indice de divergence d (formule 36), nous trouvons:

$$\text{pour } 1920: \; d_{1920} = \frac{1972 - 1310}{1310} = \frac{662}{1310} = 50{,}5\,\%;$$

$$\text{pour } 1922: \; d_{1922} = \frac{3813 - 3504}{3504} = \frac{309}{3504} = 8{,}8\,\%.$$

Les indices de divergence, comme on le voit, sont ici bien plus élevés que ceux que nous avons obtenus plus haut (§ 39) pour nos chiffres conventionnels. Pour 1920, l'indice de divergence des deux espèces d'index généraux dépasse la *moitié* (50,5 %) de l'index géométrique. L'indice de divergence est presque 6 fois

Tableau VI.

Index particuliers des prix des 26 articles „alimentaires et similaires".

(Les prix du 1er janvier 1920 étant mis égaux 100.)

Articles par n^os d'ordre	Index des prix	
	1914	1. I. 1922
1	33. 6	1. 184
2	19. 9	659
3	25. 9	786
4	17. 6	793
5	8. 6	326
6	23. 3	750
7	3. 3	73
8	2. 1	120
9	2. 1	150
10	1. 9	83
11	3. 1	188
12	11. 7	239
13	3. 9	166
14	3. 0	125
15	14. 9	487
16	24. 1	651
17	5. 0	215
18	3. 2	153
19	3. 4	181
20	24. 0	492
21	30. 8	492
22	18. 6	429
23	5. 8	182
24	8. 3	147
25	4. 1	329
26	2. 2	61
Somme des index particuliers	304. 4	9. 461
Idem : 26, soit index général	11. 7	364

plus faible en 1922, ce qui paraît bien montrer que les mouvements des prix des divers articles individuels, très diversement influencés par la guerre (et le blocus), tendent ensuite à se rapprocher; la conclusion de la paix et la dépréciation de la monnaie allemande semblent ainsi affecter les prix des denrées, en 1922, d'une façon plus uniforme.

* * *

Essayons maintenant de *changer la date de base;* adoptons notamment, comme base des index, les prix de 1920 au lieu de ceux de 1914 [1]) et commençons par les index arithmétiques (n'oubliant pas qu'il s'agit d'index non-pondérés).

Pour établir les index généraux arithmétiques simples sur une nouvelle base, le seul procédé correct est, comme nous le savons (§ 22), de calculer tous les index particuliers sur la nouvelle base et d'en prendre, pour chaque date, la moyenne arithmétique. C'est ce que nous avons fait sur le tableau VI (voir page précédente).

Les index arithmétiques de 1914 et de 1922 sont donc (celui de 1920 étant pris égal 100) respectivement: *11,7* et *364.*

Si, au lieu d'effectuer tout ce calcul quelque peu laborieux (et dont les éléments ne sont pas toujours accessibles), on recourait au procédé simplifié de la division des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base (donc incorrectement! — voir §§ 19—21), on trouverait respectivement:

$$\text{pour } 1914\text{: } \frac{100}{1972} \cdot 100 = \mathit{5{,}1};$$

$$\text{pour } 1922\text{: } \frac{3813}{1972} \cdot 100 = \mathit{193}.$$

On voit ainsi quelle immense erreur serait commise si l'on appliquait, incorrectement, ce second procédé: *les index ainsi obtenus pour 1914 et 1922 ne seraient que la moitié environ des index réels.*

Nous commettrions une erreur de nature identique si, d'après les index arithmétiques donnés, ayant pour base 1914 (qui sont: 1972 pour le 1er janvier 1920 et 3813 pour le 1er janvier 1922; voir tableau III), nous voulions établir l'importance relative de la hausse dans l'intervalle de 1920 à 1922. En effet, d'après ces deux index, la hausse du 1er janvier 1920 au 1er janvier 1922 devrait être fixée à $\left[\frac{3813 - 1972}{1972} \cdot 100 = \right] 93\,\%$; or, comme nous venons de voir, les prix du 1er janvier 1920 étant mis égaux · 100, ceux de janvier 1922 deviennent 364, accusant ainsi une hausse de 264 % et non pas de 93. *La hausse réelle de 1920 à 1922 a donc été* **trois fois** *plus forte qu'on ne le croirait d'après les index arithmétiques généraux donnés (ayant pour base 1914)* [1]).

Par contre, nous avons vu (§ 30) que la division des index donnés par l'index de la nouvelle date de base suffit pour obtenir les index calculés sur cette base nouvelle lorsqu'il s'agit d'index *géométriques* simples. Nous pouvons donc dire que, l'année 1920

Tableau VII.

Logarithmes des index particuliers figurant au tableau VI.

Articles par nos d'ordre	Logarithmes 1914	Logarithmes 1. I. 1922
1	1, 52 634	3, 07 335
2	1, 29 885	2, 81 889
3	1, 41 330	2, 89 542
4	1, 24 551	2, 89 927
5	0, 93 450	2, 51 322
6	1, 36 736	2, 87 506
7	0, 51 851	1, 86 332
8	0, 32 222	2, 07 918
9	0, 32 222	2, 17 609
10	0, 27 875	1, 91 908
11	0, 49 136	2, 27 416
12	1, 06 819	2, 37 840
13	0, 59 106	2, 22 011
14	0, 47 712	2, 09 691
15	1, 17 319	2, 68 753
16	1, 38 202	2, 81 358
17	0, 69 897	2, 33 244
18	0, 50 515	2, 18 469
19	0, 53 148	2, 25 768
20	1, 38 021	2, 69 197
21	1, 48 855	2, 69 197
22	1, 26 951	2, 63 246
23	0, 76 343	2, 26 007
24	0, 91 908	2, 16 732
25	0, 61 278	2, 51 720
26	0, 34 242	1, 78 533
Somme des logarithmes	22, 92 208	63, 10 470
Idem : 26	0, 88 162	2, 42 710
Nombre correspondant (moyenne géométrique des index particuliers), soit index géométrique général	7,6	267

[1]) Notons en passant que, malgré la pratique de certains systèmes d'index, le choix de 1920 comme date de base ne doit pas être considéré comme heureux. Nous venons de voir, en effet, qu'en 1920, la divergence des index particuliers, par rapport à l'état normal (1914), était exceptionnellement élevée; prendre cette année comme base, c'est-à-dire attribuer aux prix des divers articles à cette date le même index particulier 100 serait donc fausser le système d'index à sa base même et, par suite aussi, tous les index ultérieurs. Nous touchons ainsi à une raison de plus pour relever le degré de divergence des index.

[1]) Et notons bien que les statistiques des prix que nous venons d'examiner s'arrêtent au 1er janvier 1922, c'est-à-dire à un moment où le mouvement des prix, en Allemagne, était encore extrêmement loin d'atteindre le degré de bouleversement dont nous sommes témoins aujourd'hui.

prise comme base, les index géométriques de 1914 et de 1922 seront:

$$\text{pour } 1914\colon \frac{100}{1310} \cdot 100 = \mathit{7{,}6};$$

$$\text{pour } 1922\colon \frac{3504}{1810} \cdot 100 = \mathit{267}.$$

Ce sont exactement les mêmes index que nous trouverions en prenant les moyennes géométriques des index particuliers calculés sur la base de 1920, comme le montre le tableau VII.

De même, d'après les index géométriques ayant pour base 1914 (resp. 1310 et 3504 pour 1920 et 1922), nous pouvons établir facilement la hausse relative dans l'intervalle 1920—1922. En effet, d'après ces index, cette hausse était de

$$\left[\frac{3504 - 1310}{1310} \cdot 100 = \right] 167\ \%.$$

Or, le tableau VII nous montre effectivement que, les prix de janvier 1920 étant mis égaux 100, ceux de 1922 deviennent 267, marquant ainsi une hausse de 167 %.

Toutes ces constatations semblent donc bien prouver que l'analyse des procédés à appliquer au calcul des index des prix est loin de présenter un simple jeu d'esprit.

II.

Pour ce qui concerne la *Suisse*, nous appliquerons les divers procédés de calcul aux statistiques des prix de détail établies, d'après l'excellente méthode du Dr Lorenz, par l'Union des Sociétés Coopératives Suisses de Consommation, aboutissant à un index pondéré du coût (partiel!) de la vie et reproduites régulièrement aussi par le *Journal de Statistique et Revue Economique Suisse*.

Nous comparerons les prix des denrées pour les trois dates que voici: juin 1914, qui est la date prise généralement pour base; juin 1919, qui marque le sommet du mouvement ascensionnel des prix de détail en Suisse, et juin 1923, la date la plus récente pour laquelle je possède, en ce moment, les données nécessaires [1]).

Calculons d'abord, d'après ces données, les *index arithmétiques simples* pour juin 1919 et juin 1923 en prenant les prix de juin 1914 pour base.

Tableau VIII.

Prix de détail des 36 articles relevés par l'U. S. C. S. C. et index particuliers de ces articles.

(Juin 1914 étant pris pour base.)

No d'ordre	Articles	Quantités	Prix (Francs) juin 1914	Prix (Francs) juin 1919	Prix (Francs) juin 1923	Index particuliers 1919	Index particuliers 1923
1	Beurre.	1 kg	3,23	8,10	5,88	251	182
2	Fromage gras . .	„	2,24	4,21	3,45	188	154
3	Lait	1 litre	0,23	0,36	0,37	157	161
4	Graisse végétale .	1 kg	1,73	6,44	2,24	372	130
5	Graisse façon . .	„	1,46	6,40	2,25	438	154
6	Saindoux d'Amérique	„	1,90	6,49	2,63	342	138
7	Saindoux du pays.	„	2,04	8,46	3,19	415	156
8	Huiles comestibles	1 litre	1,39	5,95	2,02	428	145
9	Pain	1 kg	0,35	0,73	0,56	209	160
10	Farine.	„	0,46	0,84	0,65	183	141
11	Semoule	„	0,47	1,02	0,76	217	162
12	Maïs	„	0,31	1,00	0,47	323	152
13	Orge	„	0,46	1,31	0,70	284	152
14	Flocons d'avoine .	„	0,49	1,42	0,72	290	147
15	Gruau d'avoine. .	„	0,49	1,42	0,78	290	159
16	Pâtes alimentaires.	„	0,63	1,42	1,06	225	168
17	Haricots	„	0,45	3,04	0,63	676	140
18	Pois	„	0,56	3,13	1,30	559	232
19	Lentilles	„	0,56	2,13	1,50	380	268
20	Riz	„	0,52	1,05	0,72	201	139
21	Viande de veau .	„	2,36	7,54	4,32	320	183
22	Viande de bœuf .	„	1,96	6,83	3,33	348	170
23	Viande de mouton	„	2,14	7,27	3,54	340	166
24	Viande de porc .	„	2,40	8,69	4,95	362	206
25	Oeufs	1 pièce	0,10	0,49	0,15	490	150
26	Pommes de terre .	1 kg	0,14	0,22	0,17	157	121
27	Sucre	„	0,47	1,40	1,17	298	249
28	Miel	„	3,50	6,43	4,70	184	134
29	Chocolat	„	2,09	4,70	3,39	225	162
30	Thé	„	5,80	13,92	6,55	240	113
31	Café	„	2,23	3,81	2,51	171	113
32	Houille, charbon .	1 q	6,34	21,87	14,05	345	222
33	Briquettes . . .	„	4,34	17,02	9,65	393	223
34	Esprit de vin . .	1 litre	0,66	2,77	0,99	420	150
35	Pétrole	„	0,22	0,75	0,40	341	182
36	Savon	1 kg	0,96	4,47	1,60	466	167
	Ensemble		55,68	173,10	93,35	11.528	5.951
	Rapport des sommes des prix .		100	312	167	—	—
	Moyenne arithmétique simple des index particuliers.		—	—	—	*320*	*165*

Le tableau VIII nous montre d'abord le montant des prix de 36 articles par unité de mesure (respectivement: 1 kilogramme, 1 litre, 1 quintal et 1 pièce) ainsi que les index particuliers des prix de ces articles aux dates envisagées. Nous voyons ainsi que, si l'on calcule correctement l'index général arithmétique simple, c'est-à-dire si l'on prend la moyenne non-pondérée des *index particuliers* d'après la formule (2) $I_b = \frac{\Sigma\beta}{n}$, on trouve, pour 1919 et 1923, respectivement les index: *320* et *165*.

[1]) Afin de rendre possible la comparaison des prix des trois dates considérées, nous avons réuni, sous des rubriques communes, les deux espèces de beurre (no 1), la graisse de rognons et la graisse façon (no 5) ainsi que les deux sortes de riz (no 20). — Pour les chiffres servant de base à nos calculs, voir notamment le *Journal de Statistique Suisse* 1915, fascicule II, 1919, fascicule II, et 1923, fascicule II.

Si l'on prenait le rapport des moyennes arithmétiques simples des *prix* individuels, on obtiendrait comme index généraux, avec les unités de mesure adoptées, les chiffres:

312 et *167.*

Ce dernier procédé serait, comme nous l'avons vu (§ 2), incorrect; toutefois, dans notre cas concret, l'erreur paraîtrait minime pour juin 1923; cependant, pour juin 1919, l'erreur serait déjà assez sensible, la hausse de 1919 étant en réalité de 4 % environ plus forte qu'elle ne paraît d'après le procédé erroné que nous venons d'employer $\left(\frac{220-212}{212} = 3{,}8\,\%\right)$. L'erreur ainsi commise serait naturellement fort peu de chose en comparaison de ce que nous avons vu pour l'Allemagne; mais il suffit de nous imaginer que les salaires se règlent d'après l'index des prix pour voir tout de suite qu'une pareille différence d'index ne serait pas non plus une quantité négligeable.

L'Union des Sociétés Coopératives calcule des index *arithmétiques pondérés* et, pour les obtenir, elle emploie le procédé des *valeurs globales;* elle procède donc de la façon indiquée par notre formule (5):

$$J_b = \frac{\Sigma v'}{v}.$$

On arrive ainsi, comme le montre le tableau IX, pour 1919 et 1923, respectivement aux index arithmétiques pondérés:

261 et *169.*

On pourrait encore calculer correctement ces index pondérés d'une autre façon, par le procédé des moyennes arithmétiques pondérées des *index particuliers,* exprimé par notre formule (4): $J_b = \Sigma(p\beta)$. Seulement, ce procédé est plus compliqué demandant la fixation préalable de p d'après la formule (2): $p_n = \frac{v_n}{\Sigma v}$. On calculera donc d'abord les coefficients de poids (p) des divers articles en divisant la valeur globale de chaque article à la date de base (1914) par la somme des valeurs globales de tous les articles à la même date (francs 1043,83). On obtiendra alors le tableau X (voir page suivante).

Comme on le voit, les index généraux ainsi calculés *261* et *169* sont les mêmes que ceux obtenus par le procédé des valeurs globales.

Les index *géométriques simples* peuvent être établis comme moyennes géométriques non-pondérées des index particuliers d'après la formule (6); ils peuvent encore être déduits des valeurs globales (8) ou, le

Tableau IX.

Valeur globale des 36 articles de l'U. S. C. S. C.

(Consommation annuelle d'une famille „normale".)

Articles par nos d'ordre	Quantités	Valeurs globales (en francs)		
		juin 1914	juin 1919	juin 1923
1	16,1 kg	51,97	130,41	94,64
2	12,2 „	27,33	51,36	42,09
3	1094 litres	251,62	393,84	404,78
4	4,76 kg	8,23	30,65	10,66
5	4,76 „	6,95	30,46	10,71
6	4,76 „	9,04	30,89	12,52
7	4,76 „	9,71	40,27	15,18
8	4,76 l	6,62	28,32	9,62
9	491,1 kg	171,88	358,50	275,02
10	17,31 „	7,96	14,54	11,25
11	12,7 „	5,97	12,95	9,65
12	13,84 „	4,29	13,84	6,50
13	3,04 „	1,40	3,98	2,13
14	3,94 „	1,93	5,59	2,84
15	7,96 „	3,90	11,30	6,21
16	28,69 „	18,07	40,74	30,41
17	4,76 „	2,14	14,47	3,00
18	3,14 „	1,76	9,83	4,08
19	2,00 „	1,12	4,26	3,00
20	8,58 „	4,48	9,01	6,21
21	7,03 „	16,59	53,01	30,37
22	66,05 „	129,45	451,12	219,95
23	1,1 „	2,35	8,00	3,89
24	21,2 „	50,88	184,23	104,94
25	400 pièces	40,00	196,00	60,00
26	250 kg	35,00	55,00	42,50
27	68 „	31,96	95,20	79,56
28	1,75 „	6,12	11,25	8,23
29	7,2 „	15,05	33,84	24,41
30	0,35 „	2,03	4,87	2,29
31	8,68 „	19,36	33,07	21,79
32	7,25 q	45,93	158,56	101,88
33	7,25 „	31,43	123,39	70,01
34	4,2 l	2,77	11,63	4,16
35	47,2 „	10,38	35,40	18,88
36	8,5 kg	8,16	37,99	13,60
Somme des valeurs globales		1043,83	2727,77	1766,96
Rapport des sommes (index arithmétique pondéré) .		*100*	*261*	*169*

plus simplement, directement des prix (7). Sur notre tableau XI, nous trouvons l'application de ces trois procédés et, dans les trois cas, nous trouvons, comme index géométriques simples de 1919 et 1923, les mêmes chiffres de

300 et *162.*

Par des procédés analogues, en prenant les moyennes géométriques *pondérées* soit des index particuliers (10), soit des prix (11), soit des valeurs globales (13), nous avons obtenu le tableau XII qui nous donne, pour les dates indiquées, les index *géométriques pondérés.* Par

Tableau X.

Index arithmétiques pondérés des prix des 36 articles de l'U. S. C. S. C. calculés par le procédé des moyennes des index particuliers (base 1914).

$$[J_b = \Sigma(p\beta)].$$

Articles par nos d'ordre	Coefficients de poids (p) (1914)	Index particuliers (base 1914)		Index particuliers multipliés par coefficients de poids	
		juin 1919	juin 1923	juin 1919	juin 1923
1	0,0498	251	182	12,4998	9,0636
2	0,0262	188	154	4,9256	4,0348
3	0,2411	157	161	37,8527	38,8171
4	0,0079	372	130	2,9388	1,0270
5	0,0067	438	154	2,9346	1,0318
6	0,0087	342	138	2,9754	1,2006
7	0,0093	415	156	3,8595	1,4508
8	0,0063	428	145	2,6964	0,9135
9	0,1647	209	160	34,4223	26,3520
10	0,0076	183	141	1,3908	1,0716
11	0,0057	217	162	1,2369	0,9234
12	0,0041	323	152	1,3243	0,6232
13	0,0013	284	152	0,3692	0,1976
14	0,0018	290	147	0,5220	0,2646
15	0,0037	290	159	1,0730	0,5883
16	0,0173	225	168	3,8925	2,9064
17	0,0021	676	140	1,4196	0,2940
18	0,0017	559	232	0,9503	0,3944
19	0,0011	380	268	0,4180	0,2948
20	0,0043	201	139	0,8643	0,5977
21	0,0159	320	183	5,0880	2,9097
22	0,1240	348	170	43,1520	21,0800
23	0,0023	340	166	0,7820	0,3818
24	0,0487	362	206	17,6294	10,0322
25	0,0383	490	150	18,7670	5,7450
26	0,0335	157	121	5,2595	4,0535
27	0,0306	298	249	9,1188	7,6194
28	0,0059	184	134	1,0856	0,7906
29	0,0144	225	162	3,2400	2,3328
30	0,0019	240	113	0,4560	0,2147
31	0,0185	171	113	3,1635	2,0905
32	0,0440	345	222	15,1800	9,7680
33	0,0301	393	223	11,8293	6,7123
34	0,0027	420	150	1,1340	0,4050
35	0,0099	341	182	3,3759	1,8018
36	0,0078	466	167	3,6348	1,3026
Au total	1,0000	—	—	*261*,4618	*169*,2871

tous ces procédés, nous trouvons les index généraux géométriques pondérés:

243,5 [1]   et   *167,0*.

* * *

La *divergence des index particuliers* des articles envisagés, comme les fluctuations des prix en général, a été en Suisse beaucoup moins forte qu'en Allemagne. Pour le constater, il suffit de jeter un coup d'œil sur les tableaux III et VIII (les deux colonnes à droite). La comparaison des deux dernières colonnes du tableau VIII laisse aussi l'impression que la divergence des index particuliers a été plus faible en 1923 qu'en 1919. Avec notre *indice de divergence*, nous pouvons nous en faire une idée plus nette. En effet, pour les index non-pondérés, nous trouvons:

$$d_{1919} = \frac{320-300}{300} = \frac{20}{300} = 6{,}7\ \%,$$

$$d_{1923} = \frac{165-162}{162} = \frac{3}{162} = 1{,}9\ \%.$$

(Contre 50,5 % en 1920 et 8,8 % en 1922 pour les index allemands examinés plus haut).

Si nous tenons compte du poids des divers articles et calculons ainsi l'indice de divergence des index pondérés, nous trouvons:

$$d_{p(1919)} = \frac{261-244}{244} = \frac{17}{244} = 7{,}0\ \%,$$

$$d_{p(1923)} = \frac{169-167}{167} = \frac{2}{167} = 1{,}2\ \%.$$

En 1923, l'indice de divergence a été ainsi en Suisse réellement faible; au mois de juin de cette année, il n'a été que le $^1/_4$ ou même le $^1/_6$ (selon que l'on néglige le poids des divers articles ou que l'on en tient compte) de ce qu'on a pu constater pour 1919, date à laquelle cet indice avait été assez élevé. Il s'ensuit que les différences de résultats provenant de différents procédés de calcul (index simples ou pondérés, arithmétiques ou géométriques) ainsi que les erreurs provenant des calculs incorrects examinés plus haut doivent être bien notables pour autant qu'il s'agit de 1919, mais qu'elles seront, par contre, fort réduites pour ce qui concerne 1923. C'est ainsi, par exemple, qu'en 1919 nous trouvons:

index arithmétique simple . . . 320
index arithmétique pondéré . . 261,

soit une différence de $\frac{320-261}{261} = \frac{49}{261} = 19\ \%$ de l'index pondéré ou une différence de $\frac{220-161}{161} = 30\ \%$ de la hausse de cet index (au-dessus du niveau de 1914). Pour 1923, nous trouvons:

index arithmétique simple . . . 165
index arithmétique pondéré . . 169,

soit un écart de $\frac{169-165}{169} = \frac{4}{169} = 2{,}4\ \%$ de l'index pondéré ou de $\frac{69-65}{69} = \frac{4}{69} = 6\ \%$ de sa hausse (au-dessus du niveau de 1914). Donc une différence

---

[1]) Par un des procédés employés, nous avons trouvé 243,6 au lieu de 243,5; ce léger écart provient uniquement du fait que les chiffres calculés (index particuliers, coefficients de poids) sont des valeurs approchées (à moins de 1 pour les index particuliers et à moins de 0,0001 pour les poids).

Tableau XI.

Index géométriques simples des prix des 36 articles de l'U. S. C. S. C.: les trois procédés de calcul (base 1914).

Articles par nos d'ordre	Logarithmes des index particuliers [1]) (base 1914)		Logarithmes des prix [1]) (exprimés en centimes)			Logarithmes des valeurs globales [1]) (exprimées en francs)		
	juin 1919	juin 1923	juin 1914	juin 1919	juin 1923	juin 1914	juin 1919	juin 1923
1	2,39 967	2,26 007	2,50 920	2,90 849	2,76 938	1,71 575	2,11 531	1,97 607
2	2,27 416	2,18 752	2,35 025	2,62 428	2,53 782	1,43 664	1,71 063	1,62 418
3	2,19 590	2,20 683	1,36 173	1,55 630	1,56 820	2,40 074	2,59 532	2,60 722
4	2,57 054	2,11 394	2,23 805	2,80 889	2,35 025	0,91 540	1,48 643	1,02 776
5	2,64 147	2,18 752	2,16 435	2,80 618	2,35 218	0,84 198	1,48 373	1,02 971
6	2,53 403	2,13 988	2,27 875	2,81 224	2,41 996	0,95 617	1,48 982	1,09 760
7	2,61 805	2,19 312	2,30 963	2,92 737	2,50 379	0,98 722	1,60 498	1,18 127
8	2,63 144	2,16 137	2,14 301	2,77 452	2,30 535	0,82 086	1,45 209	0,98 318
9	2,32 015	2,20 412	1,54 407	1,86 332	1,74 819	2,23 523	2,55 449	2,43 936
10	2,26 245	2,14 922	1,66 276	1,92 428	1,81 291	0,90 091	1,16 256	1,05 115
11	2,33 646	2,20 952	1,67 210	2,00 860	1,88 081	0,77 597	1,11 227	0,98 453
12	2,50 920	2,18 184	1,49 136	2,00 000	1,67 210	0,63 246	1,14 114	0,81 291
13	2,45 332	2,18 184	1,66 276	2,11 727	1,84 510	0,14 613	0,59 988	0,32 838
14	2,46 240	2,16 732	1,69 020	2,15 229	1,85 733	0,28 556	0,74 741	0,45 332
15	2,46 240	2,20 140	1,69 020	2,15 229	1,89 209	0,59 106	1,05 308	0,79 309
16	2,35 218	2,22 531	1,79 934	2,15 229	2,02 531	1,25 696	1,61 002	1,48 302
17	2,82 995	2,14 613	1,65 321	2,48 287	1,79 934	0,33 041	1,16 047	0,47 712
18	2,74 741	2,36 549	1,74 819	2,49 554	2,11 394	0,24 551	0,99 255	0,61 066
19	2,57 978	2,42 813	1,74 819	2,32 838	2,17 609	0,04 922	0,62 941	0,47 712
20	2,30 320	2,14 301	1,71 600	2,02 119	1,85 733	0,65 128	0,95 472	0,79 309
21	2,50 515	2,26 245	2,37 291	2,87 737	2,63 548	1,21 985	1,72 436	1,48 244
22	2,54 158	2,23 045	2,29 226	2,83 442	2,52 244	2,11 210	2,65 429	2,34 233
23	2,53 148	2,22 011	2,33 041	2,86 153	2,54 900	0,37 107	0,90 309	0,58 995
24	2,55 871	2,31 387	2,38 021	2,93 902	2,69 461	1,70 655	2,26 536	2,02 094
25	2,69 020	2,17 609	1,00 000	1,69 020	1,17 609	1,60 206	2,29 226	1,77 815
26	2,19 590	2,08 279	1,14 613	1,34 242	1,23 045	1,54 407	1,74 036	1,62 839
27	2,47 422	2,39 620	1,67 210	2,14 613	2,06 819	1,50 461	1,97 864	1,90 069
28	2,26 482	2,12 710	2,54 407	2,80 821	2,67 210	0,78 675	1,05 115	0,91 540
29	2,35 218	2,20 952	2,32 015	2,67 210	2,53 020	1,17 754	1,52 943	1,38 757
30	2,38 021	2,05 308	2,76 343	3,14 364	2,81 624	0,30 750	0,68 753	0,35 984
31	2,23 300	2,05 308	2,34 830	2,58 092	2,39 967	1,28 691	1,51 943	1,33 826
32	2,53 782	2,34 635	2,80 209	3,33 985	3,14 768	1,66 210	2,20 019	2,00 809
33	2,59 439	2,34 830	2,63 749	3,23 096	2,98 453	1,49 734	2,09 128	1,84 516
34	2,62 325	2,17 609	1,81 954	2,44 248	1,99 564	0,44 248	1,06 446	0,61 909
35	2,53 275	2,26 007	1,34 242	1,87 506	1,60 206	1,01 620	1,54 900	1,27 600
36	2,66 839	2,22 272	1,98 227	2,65 031	2,20 412	0,91 169	1,57 967	1,13 354
Somme des logarithmes	89,16 821	79,53 185	71,18 713	88,35 121	78,71 597	37,32 428	54,48 681	44,85 658
Idem: 36 . .	2,47 689	2,20 922	1,97 742	2,45 420	2,18 655	1,03 679	1,51 352	1,24 602
Nombre correspondant (moyenne géométrique simple). . . .	*300*	*162*	94,93 [2])	284,58 [2])	153,66 [2])	10,884 [2])	32,623 [2])	17,62 [2])
Rapport des moyennes (index géométrique simple) . . .	—	—	*100*	*300*	*162*	*100*	*300*	*162*

[1]) Les index particuliers et les prix sont indiqués au tableau VIII, les valeurs globales au tableau IX.

[2]) On pourrait établir aussi l'index général sans calculer ces nombres (moyennes géométriques) directement de la différence des logarithmes auxquels ces nombres correspondent; ainsi, le nombre correspondant à la différence des logarithmes (2,45 420 — 1,97 742) est 3,00, celui correspondant à (2,18 655 — 1,97 742) est égal 162, et ainsi de suite. En effet, si (7) $i_b = \frac{\sqrt[n]{b_1\, b_2\, b_3 \dots b_n}}{\sqrt[n]{a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n}}$, il s'ensuit que $\text{Log}\, i_b = \frac{1}{n}(\text{Log}\, b_1 + \text{Log}\, b_2 + \text{Log}\, b_3 + \dots \text{Log}\, b_n) - \frac{1}{n}(\text{Log}\, a_1 + \text{Log}\, a_2 + \text{Log}\, a_3 + \dots \text{Log}\, a_n)$ $\left[\text{ou encore} = \frac{\Sigma\, \text{Log}\, b - \Sigma\, \text{Log}\, a}{n}\right]$. Une observation analogue peut être faite au sujet de l'application des formules 8, 11 et 13.

Tableau XII.

Index géométriques pondérés des prix des 36 articles de l'U. S. C. S. C.: les trois procédés de calcul (base 1914).

Articles par nos d'ordre	Coefficients de poids (p) (1914)	Log. des index particuliers [1] (base 1914) multipliés par les coefficients de poids		Logarithmes des prix [1] (exprimés en centimes) multipliés par les coefficients de poids			Logarithmes des valeurs globales [1] (en francs) multipliés par les coefficients de poids		
		juin 1919	juin 1923	juin 1914	juin 1919	juin 1923	juin 1914	juin 1919	juin 1923
1	0,0498	0,11 950	0,11 255	0,12 496	0,14 484	0,13 792	0,08 544	0,10 534	0,09 841
2	0,0262	0,05 958	0,05 731	0,06 158	0,06 876	0,06 649	0,03 764	0,04 482	0,04 255
3	0,2411	0,52 943	0,53 207	0,32 831	0,37 522	0,37 809	0,57 882	0,62 573	0,62 860
4	0,0079	0,02 031	0,01 670	0,01 768	0,02 219	0,01 857	0,00 723	0,01 174	0,00 812
5	0,0067	0,01 770	0,01 466	0,01 450	0,01 880	0,01 576	0,00 564	0,00 994	0,00 690
6	0,0087	0,02 205	0,01 862	0,01 983	0,02 447	0,02 105	0,00 832	0,01 296	0,00 955
7	0,0093	0,02 435	0,02 040	0,02 148	0,02 722	0,02 329	0,00 918	0,01 493	0,01 099
8	0,0063	0,01 658	0,01 362	0,01 350	0,01 748	0,01 452	0,00 517	0,00 915	0,00 619
9	0,1647	0,38 213	0,36 302	0,25 431	0,30 689	0,28 793	0,36 814	0,42 072	0,40 176
10	0,0076	0,01 719	0,01 633	0,01 264	0,01 462	0,01 378	0,00 685	0,00 884	0,00 799
11	0,0057	0,01 332	0,01 259	0,00 953	0,01 145	0,01 072	0,00 442	0,00 634	0,00 561
12	0,0041	0,01 029	0,00 895	0,00 611	0,00 820	0,00 686	0,00 259	0,00 468	0,00 333
13	0,0013	0,00 319	0,00 284	0,00 216	0,00 275	0,00 240	0,00 019	0,00 078	0,00 043
14	0,0018	0,00 443	0,00 390	0,00 304	0,00 387	0,00 334	0,00 051	0,00 135	0,00 082
15	0,0037	0,00 911	0,00 815	0,00 625	0,00 796	0,00 700	0,00 219	0,00 390	0,00 293
16	0,0173	0,04 069	0,03 850	0,03 113	0,03 723	0,03 504	0,02 175	0,02 785	0,02 566
17	0,0021	0,00 594	0,00 451	0,00 347	0,00 521	0,00 378	0,00 069	0,00 244	0,00 100
18	0,0017	0,00 467	0,00 402	0,00 297	0,00 424	0,00 359	0,00 442	0,00 169	0,00 104
19	0,0011	0,00 284	0,00 267	0,00 192	0,00 256	0,00 239	0,00 005	0,00 069	0,00 052
20	0,0043	0,00 990	0,00 921	0,00 738	0,00 869	0,00 799	0,00 280	0,00 411	0,00 341
21	0,0159	0,03 983	0,03 597	0,03 773	0,04 575	0,04 190	0,01 940	0,02 742	0,02 357
22	0,1240	0,31 516	0,27 658	0,28 424	0,35 147	0,31 278	0,26 190	0,32 913	0,29 045
23	0,0023	0,00 582	0,00 511	0,00 536	0,00 658	0,00 586	0,00 085	0,00 208	0,00 136
24	0,0487	0,12 461	0,11 269	0,11 592	0,14 313	0,13 123	0,08 311	0,11 032	0,09 842
25	0,0383	0,10 303	0,08 334	0,03 830	0,06 473	0,04 504	0,06 136	0,08 779	0,06 810
26	0,0335	0,07 356	0,06 977	0,03 840	0,04 497	0,04 122	0,05 173	0,05 830	0,05 455
27	0,0306	0,07 571	0,07 332	0,05 117	0,06 567	0,06 329	0,04 604	0,06 055	0,05 816
28	0,0059	0,01 336	0,01 255	0,01 501	0,01 657	0,01 577	0,00 464	0,00 621	0,00 540
29	0,0144	0,03 387	0,03 182	0,03 341	0,03 848	0,03 643	0,01 696	0,02 202	0,01 998
30	0,0019	0,00 452	0,00 390	0,00 525	0,00 597	0,00 535	0,00 058	0,00 131	0,00 068
31	0,0185	0,04 131	0,03 798	0,04 344	0,04 775	0,04 439	0,02 381	0,02 811	0,02 476
32	0,0440	0,11 166	0,10 324	0,12 329	0,14 695	0,13 850	0,07 313	0,09 681	0,08 836
33	0,0301	0,07 809	0,07 068	0,07 989	0,09 725	0,08 983	0,04 507	0,06 295	0,05 554
34	0,0027	0,00 708	0,00 588	0,00 491	0,00 659	0,00 539	0,00 119	0,00 287	0,00 167
35	0,0099	0,02 507	0,02 237	0,01 329	0,01 856	0,01 586	0,01 006	0,01 534	0,01 263
36	0,0078	0,02 081	0,01 734	0,01 546	0,02 067	0,01 719	0,00 711	0,01 232	0,00 884
Au total . .	1,0000	2,38 669	2,22 316	1,84 732	2,23 374	2,07 054	1,85 498	2,24 153	2,07 828
Nombre correspondant (moyenne géométrique pondérée) . .		*243,6*	*167*	70,36 [2]	171,29 [2]	117,64 [2]	71,612 [2]	174,39 [2]	119,75 [2]
Rapport des moyennes (index géométrique pondéré)				*100*	*243,5*	*167*	*100*	*243,5*	*167*

[1]) Les logarithmes des index particuliers, des prix et des valeurs globales sont indiqués au tableau XI.
[2]) Observation analogue à celle de la note [2]) du précédent tableau.

de 20 % et 30 %, d'un côté, et de 2 % et 6 %, de l'autre. De même pour les index géométriques: la différence entre pondérés et non-pondérés est, en 1919, de $\frac{300 - 243,5}{243,5} = \frac{56,5}{243,5} = 23\ \%$ de l'index pondéré ou $\frac{200 - 143,5}{143,5} = \frac{56,5}{143,5} = 39\ \%$ de sa hausse sur 1914; en 1923, l'écart entre les deux index n'est respectivement que de

$$\frac{167 - 162}{167} = \frac{5}{167} = 3\ \% \text{ et } \frac{67 - 62}{67} = \frac{5}{67} = 7,5\ \%.$$

Pour ce qui concerne les erreurs résultant de procédés de calcul incorrects, nous en avons déjà constaté un exemple en calculant l'index arithmétique simple et nous avons pu remarquer que l'erreur a été également plus sensible pour 1919 que pour 1923. Mais c'est surtout en appliquant, aux statistiques des prix suisses, nos déductions concernant le problème du *changement de la date de base* que nous aurons l'occasion de constater l'importance de l'indice de divergence pour déterminer la confiance que méritent (ou que ne méritent pas) les résultats de certains calculs.

* * *

Supposons que nous voulons changer la date de base des index des prix en Suisse et, qu'au lieu de juin 1914, nous voulons prendre, comme base de nos comparaisons, l'état des prix au mois de juin 1919.

Nous savons que, pour les index arithmétiques pondérés (§ 24) ainsi que pour les index géométriques simples (§ 30), le changement de la date de base peut être effectué au moyen d'une simple division des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base.

Les index *arithmétiques pondérés* donnés (ayant pour base 1914) étant respectivement:

dates . . .	1914 . .	1919 . .	1923
index . . .	100 . .	261 . .	169,

on obtient, en les divisant par 261 (l'index de 1919, date de la nouvelle base), les index:

38 . . . 100 . . . 65.

Et, en effet, calculons les *index particuliers* de tous les articles pour 1914 et pour 1923 en mettant leurs prix de 1919 égaux 100; calculons également le *poids* des divers articles à cette nouvelle date de base, d'après la formule $p'_n = \frac{v'_n}{\Sigma v'}$, en nous basant sur la valeur globale de ces articles en 1919 et calculons les moyennes arithmétiques pondérées des index particuliers afin d'établir ainsi les index arithmétiques pondérés de l'ensemble des articles envisagés avec 1919 comme date de base. Nous obtenons alors le tableau XIII.

Tableau XIII.

Index arithmétiques pondérés des prix des 36 articles de l'U. S. C. S. C. calculés par le procédé des moyennes des index particuliers (base 1919).

Articles par nos d'ordre	Coefficients de poids (p') (1919)	Index particuliers (base 1919)		Index particuliers multipliés par coefficients de poids	
		juin 1914	juin 1923	juin 1914	juin 1923
1	0, 0478	39,9	72,6	1,90 722	3,47 028
2	0, 0188	53,2	82,0	1,00 016	1,54 160
3	0, 1444	63,9	102,8	9,22 716	14,84 432
4	0, 0112	26,9	34,8	0,30 128	0,38 976
5	0, 0112	22,8	35,2	0,25 536	39 424
6	0, 0113	29,3	40,5	0,33 109	45 765
7	0, 0148	24,1	37,7	0,35 668	55 796
8	0, 0104	23,4	34,0	0,24 336	35 360
9	0, 1314	47,9	76,7	6,29 406	10,07 838
10	0, 0053	54,7	77,4	0,28 991	41 022
11	0, 0047	46,1	74,5	0,21 667	35 015
12	0, 0051	31,0	47,0	0,15 810	23 970
13	0, 0015	35,2	53,5	0,05 280	8 025
14	0, 0020	34,5	50,8	0,06 900	10 160
15	0, 0041	34,5	55,0	0,14 145	22 550
16	0, 0149	44,4	74,6	0,66 156	1,11 154
17	0, 0053	14,8	20,7	0,07 844	10 971
18	0, 0036	17,9	41,5	0,06 444	14 940
19	0, 0016	26,3	70,4	0,04 208	11 264
20	0, 0033	49,7	68,9	0.16 401	22 737
21	0, 0194	31,3	57,3	0,60 722	1,11 162
22	0, 1654	28,7	48,8	4,74 698	8,07 152
23	0, 0029	29,4	48,6	0,08 526	14 094
24	0, 0675	27,6	57,0	1,86 300	3,84 750
25	0, 0719	20,4	30,6	1,46 676	2,20 014
26	0, 0202	63,6	77,3	1,28 472	1,56 146
27	0, 0349	33,6	83,6	1,17 264	2,91 764
28	0, 0041	54,4	73,2	0,22 304	30 012
29	0, 0124	44,5	72,1	0,55 180	89 404
30	0, 0018	41,7	47,0	0,07 506	8 460
31	0, 0121	58,5	65,9	0,70 785	79 739
32	0, 0581	29,0	64,3	1,68 490	3,73 583
33	0, 0452	25,5	56,7	1,15 260	2,56 284
34	0, 0043	23,8	35,8	0,10 234	15 394
35	0, 0130	29,3	53,3	0,38 090	69 290
36	0, 0139	21,5	35,8	0,29 885	49 762
Au total	1, 0000	1283,3	1957,9	38,25 865	64,77 597

On voit bien que les index arithmétiques pondérés des articles considérés, ayant 1919 comme base, sont respectivement 38, 100 et 65, chiffres qu'on a pu obtenir par le procédé de la simple division.

Il en est de même des index *géométriques simples*. Ces index, sur la base de 1914, sont comme nous l'avons vu (tableau XI):

dates . . .	1914 . .	1919 . .	1923
index . . .	100 . .	300 . .	162.

En divisant les index donnés par 300 (index de juin 1919 qui est la date devant servir de nouvelle base), nous obtenons respectivement les index:

33 . . . 100 . . . 54.

Or, ce sont précisément les mêmes index que l'on obtiendrait si l'on calculait les index particuliers de tous les articles envisagés sur la base de 1919 et si l'on en prenait ensuite la moyenne géométrique simple. On peut s'en rendre compte d'après le tableau XIV.

Tableau XIV.

Index géométriques simples des prix des 36 articles de l'U.S.C.S.C.: procédé des moyennes géométriques des index particuliers (base 1919).

Articles par nos d'ordre	Logarithmes des index particuliers [1]) (base 1919)	
	juin 1914	juin 1923
1	1,60 097	1,86 094
2	1,72 591	1,91 381
3	1,80 550	2,01 199
4	1,42 975	1,54 158
5	1,35 793	1,54 654
6	1,46 687	1,60 746
7	1,38 202	1,57 634
8	1,36 922	1,53 148
9	1,68 034	1,88 480
10	1,73 799	1,88 874
11	1,66 370	1,87 216
12	1,49 136	1,67 210
13	1,54 654	1,72 835
14	1,53 782	1,70 586
15	1,53 782	1,74 036
16	1,64 738	1,87 274
17	1,17 026	1,31 597
18	1,25 285	1,61 805
19	1,41 996	1,84 757
20	1,69 636	1,83 822
21	1,49 554	1,75 815
22	1,45 788	1,68 842
23	1,46 835	1,68 664
24	1,44 091	1,75 587
25	1,30 963	1,48 572
26	1,80 346	1,88 818
27	1,52 634	1,92 221
28	1,73 560	1,86 451
29	1,64 836	1,85 794
30	1,62 014	1,67 210
31	1,76 716	1,81 889
32	1,46 240	1,80 821
33	1,40 654	1,75 358
34	1,37 658	1,55 388
35	1,46 687	1,72 673
36	1,33 244	1,55 388
Somme des logarithmes	54,83 875	62,36 997
Idem: 36	1,52 330	1,73 250
Nombre correspondant (index)	*33*	*54*

[1]) Les index particuliers sont indiqués au tableau XIII.

Mais, comme nous le savons déjà, il en est autrement des index arithmétiques simples et des index géométriques pondérés. Ici, à l'aide d'une simple division des index donnés par l'index de la date devant servir de nouvelle base, on ne doit pas obtenir les nouveaux index cherchés.

En effet, les index *arithmétiques simples,* sur la base de 1914, sont, comme nous avons vu (tableau VIII):

dates	1914	1919	1923
index	100	320	165.

La division de ces index par 320 donne les chiffres:

31 . . . 100 . . . 52.

Or, si l'on calcule les index particuliers des articles en question en prenant pour base 1919 (voir colonnes 3 et 4 du tableau XIII) et si l'on en prend la moyenne non-pondérée, on obtient les index arithmétiques simples:

36 . . . 100 . . . 54.

Si l'on procédait donc par la simple division des index généraux donnés, l'erreur commise serait ainsi, pour l'index de 1914, de $\frac{36 - 31}{36} = \frac{5}{36} = 14\,\%$ et, pour l'index de 1923, de $\frac{54 - 52}{54} = \frac{2}{54} = 4\,\%$. Erreur bien sensible dans les deux cas, mais forte surtout pour 1914. Et cette dernière constatation est parfaitement compréhensible; car nous savons que la divergence des index particuliers a été forte surtout en 1919 par rapport à leur niveau de 1914 (c'est-à-dire juin 1914 étant marqué pour tous les articles par le même index 100) ou, ce qui revient au même, en 1914 par rapport à 1919, comme nous pouvons le voir aussi sur le tableau XIII.

Il va de soi que l'on commettrait la même erreur si l'on voulait, d'après les index arithmétiques simples, juger de l'importance de la hausse ou de la baisse des prix entre deux dates en dehors de la date de base. Supposons, par exemple, que constatant que l'index arithmétique simple était de 320 en 1919 et de 165 en 1923, nous concluons que les prix de 1923 sont à ceux de 1919 comme 165 : 320, soit comme 51,6 : 100, marquant ainsi une baisse de 48,4 %. Ce serait inexact; car les prix de 1919 étant mis égaux 100, ceux de 1923 s'expriment, comme nous venons de voir, par 54,4 % marquant ainsi une baisse de 45,6 % et non de 48,4 %. De même, et moins encore, pourrait-on dire que, puisque l'index général arithmétique simple est de 100 en 1914 et de 320 en 1919, les prix de 1914 étaient à ceux de 1919 comme 100 : 320, soit comme 31 à 100, car dans la réalité, comme nous venons de voir, ils se trouvaient dans le rapport de 36 à 100.

Pour ce qui concerne les index *géométriques pondérés,* les index donnés sont (tableau XII):

dates	1914	1919	1923
index	100	243,5	167.

En divisant ces index par 243,5 (l'index de la date devant servir de nouvelle base), on obtient:

41 . . . 100 . . . 69.

Les index ainsi établis seraient pourtant erronés. Il suffit, en effet, de remonter aux éléments d'après lesquels les index donnés ont été établis et de calculer

Tableau XV.

Index géométriques pondérés des prix des 36 articles de l'U.S.C.S.C.: procédé des moyennes géométriques pondérées des prix (base 1919).

Articles par nos d'ordre	Coefficients de poids (p') (1919)	Logarithmes des prix [1]) multipliés par coefficients de poids		
		juin 1914	juin 1919	juin 1923
1	0, 0478	0,11 994	0,13 903	0,13 238
2	0, 0188	0,04 418	0,04 934	0,04 771
3	0, 1444	0,19 663	0,22 473	0,22 645
4	0, 0112	0,02 507	0,03 146	0,02 632
5	0, 0112	0,02 424	0,03 143	0,02 634
6	0, 0113	0,02 575	0,03 178	0,02 735
7	0, 0148	0,03 418	0,04 333	0,03 706
8	0, 0104	0,02 229	0,02 886	0,02 398
9	0, 1314	0,20 289	0,24 484	0,22 971
10	0, 0053	0,00 881	0,01 020	0,00 961
11	0, 0047	0,00 786	0,00 944	0,00 884
12	0, 0051	0,00 761	0,01 020	0,00 853
13	0, 0015	0,00 249	0,00 318	0,00 277
14	0, 0020	0,00 338	0,00 430	0,00 371
15	0, 0041	0,00 693	0,00 882	0,00 776
16	0, 0149	0,02 681	0,03 207	0,03 018
17	0, 0053	0,00 876	0,01 316	0,00 954
18	0, 0036	0,00 629	0,00 898	0,00 761
19	0, 0016	0,00 280	0,00 373	0,00 348
20	0, 0033	0,00 566	0,00 667	0,00 613
21	0, 0194	0,04 603	0,05 582	0,05 113
22	0, 1654	0,37 914	0,46 881	0,41 721
23	0, 0029	0,00 676	0,00 830	0,00 739
24	0, 0675	0,16 066	0,19 838	0,18 189
25	0, 0719	0,07 190	0,12 153	0,08 456
26	0, 0202	0,02 315	0,02 712	0,02 486
27	0, 0349	0,05 836	0,07 490	0,07 218
28	0, 0041	0,01 043	0,01 151	0,01 096
29	0, 0124	0,02 877	0,03 313	0,03 137
30	0, 0018	0,00 497	0,00 566	0,00 507
31	0, 0121	0,02 841	0,03 123	0,02 904
32	0, 0581	0,16 280	0,19 405	0,18 288
33	0, 0452	0,11 921	0,14 604	0,13 490
34	0, 0043	0,00 782	0,01 050	0,00 858
35	0, 0130	0,01 745	0,02 438	0,02 083
36	0, 0139	0,02 755	0,03 684	0,03 064
Au total	1, 0000	1,93 598	2,38 375	2,16 895
Nombre correspondant (moyenne géométr. pondérée) [2]) .		86, 29	241, 96	147, 553
Rapport des moyennes (index géométrique pondéré) . .		*36*	*100*	*61*

[1]) Les logarithmes des prix sont indiqués au tableau XI.
[2]) Voir note [2]) du tableau XI.

les index généraux d'après ces mêmes éléments en prenant pour base le mois de juin 1919 (et en appliquant l'un quelconque des trois procédés indiqués plus haut); on se convaincra alors que les index exacts ayant pour base 1919 sont bien différents de ceux que nous venons de trouver à l'aide de la simple division des index généraux donnés par celui de 1919. Le tableau XV présente justement le calcul de ces index d'après les éléments fournis par l'observation, calcul effectué par le procédé des moyennes géométriques pondérées des prix des articles envisagés (selon la formule 32):

$$j'_m = \frac{m_1^{p'_1}\, m_2^{p'_2}\, m_3^{p'_3} \dots m_n^{p'_n}}{b_1^{p'_1}\, b_2^{p'_2}\, b_3^{p'_3} \dots b_n^{p'_n}}\,.$$

Les index exacts ainsi obtenus sont respectivement:

36, 100 et *61.*

L'erreur commise, si l'on procédait par la simple division, serait donc de $\frac{41-36}{36} = \frac{5}{36} = 14\ \%$ pour 1914 et de $\frac{69-61}{61} = \frac{8}{61} = 13\ \%$ pour 1923 [1]).

* * *

Ce sont là des chiffres qui sont très loin d'égaler ceux que nous avons vus plus haut pour l'Allemagne. Mais des erreurs allant jusqu'à 14 % ou 15 % ne sont évidemment pas des quantités négligeables. La justesse des procédés de calcul n'est donc pas, de nos jours, sans intérêt, même pour des fluctuations de prix relativement faibles telles qu'elles ont été observées en Suisse. Pour la plus forte raison, doit-on faire attention aux procédés de calcul dans des pays comme la France, la Belgique ou l'Italie qui occupent, sous ce rapport, une place en quelque sorte intermédiaire entre l'Allemagne et la Suisse, se rapprochant pourtant beaucoup plus de celle-ci que de celle-là. Que dire alors de l'Autriche, de la Pologne et de quelques autres pays où les fluctuations des prix rappellent bien celles observées en Allemagne à la période examinée, où elles les ont même dépassées?

Il se peut naturellement que, dans des circonstances *normales,* la divergence des mouvements des prix des divers articles devienne, pendant un temps plus ou moins prolongé, si faible que l'erreur résultant d'un procédé de calcul défectueux devienne pratiquement négligeable. Mais cette perspective même, qui d'ailleurs n'est pas encore du domaine de la réalité même en

[1]) Plus exactement: $\frac{41{,}1-35{,}6}{35{,}6} = \frac{5{,}5}{35{,}6} = 15\ \%$ pour 1914 et $\frac{68{,}6-61}{61} = \frac{7{,}6}{61} = 12{,}5\ \%$ pour 1923.

Suisse et qui est plus probable pour les prix de gros que pour les index du coût de la vie [1]), ne fait que souligner l'intérêt qu'il y aurait de noter non seulement l'index général (qui marque le niveau *moyen* des prix), mais aussi le degré de divergence des index particuliers. L'emploi de notre indice de divergence ou d'un autre étalon appelé à mesurer la dispersion des prix des articles individuels se trouve donc justifié également par les besoins réels de la statistique des prix.

[1]) Les index du coût de la vie doivent tenir compte aussi des loyers, des impôts, des soins médicaux, du coût du transport urbain, etc. dont les prix suivent un mouvement *systématiquement* différent de ceux de la plupart des autres articles, montant habituellement même pendant des périodes de baisse générale des prix: pour ces index, de notables divergences du mouvement des prix doivent donc être observées même dans des circonstances normales.

Die neue schweizerische Nomenklatur der Todesursachen.

Vom eidgenössischen statistischen Bureau.

1.

Das eidgenössische statistische Bureau hat ein neues Todesursachenschema ausgearbeitet, nach welchem das Kartenmaterial der Zivilstandsstatistik vom 1. Januar 1921 an ausgezählt wird.

Das neue Verzeichnis der Todesursachen umfasst 510 verschiedene Bezeichnungen, 190 mehr als die bis Ende 1920 verwendete Nomenklatur. Daraus geht hervor, dass eine *eingehendere* Bestimmung der Todesursachen vorgesehen ist, dies besonders einmal in Beziehung auf die *Unfälle* und ferner auf die *bösartigen Geschwülste,* welche nach ihrem primären oder sekundären Auftreten am Orte ihres Sitzes unterschieden sind.

2.

Die Nomenklatur trennt zunächst die *Ursachen der Totgeburten* (I) von den Ursachen der übrigen Todesfälle und scheidet von den letzteren wiederum aus: *die speziellen Ursachen des Todes im Säuglingsalter* (II) und den *Alterstod* (III). Die Ursachen aller andern Todesfälle zerlegt sie dann in solche *gewaltsamer* (IV—VII) und in solche *krankhafter* (VIII—XII) Natur.

Aus den Ursachen *gewaltsamen* Todes bildet sie die Gruppen: *Selbstmord* (IV), *strafbare Handlung* (V), *Hinrichtung* (VI) und *Unfall* (VII).

Die als Todesursachen bezeichneten *pathologischen* Vorkommnisse zerfallen in zwei Gruppenkomplexe:

1. Die *allgemeinen* Erkrankungen des Organismus, nämlich die *Infektionskrankheiten* (VIII), die *Schmarotzerkrankheiten* und *übertragene Tierkrankheiten* (IX), die *chronischen Vergiftungen* (X), die Krankheiten des *Blutes* und des *Stoffwechsels* (XI) und die *funktionellen Krankheiten des Nervensystems* (XV B).

   Die Gruppe XI enthält auch die Krankheiten der endokrinen Organe [1]).
2. Die an einem Organ eines Organsystems *lokalisierten* Krankheiten, nämlich die Krankheiten des *Ernährungsapparates* (XII), des *Atmungsapparates* (XIII), des *Kreislaufapparates* (XIV), des *Nervensystems* [2]) (XV A), der *Sinnesorgane* (XVI), des *Harnapparates* (XVII), der *männlichen Geschlechtsorgane* (XVIII), der *weiblichen Geschlechtsorgane* (XIX), der *Haut* und des *Unterhautzellgewebes* (XX) und des *Bewegungsapparates* (XXI).

   Die Gruppe XIX enthält auch die pathologischen Vorkommnisse, die zu *Schwangerschaft, Geburt* und *Wochenbett* in Beziehung stehen [3]), darunter Nephritis et Eclampsia gravidarum.

Die *bösartigen Geschwülste* sind in einer besondern Gruppe (XXII) vereinigt und darin nach der Lokalisation unterschieden. Die *gutartigen Geschwülste* finden sich hingegen bei den betreffenden Organen, zu welchen sie gehören.

3.

Folgende *Altersumgrenzungen* spielen im Verzeichnis eine grosse Rolle:

1. Die *Neugeborenen* (Neonati), Kinder im Alter von unter einem Monat.
2. Die *Säuglinge* (Lactentes), Kinder im Alter von unter einem Jahr.
3. Die *kleinen Kinder* (Infantes), Kinder im Alter von unter zwei Jahren.
4. Das *Greisenalter* (Senectus), Erwachsene im Alter von 60 und mehr Jahren.

[1]) Die Basedowsche Krankheit ist in der Gruppe XV B untergebracht.
[2]) Die organischen Krankheiten.
[3]) Der Ausdruck „puerperal" betrifft alle drei Zustände.