Konstruktion einer Überlebensordnung für die Stadt Bern

nach den Mortalitätsbeobachtungen der Jahre 1919—1922 und den Resultaten der eidgenössischen Volkszählung vom 1. Dezember 1920.

Von Dr. **W. Grütter-Mojon**, Adjunkt des statistischen Amtes der Stadt Bern.

Inhalt.

I. Einleitung.

Die Sterblichkeitsverhältnisse einer Gruppe von Personen werden in der Statistik allgemein mit Hilfe von Überlebensordnungen dargestellt. Die Konstruktion solcher *Überlebensordnungen oder Sterbetafeln* spielt in der Bevölkerungsstatistik ungefähr seit Beginn des 19. Jahrhunderts eine bedeutende Rolle, und ihre Ermittlung und Berechnung wurde seit der Inangriffnahme dieser Probleme in mancher Hinsicht von den bedeutendsten Statistikern beleuchtet, gefördert und vervollkommnet. Den Hauptgrund zur steten Untersuchung der Sterbetafeln und Ansporn zu ihrer Verbesserung bildet die Tatsache, dass vornehmlich die Versicherungsgesellschaften ihre Risikoberechnungen auf Überlebensordnungen aufbauen. Aber auch die reine Vergleichung von Überlebensordnungen unter sich kann dem Statistiker und dem Sozialpolitiker an und für sich manchen wertvollen Aufschluss bieten.

Für die *schweizerischen* Verhältnisse wurden bis dahin unter Zugrundelegung der Volkszählungsresultate und der Mortalitätsstatistik für die gesamte schweizerische Bevölkerung vier Überlebensordnungen berechnet:

1. Für den Zeitraum 1876—1880.
2. » » » 1881—1888.
3. » » » 1889—1900.
4. » » » 1901—1910.

Trotz aller Bedenken, die vom eidgenössischen statistischen Bureau gegen die Berechnung einer Absterbeordnung für die Jahre 1911—1920 geäussert werden, da ihre Vergleichbarkeit mit den frühern Sterbetafeln wegen der Einflüsse von Krieg und Grippe auf die schweizerische Bevölkerung nur eine beschränkte wäre, wäre es schade, wenn eine solche überhaupt nicht unternommen würde.

Die vier *Hauptbegriffe,* über die eine Überlebensordnung Aufschluss erteilt, sind:

1. l_x = *Zahl der Lebenden im Alter von x Jahren,* meist bezogen auf 1000, 10.000 oder 100.000 Neugeborene (l_0). Ist $x = \omega$ das letzte Altersjahr, in dem noch lebende Personen angetroffen werden, so stellt die Reihe aller l_x, wo x von 0 bis ω alle ganzen, positiven Zahlen durchläuft, d. h. die Reihe:

$$l_0\begin{pmatrix}= 1.000\\ = 10\,000\\ =100.000\end{pmatrix},\ l_1,\ l_2\ \ldots\ l_{x-1},\ l_x,\ l_{x+1},\ \ldots\ l_{\omega-1},\ l\omega,$$

die *Überlebensordnung* dar. Die einzelnen Glieder l_x geben an, wie viele Personen von l_0 (z. B. 10.000) Neugeborenen das Alter x erreichen würden, vorausgesetzt, dass die Sterblichkeitsverhältnisse die gleichen blieben wie im untersuchten Zeitraum.

2. d_x = *Sterbefälle vom Alter x* oder Zahl der Personen vom Alter x, die im nächsten Jahre, d. h. vor Erreichung des Alters $x + 1$, sterben. Definitionsgemäss ergibt sich aus der Reihe der l_x:

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Nach dieser Definition wird anderseits:

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \cdots + d_\omega = \sum_x^\omega d_n.$$

3. p_x = *einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit*, d. h. p_x gibt an, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein x-jähriger ein weiteres Jahr lebt, also den $(x+1)^{\text{ten}}$ Geburtstag erlebt. Die Definitionsgleichung für p_x lautet demnach:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Danach ist $p_0 = \frac{l_1}{l_0}$, $p_1 = \frac{l_2}{l_1}$ usw. oder anderseits

$$l_1 = p_0\, l_0,$$
$$l_2 = p_1\, l_1 = p_0\, p_1\, l_0$$
usw.,
$$l_x = p_{x-1}\, l_{x-1} = p_0 \cdot p_1 \cdots p_{x-1} \cdot l_0.$$
$$l_x = \prod_{n=0}^{n=x-1} p_n \cdot l_0.$$

4. q_x = *einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit*, d. i. die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger im nächsten Jahre stirbt, d. h.

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Aus den Definitionen für p_x und q_x folgt: $p_x + q_x = 1$, was der Tatsache entspricht, dass die Grössen p_x und q_x zusammen für eine x-jährige Person die *Gewissheit* darstellen, entweder den $x+1^{\text{ten}}$ Geburtstag zu erleben oder aber vorher zu sterben.

Von diesen 4 Grundgrössen l_x, d_x, p_x und q_x wird in der Praxis nicht das l_x, sondern entweder q_x oder p_x *ursprünglich* bestimmt und daraus die übrigen Grössen abgeleitet. Ist die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x die ursprünglich bestimmte Grösse, so wird:

1. $p_x = 1 - q_x$,
2. $l_x = \prod_{n=0}^{n=x-1} p_n \cdot l_0$,
3. $d_x = l_x - l_{x+1}$.

Bei der Aufstellung einer Überlebensordnung ist also die erste Aufgabe, die Überlebens-, bzw. die Sterbenswahrscheinlichkeiten des betreffenden Personenkomplexes für jedes Altersjahr x zu ermitteln, worauf die Überlebensordnung als rein rechnerische Folgerung abgeleitet werden kann.

Diese Berechnung der Sterbens- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeiten soll im folgenden anhand der Sterbeverhältnisse in der Bevölkerung der Stadt Bern durchgeführt werden, wobei Gelegenheit geboten sein wird, die verschiedenen Wege kennen zu lernen, auf denen dieses Ziel bis dahin zu erreichen versucht wurde.

II. Die Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x.

1. Grundlagen und Berechnungsmethoden.

Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person vom Alter x ist, wie gesehen, bestimmt durch den Ausdruck $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, d. h. die Sterbenswahrscheinlichkeit ist gleich der Zahl der Sterbefälle von Personen des Alters x bis $x+1$, dividiert durch die Zahl der gleichzeitig Lebenden vom Alter x. Die statistische Hauptaufgabe zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit ist die möglichst genaue Bestimmung der Sterbefälle sowie der Lebenden vom Alter x. Die Zahlen über die *Lebenden* werden am zuverlässigsten (abgesehen von den jüngsten Altern) den *Volkszählungsresultaten* entnommen, diejenige der *Sterbefälle* basieren auf den Totenregistern bzw. der *Mortalitätsstatistik*. Alle diese Zahlen sind aber, so wie sie dieses Urmaterial liefert, für die Konstruktion von Überlebensordnungen nicht direkt verwendbar, aus verschiedenen Gründen.

Zunächst muss, um die Volkszählungsergebnisse, die von einem bestimmten Stichtag (in der Schweiz: 1. Dezember) stammen, mit der Mortalitätsstatistik, die nach Kalenderjahren geführt wird, in Einklang zu bringen, die Bevölkerungsbewegung (Geburten, Todesfälle, eventuell auch Zu- und Wegzug) während des Restes des Volkszählungsjahres (Schweiz: Monat Dezember) verfolgt und die Bevölkerung auf *Ende des Volkszählungsjahres* festgestellt werden. Die Hauptschwierigkeit der zu lösenden Aufgabe jedoch besteht darin, die Sterbenswahrscheinlichkeit für eine Person vom *genauen* Alter x zu ermitteln. Die Volkszählungen und die Todesregister geben in der Regel Aufschluss über das *Geburtsjahr* der Lebenden bzw. der Gestorbenen. Die Überlebensordnung aber soll nach *Altersjahren* aufgebaut sein. Dieser Vergleich der Begriffe Geburtsjahr und Altersjahr sowie ihre Überführung ineinander ist es, was bei der Konstruktion einer Überlebensordnung die grösste Rolle spielt. Mit der Zeit bildeten sich mehrere Methoden heraus, um auf möglichst einfache und doch exakte Weise die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x zu bestimmen. Von diesen Methoden seien die drei wichtigsten anhand des Beispiels der Sterblichkeit in der Stadt Bern kurz betrachtet [1]).

[1]) Die Halleysche Methode, die sich auf die Annahme einer stationären Bevölkerung bezieht, wird hier, weil in diesem Zusammenhang bedeutungslos, übergangen.

a) Ältere Methode.

Vorausgesetzt, die zu untersuchende Bevölkerungsgruppe sei auf *31. Dezember* (z. B. des Jahres 1920, durch Fortschreibung der Volkszählung dieses Jahres), nach Geburtsjahren gegliedert, festgestellt worden. Damit erhält man gleichzeitig auch deren Gliederung nach *zurückgelegten Altersjahren.* Eine im Jahre 1870 geborene Person z. B., die am 31. Dezember 1920 gezählt wurde, hat den 50. Geburtstag sicher erlebt, den 51. dagegen sicher noch nicht. Die Zahl der zurückgelegten Altersjahre (x) ist bei Feststellungen, die sich auf den 31. Dezember des Zähljahres (z) beziehen, stets gleich der Jahreszahl des Zähljahres, vermindert um die Jahreszahl des Geburtsjahres (g); $x = z - g$.

Werden nun auch die Todesfälle nach zurückgelegten Altersjahren gezählt, wie dies in der amtlichen Mortalitätsstatistik meist der Fall ist, so lässt sich die Sterbenswahrscheinlichkeit für eine bestimmte Altersstufe berechnen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Auf 31. Dezember des Jahres 1920 wurden b_{50} Personen des Geburtsjahres 1870, die also das 50. Altersjahr zurückgelegt, den 51. Geburtstag aber noch nicht erlebt hatten, festgestellt. Diese b_{50} Personen waren am 31. Dezember 1920, unter der Annahme, dass sich ihre Geburtstage gleichmässig auf das Jahr verteilen, im Durchschnitt zirka 50½jährig. In dieser Altersstufe von 50 bis 51 Jahren seien ferner innert Jahresfrist m_{50} Personen gestorben. Hierbei müssten, streng genommen (unter Zugrundelegung der Bevölkerung vom 31. Dezember 1920), die Todesfälle vom 1. Juli 1920 bis zum 30. Juni 1921 mit den Lebenden vom 31. Dezember 1920 verglichen werden. In der Mortalitätsstatistik werden aber die Todesfälle nach Kalenderjahren zusammengefasst, so dass diese Bestimmung von q_x mit der Annahme einer während eines Jahres stationär bleibenden Bevölkerung rechnen muss, was einen (allerdings meist zu vernachlässigenden) kleinen Fehler in der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit bedingt.

Zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit (q_{50}) für eine 50jährige Person ist die Zahl der Gestorbenen m_{50} mit der Zahl der Lebenden in Beziehung zu setzen, die den 50. Geburtstag erlebt haben, d. h. die überhaupt in die Altersstufe von 50 bis 51 Jahren eintraten. Dies sind erstens die b_{50} gezählten Personen von zirka 50½ Jahren und zweitens die bis zum 31. Dezember Gestorbenen dieser Altersstufe. Die Zahl dieser letztern ist aber, vorausgesetzt, dass die Zahl der Sterbefälle sich gleichmässig über das ganze Jahr verteilen, $= \frac{m_{50}}{2}$. Die Zahl der Lebenden, die in die Altersstufe von 50 bis 51 Jahren eintraten, ist also im ganzen: $b_{50} + \frac{1}{2} m_{50}$. Nun ist die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person

$$= \frac{\text{Zahl der Gestorbenen im Alter } x \text{ bis } x+1}{\text{Zahl der Lebenden am Anfang der Altersstufe } (x)}$$

oder zum Beispiel:

$$q_{50} = \frac{m_{50}}{b_{50} + \frac{1}{2} m_{50}}.$$

Verallgemeinert lautet die Formel für x zurückgelegte Altersjahre:

$$q_x = \frac{m_x}{b_x + \frac{1}{2} m_x}. \qquad (1)$$

wo m_x = jährliche Zahl der Sterbefälle im Alter x bis $x + 1$,

b_x = Zahl der (am 31. Dezember des Zähljahres z gezählten) Lebenden vom Alter x bis $x + 1$.

Diese Methode der Bestimmung von q_x, die von verschiedenen Berechnungsstellen von Überlebensordnungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts als brauchbare Annäherungsmethode verwendet wurde, hat den neuern Methoden gegenüber den Vorteil einfacher Berechnungsart, in Verbindung mit einer für die meisten Zwecke kleinerer Untersuchungen genügenden Genauigkeit. Sie hat ausserdem den Vorteil, dass sie sich ohne weiteres verallgemeinern lässt für den Fall, wo die Zahlen der Lebenden und der Todesfälle nicht für jedes Altersjahr, sondern nur für mehrjährige Altersklassen bekannt sind. Umfassen diese Klassen z. B. n Jahre (das n kann auch veränderlich sein, z. B. kleiner für die jüngsten Alter als für die höhern), so ergibt sich die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit:

$$q_{x/x+n-1} = \frac{m_{x/x+n-1}}{b_{x/x+n-1} + \frac{1}{2} m_{x/x+n-1}}. \qquad (1^a)$$

Die Indizes $x/x + n - 1$ sollen andeuten, dass es sich um mehrjährige Altersstufen handelt. Das q_x bezieht sich dann eben auch auf die *ganze* Stufe und wird die grösste Annäherung an die Wirklichkeit weder im Anfangsalter x, noch im Endalter $x + n - 1$ aufweisen, sondern in einem mittlern Zwischenjahr. In erster Annäherung wird q als für die *Mitte* der Altersstufe geltend angesehen werden können, d. h. als dem Werte $q_{x+\frac{n-1}{2}}$ entsprechend.

In den neuern Methoden der Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten wurde nun versucht, dem Umstande Rechnung zu tragen, dass die Todesfälle bestimmter Geburtsjahre, die während ein und desselben Kalenderjahres erfolgen, sich nicht alle auf das gleiche Altersjahr beziehen und umgekehrt die Sterbefälle gleicher Altersjahre zwei verschiedenen Geburtsjahren entstammen können. Dies hat dazu geführt, in der Mortalitätsstatistik die Todesfälle in solche *erfüllten* Alters und solche *nicht erfüllten* Alters zu scheiden; d. h. die Gestorbenen eines bestimmten Geburtsjahres werden getrennt in solche, die *vor* Erleben ihres in das Todesjahr fallenden Geburtstages sterben, und solche, die *nach* erlebtem Geburtstag vom Tod ereilt werden. Dazu müssen natürlich nicht nur Geburts- und Todesjahr des Verstorbenen, sondern auch Geburts- und Todesmonat und -tag bekannt sein.

Auf Grund dieser Teilung wurden vornehmlich zwei Methoden zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit herausgebildet und auch für schweizerische Verhältnisse angewandt: Die Methode *Becker-Zeuner* und die Methode *Böckh-Durer*.

b) Die Zeunersche Methode.

Um die Todesfälle ein und desselben Altersjahres vollständig zu erhalten, werden nach dieser Methode die Sterbefälle eines Geburtsjahres sowohl während des Jahres *vor* dem Stichtag (31. Dezember) der Feststellung der Lebenden als auch während des Jahres *nach* dieser Zählung verfolgt.

Die Zahl der Sterbenden sei allgemein wie folgt bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} {}_v m_g^t = \text{vor} \\ {}_n m_g^t = \text{nach} \end{array}\right\} \text{ihrem in das Todesjahr } t \text{ fallenden Geburtstag Gestorbene des Geburtsjahres } g.$$

Aus der Mortalitätsstatistik des Jahres 1920 erhält man also z. B. alle ${}_v m_g{}^{1920} + {}_n m_g{}^{1920} = m_g{}^{1920}$, aus derjenigen von 1921 alle $m_g{}^{1921}$. Die Methode wird am einfachsten anhand eines Beispieles erläutert:

Am 31. Dezember 1920 wurden b_{1870} Personen vom Geburtsjahrgang $g = 1870$ gezählt. Diese standen alle im Alter von 50 bis 51 Jahren, hatten also ihren 50. Geburtstag erlebt. Ausserdem hatten aber auch alle diejenigen Personen des Jahrganges 1870 ihren 50. Geburtstag erlebt, die im Laufe des Jahres *1920 nach* ihrem Geburtstag dieses Jahres starben. Sie sind nach obigem bezeichnet durch ${}_n m_{1870}^{1920}$. Die Gesamtzahl aller Personen vom Jahrgang 1870, die ihren 50. Geburtstag erlebten, war also $b_{1870} + {}_n m_{1870}^{1920}$. Den *51.* Geburtstag dagegen erlebten alle b_{1870}, abzüglich der im Jahre *1921 vor* erlebtem Geburtstag verstorbenen Personen des Jahrganges 1870 (${}_v m_{1870}^{1921}$), d. h. $b_{1870} - {}_v m_{1870}^{1921}$. Die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für eine 50-jährige Person beträgt demnach für diese Beobachtungen:

$p_{50} = \dfrac{b_{1870} - {}_v m_{1870}^{1921}}{b_{1870} + {}_n m_{1870}^{1920}}$, und die Sterbenswahrscheinlichkeit $q_{50} = 1 - q_{50}$ wird:

$$q_{50} = \frac{{}_n m_{1870}^{1920} + {}_v m_{1870}^{1921}}{b_{1870} + {}_n m_{1870}^{1920}}.$$

Bezeichnet wieder allgemein z das Zähljahr und g das Geburtsjahr, also $x = z - g$ das Altersjahr, so ist die Sterbenswahrscheinlichkeit:

$$q_x = \frac{{}_n m_g^z + {}_v m_g^{z+1}}{b_g^z + {}_n m_g^z}. \tag{2}$$

c) Methode Böckh.

Bei dieser Methode werden nicht die Todesfälle zweier verschiedener Beobachtungsjahre (z und $z + 1$) und eines Geburtsjahres zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit eines bestimmten Altersjahres zusammengefasst, sondern diejenigen zweier Geburtsjahre, aber nur eines Beobachtungsjahres (z). Die Methode sei wieder am Beispiel der 50jährigen Personen erläutert: Am 31. Dezember 1920 wurden b_{1870} Lebende vom Geburtsjahrgang 1870 gezählt; den 50. Geburtstag jedoch erlebten auch die oben erwähnten ${}_n m_{1870}^{1920}$; *die Wahrscheinlichkeit für die Personen vom Jahrgang 1870, die den 50. Geburtstag erlebt hatten, Ende 1920* (also im Alter zwischen 50 und 51 Jahren) *noch zu leben, ist also:*

$$p'_{50} = \frac{b_{1870}}{b_{1870} + {}_n m_{1870}^{1920}}.$$

Anderseits lebten am 31. Dezember *1919* (bzw. 1. Januar 1920) vom Jahrgang 1869: Alle am 31. Dezember 1920 Gezählten, plus die im Jahre 1920 überhaupt Gestorbenen dieses Jahrganges (m_{1869}^{1920}), d. h. $b_{1869} + m_{1869}^{1920}$. Diese Personen standen zu Anfang des Jahres 1920 ebenfalls zwischen ihrem 50. und 51. Geburtstag. Von diesen Personen erreichten ihren *51.* Geburtstag alle, mit Ausnahme der *vor* ihrem Geburtstag im Jahre 1920 Gestorbenen (${}_v m_{1869}^{1920}$), d. h. *die Wahrscheinlichkeit einer am 31. Dezember 1919 bzw. 1. Januar 1920 im Alter von 50—51 Jahren stehenden Person, den 51. Geburtstag zu erleben, war:*

$$p''_{50} = \frac{b_{1869} + m_{1869}^{1920} - {}_v m_{1869}^{1920}}{b_{1869} + m_{1869}^{1920}}$$

oder, da: $m_{1869}^{1920} - {}_v m_{1869}^{1920} = {}_v m_{1869}^{1920} + {}_n m_{1869}^{1920} - {}_v m_{1869}^{1920} = {}_n m_{1869}^{1920}$:

$$p''_{50} = \frac{b_{1869} + {}_n m_{1869}^{1920}}{b_{1869} + m_{1869}^{1920}}.$$

Die Methode macht nun die *Annahme*, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Person vom Jahrgang 1869, die Ende des Jahres 1919 noch lebte, ihren ins Jahr 1920 fallenden 51. Geburtstag zu erleben, der Wahrscheinlichkeit gleichgesetzt werden könne, dass eine Person vom Jahrgang 1870, die Ende 1920 (z) noch lebte, ihren ins Jahr 1921 fallenden 51. Geburtstag erlebe. Unter dieser Voraussetzung setzt sich die Wahrscheinlichkeit für eine 50jährige Person, 51 Jahre alt zu werden, zusammen aus der Wahrscheinlichkeit p' (d. h. Ende des Zähljahres noch zu leben) und der Wahrscheinlichkeit p'' (d. h. von Ende des Jahres bis zum 51. Geburtstag noch zu leben); sie ist

$$p_{50} = p'_{50} \cdot p''_{50}$$

und daraus die Sterbenswahrscheinlichkeit

$$q_{50} = 1 - p'_{50} \cdot p''_{50}.$$

Geht man zu einem beliebigen Altersjahr x über, wobei wieder $x = z - g$ zu setzen ist, so erhält man zur Bestimmung von q_x die Formelgruppe:

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= \frac{b^z_g}{b^z_g + {}_n m^z_g} && (a) \\ p''_x &= \frac{b^z_{g-1} + {}_n m^z_{g-1}}{b^z_{g-1} + m^z_{g-1}} && (b) \\ q_x &= 1 - p'_x \cdot p''_x && (c) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

d) Die praktischen Anwendungsmöglichkeiten.

Bei Verwendung der Zeunerschen oder der Böckhschen Methode zur Konstruktion einer Sterbetafel für ein ganzes Land (z. B. schweizerische Sterbetafeln) wird allgemein so vorgegangen, dass die Sterblichkeit anhand eines Volkszählungsresultates (z. B. 1900) und der entsprechenden Mortalitätsstatistiken berechnet und auf diese Weise die Bevölkerung auf Ende des der Volkszählung folgenden Jahres (z. B. 1901) fortgeschrieben wird; auf diese Bevölkerung wird dasselbe Verfahren wieder angewendet usw., bis so die Bevölkerung zur Zeit der nächstfolgenden Volkszählung (z. B. 1910) berechnet ist. Der Unterschied zwischen diesem berechneten Resultat und dem tatsächlichen Volkszählungsresultat wird durch Abänderung der Zwischenresultate ausgeglichen und auf diese Weise der Aus- und Einwanderung in der zwischen den beiden Volkszählungen liegenden Zeit Rechnung getragen. In Praxi lässt sich das Verfahren abkürzen, indem die Sterbefälle aller Jahre in geeigneter Weise zu sogenannten «Hauptgesamtheiten» zusammengefasst werden können; grundsätzlich wird aber an den Methoden nichts geändert. Es ist jedoch einleuchtend, dass sich dieses fortlaufende Verfahren nur anwenden lässt, wenn einerseits bei beiden Volkszählungen die Bevölkerung des zu untersuchenden Gebietes nach Geburtsjahren ausgegliedert wurde und wenn anderseits für alle Zwischenjahre die Todesfälle der einzelnen Geburtsjahrgänge nach erfüllten und nicht erfüllten Altersjahren ausgezählt sind. Ferner ist es auch nur anwendbar, wenn sich sowohl Volkszählungen als auch Todesstatistik während der ganzen Zeitperiode auf das gleiche Bevölkerungsgebiet beziehen. Alle diese Bedingungen sind aber im vorliegenden Falle nicht restlos erfüllt.

Für die Stadt Bern wurde anlässlich der Volkszählung von 1910 die Bevölkerung nur nach 5jährigen Geburtsjahresklassen ausgeschieden, und die Mortalitätsstatistik der Jahre 1910 bis 1918 (d. h. bis zum Ausbau des städtischen statistischen Amtes) ist ebenfalls nicht in der zu diesen Zwecken erforderlichen Detaillierung aufgearbeitet. Hauptgrund des Versagens reiner Anwendungsmöglichkeiten der Methoden Zeuner oder Böckh in diesem Falle ist jedoch die Eingemeindung von Bümpliz am 1. Januar 1919. Bis und mit dem Jahre 1918 (also auch bei der Volkszählung von 1910) beziehen sich alle statistischen Daten für die Stadt Bern auf das heutige Stadtgebiet ohne Bümpliz, während seit 1919, und auch bei der Volkszählung vom 1. Dezember 1920 die ehemalige Gemeinde Bümpliz zur Stadt Bern gerechnet wird. Für die Berechnung der Überlebensordnungen wäre dies von untergeordneter Bedeutung, wenn angenommen werden könnte, dass der Altersaufbau und das Geschlechterverhältnis der Bevölkerung von Bümpliz ungefähr dieselben wären, wie in der übrigen Stadt Bern. Dies trifft aber für Bümpliz, vor allem seines stark landwirtschaftlichen Charakters wegen, nicht zu, wie das Volkszählungsresultat von 1920 annehmen lässt.

Trotz der erwähnten Hinderungsgründe werden die vorgezeichneten Methoden doch die Richtlinien für die Konstruktion einer Sterbetafel für die Stadt Bern bieten können.

2. Anwendung auf die stadtbernische Sterblichkeit 1919—1922.

Als Grundlage für die Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit für die stadtbernischen Verhältnisse stehen zur Verfügung:

1. das Volkszählungsresultat vom 1. Dezember 1920,
2. die Geburtenstatistik der Jahre 1919—1922,
3. die Mortalitätsstatistik der Jahre 1919—1922.

Dabei gelangen also zwei Jahre vor und zwei Jahre nach der Volkszählung zur Berücksichtigung. Die Daten aller vier Jahre beziehen sich auf das heutige Stadtgebiet (einschliesslich Bümpliz), und das Grippejahr 1918 mit seinen ganz anormalen Sterblichkeitsverhältnissen ist ausgeschlossen. Die Berechnung der Bevölkerung auf *31. Dezember 1920*, nach Geburtsjahrgängen gegliedert, bot keine Schwierigkeiten, da sowohl die Geburten als auch die Todesfälle und die Wanderungen nach Geburtsjahren der Gestorbenen bzw. der Zu- und Weggezogenen festgestellt waren. Von vornherein wurde die ganze Untersuchung für das männliche und das weibliche Geschlecht getrennt durchgeführt. Für den Grossteil der Untersuchungen wurden die Daten (abgesehen von den Altersjahren 0 bis 5) nach fünfjährigen Altersklassen zusammengefasst.

In Anlehnung an die vorstehend besprochenen Methoden konnten nun die Sterbenswahrscheinlichkeiten auf verschiedene Arten bestimmt werden.

a) Bestimmung von q_x unter Zugrundelegung der ältern Methode.

Diese Methode bietet, wie gesehen (Formel 1ª), den Vorteil, dass die Todesfälle mehrjähriger Altersklassen ohne weiteres zusammengefasst werden können. Dies wurde zur Anwendung gebracht, um für die Stadt Bern die Sterbenswahrscheinlichkeit für die Altersklassen 0—1, 1—4, 5—9, 10—14... (je fünfjährige Klassen) zu bestimmen, d. h. die Zahl n in Formel 1ª wurde substituiert:

$$\begin{aligned} n &= 1 \text{ für das Alter } x = 0, \\ n &= 4 \text{ » » » } x = 1, \\ n &= 5 \text{ » die » } x \geqq 5. \end{aligned}$$

Überdies trug eine weitere Abstraktion zur Vereinfachung bei: Als mittlere Wohnbevölkerung der Stadt Bern für die Jahre 1919—1922, wie sie sich aus der Fortschreitung ergibt, wurde die Zahl 104.352 festgestellt. Als Bevölkerungszahl am 31. Dezember 1920 ergibt sich dagegen nach Übersicht 1: Männer 48.053, Frauen 56.275, total 104.328. Diese Übereinstimmung, verbunden mit der Regelmässigkeit der Zahl der Geburten und Todesfälle in allen Altersklassen in den Jahren 1919—1922, lässt es zulässig erscheinen, *dass als mittlere Zahl der Todesfälle pro Jahr für die Jahre 1919—1922 der vierte Teil aller Todesfälle dieser 4 Jahre genommen werden kann*, bzw. dass man unbedenklich die Gesamtzahl der Todesfälle der Jahre 1919—1922 auf die vierfache Wohnbevölkerung vom 31. Dezember 1920 beziehen darf. Bezeichnet $b_{x/x+n-1}$ die Zahl der am 31. Dezember 1920 gezählten Personen im Alter x bis $x+n-1$ d. h. die Geburtsjahrgänge $g = 1920 - x$ bis $g = 1920 - [x+n-1]$ und $m_{x/x+n-1} = \frac{1}{4}(m^{1919}_{x/x+n-1} + m^{1920}_{x/x+n-1} + m^{1921}_{x/x+n-1} + m^{1922}_{x/x+n-1})$ die durchschnittliche Zahl der Sterbefälle von x bis $x+n-1$-jährigen Personen pro Jahr, so ist in Übereinstimmung mit (1ª):

$$q_{x/x+n-1} = \frac{m_{x/x+n-1}}{b_{x/x+n-1} + \frac{1}{2} m_{x/x+n-1}}. \tag{4}$$

Das Korrekturglied $\frac{1}{2} m_{x/x+n-1}$ zur Überführung der Bevölkerungszahl vom Zähltag in den Anfangsbestand der betreffenden Altersstufe hat in unserm Beispiel auf die Sterbenswahrscheinlichkeit q in der 5. Stelle nach dem Komma nur einen Einfluss für die Altersjahre $x < 4$ und $x > 50$.

Das Ergebnis dieser Berechnung von q_x ist in Übersicht 1 dargestellt. Man erhält u. a.:

Alter x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	
	Männliches Geschlecht	Weibliches Geschlecht
0—1	0.06 645	0.04 255
1—4	0.00 684	0.00 569
5—9	0.00 235	0.00 315
10—14.	0.00 150	0.00 133
...	...	...
50—54.	0.01 774	0.01 243
...	...	...
80—84.	0.13 492	0.16 250
85—89.	0.28 189	0.24 299
90—94.	0.26 087	0.26 087
95 und mehr	—	—

b) Bestimmung von q_x in Anlehnung an die Methoden Zeuner bezw. Böckh.

Als Zahl der Lebenden sind wieder die am 31. Dezember 1920 vorhandenen Personen, diesmal gegliedert nach den einzelnen Geburtsjahrgängen (b_x^{1920}), sowie die Todesfälle der Jahre 1919—1922, gegeben. Die in der Zeunerschen und in der Böckhschen Methode niedergelegten Grundsätze lassen sich, allerdings mit bedeutenden Einschränkungen, nun auch bei räumlich und zeitlich stark beschränktem Beobachtungsmaterial, wie dem vorliegenden, zur Bestimmung von q_x heranziehen. Diese Untersuchungen wurden für das *männliche Geschlecht* in der im folgenden besprochenen Weise durchgeführt.

Zunächst wurden die Todesfälle der Jahre 1919 bis 1922 nach erfülltem und nicht erfülltem Alter für jedes einzelne Geburtsjahr ausgeschieden.

Streng genommen, wären nach den Methoden Zeuner bzw. Böckh nur die Todesfälle des Jahres 1920 und 1921 bzw. nur 1920, gegliedert nach erfüllten (${}_v m_x$) und nicht erfüllten (${}_n m_x$) Altersjahren, direkt auf die Bevölkerungszahlen vom 31. Dezember 1920 anwendbar. Da aber die Resultate damit übermässigen Zufallsschwankungen ausgesetzt gewesen wären, wurden analog wie bei der ältern Methode die Todesfälle aller vier

Beobachtungsjahre herangezogen und zur vierfachen Bevölkerungszahl vom 31. Dezember 1920 in Beziehung gesetzt. Als Gesamtzahl der in den Beobachtungsjahren 1919—1922 z. B. in ihrem 50. und 51. Altersjahr Gestorbenen ergeben sich folgende vier Zahlenausdrücke:

$$
\begin{aligned}
{}_v m_{1869}^{1919} + {}_v m_{1870}^{1920} + {}_v m_{1871}^{1921} + {}_v m_{1872}^{1922} &= \sum {}_v m_{50}, \\
{}_n m_{1869}^{1919} + {}_n m_{1870}^{1920} + {}_n m_{1871}^{1921} + {}_n m_{1872}^{1922} &= \sum {}_n m_{50}, \\
{}_v m_{1868}^{1919} + {}_v m_{1869}^{1920} + {}_v m_{1870}^{1921} + {}_v m_{1871}^{1922} &= \sum {}_v m_{51}, \\
{}_n m_{1968}^{1919} + {}_n m_{1869}^{1920} + {}_n m_{1870}^{1921} + {}_n m_{1871}^{1922} &= \sum {}_n m_{51}.
\end{aligned}
$$

Formel (2) für die Sterbenswahrscheinlichkeit, berechnet nach der Methode *Zeuner*, lautet: $q_x = \frac{{}_n m_g^z + {}_v m_g^{z+1}}{B_g^z + {}_n m_g^z}$, wo z das Zähljahr und g das Geburtsjahr darstellt. Nun ist $z - g = x$, und $z + 1 - g = x + 1$. Unter der gemachten Annahme, dass man die in den vier Jahren 1919—1922 erfolgten Todesfälle auf die vierfache Bevölkerung vom 31. Dezember 1920 beziehen könne, erhält man dann als Ausdruck für die Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person vom Alter x in Anlehnung an die Methode *Zeuner:*

$$q_x = \frac{\sum {}_n m_x + \sum {}_v m_{x+1}}{4\, b_x + \sum {}_n m_x}. \qquad (5)$$

Für die Methode *Böckh* lieferte Formel (3) die Ausdrücke:

$$p'_x = \frac{B_g^z}{B_g^z + {}_n m_g^z}; \quad p''_x = \frac{B_{g-1}^z + {}_n m_{g-1}^z}{B_{g-1}^z + m_{g-1}^z}; \quad q_x = 1 - p'_x \cdot p''_x.$$

In der Annahme, dass die Bevölkerung während des Beobachtungsjahres stationär bleibe, gilt wiederum $x = z - g$ und *gleichzeitig* $x + 1 = z - (g - 1)$. Danach erhält man:

$$p'_x = \frac{B_x}{B_x + {}_n m_x}; \qquad p''_x = \frac{B_{x+1} + {}_n m_{x+1}}{B_{x+1} + m_{x+1}}.$$

Substituiert man wiederum:

$$
\begin{aligned}
B_x &= 4\, b_x, \\
{}_n m_x &= \sum {}_n m_x, \\
{}_v m_x &= \sum {}_v m_x, \\
m_x &= \sum {}_n m_x + \sum {}_v m_x = \sum m_x,
\end{aligned}
$$

so erhält man für die Berechnung von q_x in Anlehnung an die Methode *Böckh* folgende Formelgruppe:

$$
\left.
\begin{aligned}
p'_x &= \frac{4\, b_x}{4\, b_x + \sum {}_n m_x} && (a) \\
p''_x &= \frac{4\, b_{x+1} + \sum {}_n m_{x+1}}{4\, b_{x+1} + \sum m_{x+1}} && (b) \\
q_x &= 1 - p'_x \cdot p''_x && (c)
\end{aligned}
\right\} \quad (6)
$$

Auf diese Weise sind, den Methoden Zeuner und Böckh im Prinzip folgend, wie in Übersicht 2 dargestellt ist, die Werte q_x für das männliche Geschlecht und die Altersjahre 0 bis 14, 50 bis 54 und 80 bis ω berechnet worden. Als Durchschnitt für die mehrjährigen Altersklassen wurde das arithmetische Mittel der verschiedenen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x der betreffenden Stufe genommen. Aus Tabelle 2 ergeben sich für diese Altersklassen (männliches Geschlecht) die folgenden Sterbenswahrscheinlichkeitswerte. Zum Vergleich sind auch die nach der ältern Methode gewonnenen, analogen Werte aufgeführt:

Alter x	q_x (Männer)		
	(Zeuner)	(Böckh)	Ältere Methode
0—1	0.06 537	0.07 020	0.06 645
1—4	0.00 702	0.00 684	0.00 684
5—9	0.00 236	0.00 234	0.00 235
10—14. . . .	0.00 150	0.00 150	0.00 150
. . .	. . .	. . .	. . .
50—54. . . .	0.01 775	0.01 810	0.01 774
. . .	. . .	. . .	. . .
80—84. . . .	0.13 514	0.14 925	0.13 492
85—89. . . .	0.31 159	0.26 638	0.28 189
90—94. . . .	0.25 000	0.50 000	0.26 087
95 und mehr .	. . .	. . .	. . .

Abgesehen vom Säuglingsalter und den höchsten Altersklassen, deren Besetzung zu klein ist, um zuverlässige Beobachtungsresultate zu liefern, stimmen die drei Methoden mit grosser Genauigkeit miteinander überein. (In Anlehnung an die Methode Böckh wurde die Berechnung für Männer für *alle* Alter durchgeführt.) Es ist also das Gegebene, dass bei dem beschränkten Material, wie es dasjenige einer Stadt von 100.000 Einwohnern darstellt, zur Lösung der Aufgabe, die Sterblichkeit darzustellen, der *einfachste* Weg gewählt wird, und dies ist die ältere Methode, für die die Werte von q_x für fünfjährige Altersklassen in Übersicht 1 aufgeführt sind. Für die niedrigsten und obersten Grenzalter werden noch Korrekturen anzubringen sein, im übrigen wird mit den Werten, wie sie sich nach der ältern Methode ergeben, mit hinreichender Genauigkeit operiert werden können. Für die Säuglingssterblichkeit gibt der Vergleich der *Geburten* mit den entsprechenden Todesfallzahlen die grössere Genauigkeit als die Volkszählungsresultate, da erfahrungsgemäss Volkszählungen für diese Zahlen stets einige Lücken aufweisen, während die Geburtenstatistik als lückenlos angesehen werden darf und die Wanderungen im Säuglingsalter von ganz untergeordneter Bedeutung sind. Für die höchsten Alter wird eine mechanische Anpassung den nötigen Ausgleich gestatten.

c) Die Säuglingssterblichkeit.

Die Berechnung der Säuglingssterblichkeit soll im folgenden ausführlich für das männliche Geschlecht durchgeführt werden. Für die Sterblichkeit der Mädchen im ersten Lebensjahr gelten genau die gleichen Überlegungen; hier seien nur die Resultate angeführt:

1. *Elementar* ist folgende Schlussfolgerung auf die Säuglingssterblichkeit für Knaben als erste Annäherung zulässig:

Lebendgeborene Knaben in den Jahren 1919—1922: 3583,
Todesfälle von Knaben im 1. Lebensjahr 1919—1922: 245,
Sterbenswahrscheinlichkeit $= \frac{245}{3583} = {}_m q_0 = 0.06\,837.$

Dabei wird allerdings die Tatsache vernachlässigt, dass von den im 1. Lebensjahr im Jahre 1919 gestorbenen Knaben auch solche des Geburtsjahrganges 1918 mitgerechnet werden, während anderseits von den im Jahre 1922 geborenen Knaben auch noch im Jahre 1923 eine Anzahl vor Erleben ihres ersten Geburtstages gestorben sein werden.

2. In Anlehnung an die Methoden *Zeuners* ergibt sich folgende Berechnung von ${}_m q_0$: Im Jahre 1919 wurden 835 Knaben in der Stadt Bern lebend geboren. Davon starben 51 im Jahre 1919 und 22 im Jahre 1920 *vor* ihrem ersten Geburtstag, d. h. es starben vom Geburtsjahrgang 1919 im ganzen 73 Knaben im ersten Lebensjahr. q_0^{1919} wird also $= \frac{73}{835} = 0.08\,742.$ Analog erhält man:

Säuglingssterblichkeit (Knaben) 1919—1922, nach Zeuner.

Geburtsjahr	Lebend geboren	Davon starben vor dem 1. Geburtstag: im Geburtsjahr	im folgenden Jahr	Überhaupt	Sterbenswahrscheinlichkeit q_0
1919 . . .	835	51	22	73	0.08 742
1920 . . .	971	51	9	60	0.06 179
1921 . . .	901	39	17	56	0.06 215

Arithmetisches Mittel ${}_m q_0 = 0.07\,045.$

3. *Böckh* und Durer schlugen bei Aufstellung von Überlebensordnungen einen Weg zur Bestimmung der einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeit für Neugeborene ein, dem folgende Überlegungen entsprechen: Lebendgeborene Knaben im Jahre *1920:* 971. Davon starben vor dem 31. Dezember 1920: 51. Die Wahrscheinlichkeit für einen Knaben vom Geburtsjahrgang 1920, Ende des Jahres 1920 noch zu leben, ist also $p_0' = 1 - \frac{51}{971} = 0.94\,748.$ Lebendgeborene Knaben vom Jahre *1919:* 835. Von diesen starben schon im Jahre 1919 ihrer 51, es lebten also Ende 1919 noch 784. Davon starben im Jahre 1920 *vor* erlebtem erstem Geburtstag: 22. Die Wahrscheinlichkeit für einen im Jahre 1919 geborenen Knaben, von Anfang des Jahres 1920 bis zum 1. Geburtstag zu leben, betrug demnach $p_0'' = 1 - \frac{22}{784} = 0.97\,194.$ Die Wahrscheinlichkeit für einen neugeborenen Knaben, einjährig zu werden, kann also zusammengesetzt gedacht werden: $p_0 = p_0' \cdot p_0'' = 0.92\,089.$ Analog wie für die Geburtsjahrgänge 1919/20 lässt sich eine solche zusammengesetzte Überlebenswahrscheinlichkeit auch für die Geburtsjahre 1920/21 und 1921/22 bilden. Ihre Ergänzung zu 1 ist die jeweilige Sterbenswahrscheinlichkeit. Auf diese Weise wurden die folgenden Zahlen ermittelt:

Säuglingssterblichkeit (Knaben) 1919—1922, nach Böckh.

Zähljahr z	Lebend Geborne I.	Vom Geburtenjahrgang z starben vor dem 31. XII. z II.	Vom Geburtenjahrgang z—1 lebten noch am 1. I. z III.	Vom Geburtenjahrgang z—1 starben im Jahre z vor ihrem Geburtstag IV.	$p_0' = 1 - \frac{\text{II.}}{\text{I.}}$	$p_0'' = 1 - \frac{\text{IV.}}{\text{III.}}$	$p = p' \cdot p''$
1920	971	51	784	22	0.94 748	0.97 194	0.92 089
1921	901	39	920	9	0.95 672	0.99 022	0.94 736
1922	876	43	862	17	0.95 091	0.98 028	0.93 216

Das arithmetische Mittel aus diesen drei Werten von p_0 ergibt sich $p_0 = 0.93\,347$ und daraus $1 - p_0 = {}_m q_0 = 0.06\,653.$

Auf Grund dieser verschiedenen Methoden, unter Heranziehung der sich aus den Übersichten 1 und 2 ergebenden Werte für q_0, erhält man für die Säuglingssterblichkeit beider Geschlechter folgende Werte:

1. Kombination von Volkszählung und Mortalitätsstatistik:

	q_0 Knaben (${}_m q_0$)	Mädchen (${}_w q_0$)
a) ältere Methode	0.06 645	0.04 255
b) Zeuner	0.06 537	?
c) Böckh	0.07 020	?

2. Kombination von Geburten- und Mortalitätsstatistik:

	q_0 Knaben (${}_m q_0$)	Mädchen (${}_w q_0$)
a) Elementar . .	0.06 837	0.03 978
b) Zeuner	0.07 045	0.04 075
c) Böckh	0.06 653	0.03 850

3. Runder Mittelwert . ${}_m q_0 = 0.06\,800$ ${}_w q_0 = 0.04\,040$

In Fällen, wo es auf eine genaueste Bestimmung der Säuglingssterblichkeit ankommt und wo das Beobachtungsmaterial umfangreich genug ist, wird die Sterblichkeit für die ersten Lebensmonate und Wochen (Böckh hat sogar die ersten *Tage* besonders verfolgt) bestimmt. Im vorliegenden Falle jedoch wäre dies bedeutungslos und die Resultate zu stark von Zufällen abhängig.

d) Ausgleichung von q_x für höhere Alter.

Da die Resultate der vorliegenden Untersuchung keinen weitern versicherungstechnischen Zwecken zu dienen haben und für solche auch gar nicht ohne weiteres verwendbar wären, so erübrigt sich eine Ausgleichung der q_x nach irgendwelchen mathematischen Ausgleichungsformeln. Bezeichnet x die untere Grenze der betreffenden Altersklasse und n die Zahl der Jahre, die die betreffende Altersklasse umfasst, so werden die entsprechenden Sterbenswahrscheinlichkeiten zutreffend als die *mittlern* Wahrscheinlichkeiten dieser Klassen anzusprechen und demnach mit $q_{x+\frac{n-1}{2}}$ zu bezeichnen sein (vgl. S. 292). Diese Zahlen nehmen nun vom Alter $x = 70$ an sehr unregelmässig zu und wurden deshalb auf Grund folgender Annahme ausgeglichen: Die Sterbenswahrscheinlichkeiten für die Alter $x > 70$ liegen auf einer Hyperbel, mit einer im Punkte $x = 100$ zur q-Achse parallelen Asymptote. Die Hyperbelgleichung lautet also:

$$q_x - b = \frac{a}{100 - x}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten a und b genügen zwei Punkte. Setzt man aus der Reihe der $q_{x+\frac{n-1}{2}}$ für Männer $_mq_{72} = 0.07\,856$ und $_mq_{82} = 0.13\,492$ ein, so ergibt sich $_ma = +\,3.3816$ und $_mb = -\,0.03\,416$. Die Hyperbelpunkte für $x > 70$ bestimmen sich also aus der Gleichung $_mq_x = \frac{3.3816}{100 - x} - 0{,}03416$. Für *Frauen* wird das q_x für $x > 70$ auf gleiche Weise bestimmt aus den Werten $_wq_{72} = 0.07\,314$ und $_wq_{82} = 0.16\,250$. Man erhält $_wa = +\,5.3616$ und $_wb = -\,0.10\,558$. Aus den Hyperbeln mit diesen Konstanten a und b ergeben sich folgende ausgeglichene Sterbenswahrscheinlichkeitswerte für $x > 70$:

x	$_mq_{x+\frac{n-1}{2}}$	$_wq_{x+\frac{n-1}{2}}$
75	0.10 110	0.10 888
85	0.19 128	0.25 186
90	0.30 400	0.43 058
95	0.64 216	0.91 652

Damit sind die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x für alle Alter mit hinreichender Genauigkeit bekannt, und es ergibt sich folgende Reihe von Werten für:

Die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten nach der Mortalitätsstatistik der Stadt Bern, für die Jahre 1919—1922.

Alter x	Sterbenswahrscheinlichkeit für Männer: $_mq_{x+\frac{n-1}{2}}$	Frauen: $_wq_{x+\frac{n-1}{2}}$
0	0.06 800	0.04 040
1	0.00 684	0.00 569
5	0.00 235	0.00 315
10	0.00 150	0.00 133
15	0.00 356	0 00 254
20	0.00 443	0.00 368
25	0.00 418	0.00 435
30	0.00 498	0.00 476
35	0.00 602	0.00 448
40	0.00 807	0.00 593
45	0.01 165	0.00 912
50	0.01 774	0.01 243
55	0.02 535	0.01 915
60	0.03 543	0.02 913
65	0.05 971	0.04 740
70	0.07 856	0.07 314
75	0.10 110	0.10 888
80	0.13 492	0.16 250
85	0.19 128	0.25 186
90	0.30 400	0.43 058
95	0.64 216	0.91 652

Mit diesen Werten für die Sterbenswahrscheinlichkeiten ist auch die Grundlage für die Berechnung einer Überlebensordnung für die Stadt Bern gegeben.

III. Die Überlebensordnung.

1. Allgemeines.

Nachdem die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit q_x für n-jährige Altersklassen bestimmt ist, kann die Überlebensordnung konstruiert, d. h. die Zahl der Lebenden für die Alter 1, 5, 10... bei gegebener Zahl Lebender vom Alter 0 berechnet werden. Dabei muss von der Annahme ausgegangen werden, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit $q_{x+\frac{n-1}{2}}$ in unveränderter Stärke für die ganze Altersklasse x bis $x + n$ wirksam sei. Die übrigen Grössen der Überlebensordnung p, l, d ergeben sich wie folgt:

$$p_{x+\frac{n-1}{2}} = 1 - q_{x+\frac{n-1}{2}}.$$

Ferner ist (siehe S. 292): $l_{x+1} = l_x\, p_x$

$$l_{x+2} = l_{x+1}\, p_{x+1} = p_x\, p_{x+1}\, l_x$$

usw.

$$l_{x+n} = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+n-1} \cdot l_x.$$

Nun ist aber angenommen, dass $p_x = p_{x+1} = \dots p_{x+n-1} = p_{x+\frac{n-1}{2}}$, d. h.

$$l_{x+n} = \left[p_{x+\frac{n-1}{2}}\right]^n \cdot l_x.$$

Damit ist jedes l_{x+n}, also auch l_x, für ein bestimmtes l_0 bei bekannten Werten von $p_{x+\frac{n-1}{2}}$ bekannt, und man erhält als Rekursionsformel zur sukzessiven Bestimmung der l_x bzw. l_{x+n} ausgegebenen l_0 für die *Zahl der Überlebenden vom Alter* $x + n$:

$$l_{x+n} = \left[p_{x+\frac{n-1}{2}}\right]^n l_x \qquad \begin{aligned} \text{wo } n &= 1 \text{ für } x = 0 \\ n &= 4 \text{ » } x = 1 \\ n &= 5 \text{ » } x \gtreqless 5 \end{aligned} \qquad (7)$$

Also berechnen sich die Zahlen der Überlebenden sukzessive aus l_0 nach der Formel:

$$\log l_{x+n} = \log l_x + n \cdot \log p_{x+\frac{n-1}{2}}$$

$$= \log l_0 + \sum_0^x n \cdot \log p_{x+\frac{n-1}{2}}.$$

Die jährliche Zahl der Todesfälle von Personen eines bestimmten Altersjahres bestimmt sich aus $n \cdot d_{x+\frac{n-1}{2}} = l_x - l_{x+n}$, d. h. es ergibt sich als *mittlere jährliche Zahl der Sterbenden für die Alter* x *bis* $x + n$:

$$d_{x+\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{n}\,(l_x - l_{x+n}). \qquad (8)$$

Es fragt sich nun, welche Genauigkeit eine aus solchen mehrjährigen Durchschnitten der q_x berechnete Überlebensordnung beanspruchen kann. Um sich über diese Genauigkeit Rechenschaft zu geben, wurden aus der schweizerischen *Überlebensordnung 1901—1910* (Männer), für die gleichen n-jährigen Altersklassen die arithmetischen Mittel der Sterbenswahrscheinlichkeiten: ${}_m q_{x+\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{n}\,(q_x + q_{x+1} + \dots q_{x+n-1})$ gebildet und auf Grund dieser Mittelwerte die Überlebensordnung in der oben angegebenen Weise neu berechnet (Übersicht 3). Obschon die arithmetischen Mittel der Sterbenswahrscheinlichkeiten für eine ganze Altersklasse keinen idealen Mittelwert darstellen und trotzdem die ganze Berechnung nur mit fünfstelligen Logarithmen durchgeführt wurde, ist die Übereinstimmung zwischen den genau berechneten Tafelwerten der schweizerischen Überlebensordnung 1901—1910 und den nach dem oben angedeuteten, abgekürzten Verfahren abgeleiteten, bemerkenswert.

Alter x	Überlebensordnung ${}_m l_x$ Schweiz 1901—1910. Männer.		Differenz
	Tafelwerte	Abgekürzt berechnet	
0	10.000	10.000	0
1	8.616	8.616	0
5	8.247	8.248	+ 1
10	8.120	8.122	+ 2
15	8.034	8.035	+ 1
20	7.880	7.882	+ 2
25	7.672	7.674	+ 2
30	7.451	7.452	+ 1
35	7.206	7.208	+ 2
40	6.910	6.912	+ 2
45	6.536	6.539	+ 3
50	6.069	6.072	+ 3
55	5.470	5.473	+ 3
60	4.730	4.732	+ 2
65	3.840	3.842	+ 2
70	2.831	2.833	+ 2
75	1.802	1.805	+ 3
80	893	895	+ 2
85	307	308	+ 1
90	65	65	0
95	8	8	0
100	.	.	.

Die durchwegs *positiven* Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass als Mittelwert für die Sterbenswahrscheinlichkeit das arithmetische Mittel genommen wurde, das zu *klein* ist, solange die Zahl der Todesfälle d_x immer stärker zunimmt (d. h. bis zirka $x = 60$), weshalb auch die l_x etwas zu *gross* werden. Wird die Überlebensordnung auf $l_0 = 1000$ bezogen, so stimmen die beiden Reihen vollkommen miteinander überein.

Dieses abgekürzte Verfahren zur Berechnung der l_x aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten mehrjähriger Altersklassen bietet für die bei dieser Untersuchung gewünschte Genauigkeit vollständig befriedigende Resultate. Deshalb wurden auch die Überlebensordnungen für die Stadt Bern, nach den Todesfällen der Jahre 1919—1922 für beide Geschlechter nach diesem abgekürzten Verfahren berechnet (vgl. Übersicht 4).

Die gefundene Reihe der l_x ist die folgende:

Alter x	Überlebensordnung Stadt Bern 1919—1922	
	Männer: $_ml_x$	Frauen: $_wl_x$
0	10.000	10.000
1	9.320	9.596
5	9.068	9.379
10	8.962	9.232
15	8.895	9.171
20	8.738	9.055
25	8.546	8.889
30	8.369	8.697
35	8.162	8.492
40	7.919	8.304
45	7.605	8.061
50	7.172	7.700
55	6.558	7.233
60	5.768	6.566
65	4.816	5.665
70	3.540	4.444
75	2.352	3.039
80	1.346	1.708
85	669	704
90	231	165
95	38	10
100	.	.

Bevor die Resultate dieser Untersuchungen diskutiert werden, ist noch der zum Vergleich der Sterblichkeit verschiedener Bevölkerungsgruppen sehr anschauliche Begriff der *durchschnittlichen, vollen Lebenserwartung* zu definieren und für die vorliegenden Beobachtungen zu berechnen.

2. Die durchschnittliche, volle Lebenserwartung $\mathring{e}_x$.

Die durchschnittliche, volle Lebenserwartung ist definiert als die Zahl der Jahre, die eine Person vom Alter x voraussichtlich noch zu leben hat, unter der Annahme, dass die Sterblichkeit dieselbe bleibe wie in der Beobachtungsperiode. Diese durchschnittliche, volle Lebenserwartung wird dargestellt durch den Ausdruck:

$$\mathring{e}_x = \frac{\text{Summe aller Lebenden vom Alter } x \text{ und mehr}}{\text{Zahl der Lebenden vom Alter } x}$$

Ist die Zahl der Lebenden l_x für jedes Altersjahr bekannt, so bietet die Berechnung von $\mathring{e}_x$ keine besondern Schwierigkeiten. Unter der Voraussetzung, dass die Sterblichkeit während *eines* Lebensjahres konstant sei, nimmt die Grösse $\mathring{e}_x$ den Wert an:

$$\mathring{e}_x = \frac{\sum\limits_{x+1}^{\omega}{}^{m}\, l_m}{l_x} + \frac{1}{2} = \frac{\sum\limits_{x}^{\omega}{}^{m}\, l_m}{l_x} - \frac{1}{2}, \qquad (9)$$

wenn ω das höchsterreichte Altersjahr darstellt. Ist dagegen die Zahl der Lebenden wie im vorliegenden Beispiel nicht für jedes einzelne Altersjahr bekannt, so ist $\mathring{e}_x$ auf andere Weise zu bestimmen.

Man berechnet zunächst für die Altersjahre $x = 0$, 1, 5, 10..., für die die l_x bekannt sind, den Ausdruck:

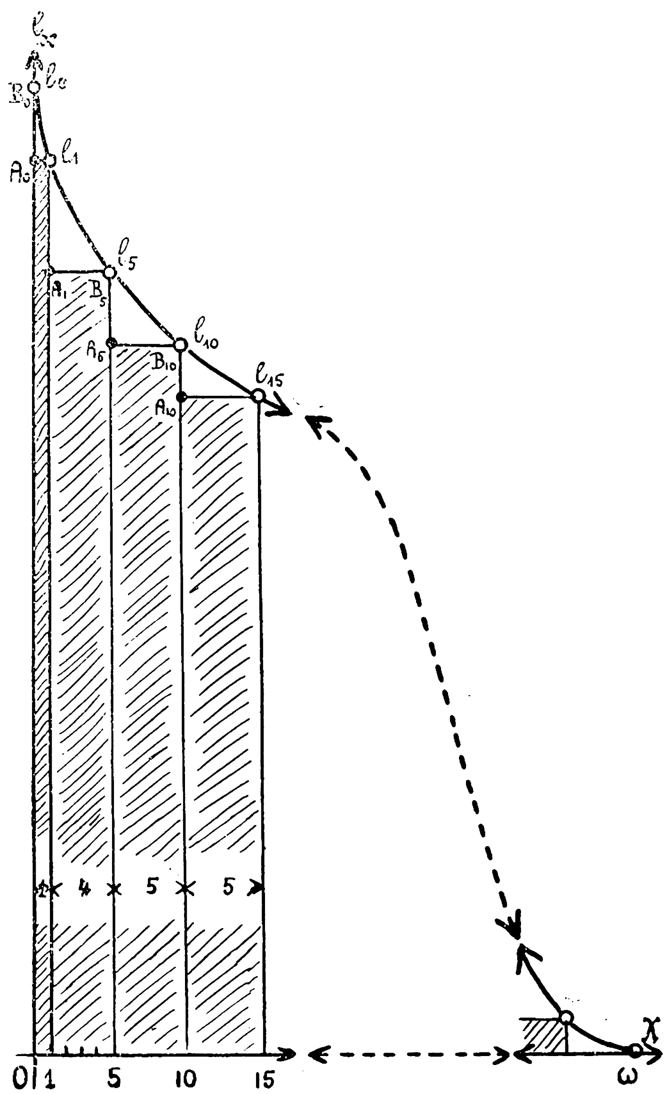
$$F_x = \sum{}^{m}\, n \cdot l_m, \quad \text{wo} \quad \begin{array}{l} n = 1 \text{ für } x = 0, \\ n = 4 \;\text{»}\; x = 1, \\ n = 5 \;\text{»}\; x \geqq 5. \end{array}$$

Dabei durchläuft m alle Zahlen $x + n$, $x + 2\,n, \ldots$

Dann ist die durchschnittliche volle Lebenserwartung dargestellt durch einen Ausdruck von der Form:

$$\mathring{e}_x = \frac{F_x}{l_x} + \triangle_x,$$

wo $\triangle$ ein noch zu bestimmendes, Korrekturglied ist. Die Bedeutung von $\mathring{e}_x$ lässt sich am besten anhand ihrer geometrischen Darstellung erläutern:



Die Funktion F_x stellt die Summe aller schraffierten Rechtecke rechts der Ordinate im Punkte x dar. Um aber entsprechend der Definition der Funktion $\overset{\circ}{e}_x$ *alle* Lebenden vom Alter x und mehr mit den Lebenden vom Alter x vergleichen zu können, müssen auch die Restabschnitte $(A_x\ B_x\ B_{x+n})$ mit berücksichtigt werden. Es seien dabei die drei Fälle $x \geqq 5$, $x = 1$ und $x = 0$ gesondert betrachtet.

1. *Für* $x \geqq 5$ ist n stets gleich 5, d. h. $F_x = \sum_{x+5}^{\omega} {}^m 5\, l_m$.

Nach dem soeben Gesagten wird dann

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{l_x}\left[F + \sum{}^m [A_m\, B_m\, B_{m+5}]\right], \tag{10}$$

wobei m alle Zahlen x, $x + 5$, $x + 10\ldots$ durchläuft.

Das Korrekturglied $\triangle$ hat also die Form

$$\triangle = \frac{1}{l_x} \sum_{x}^{\omega}{}^m [A_m\, B_m\, B_{m+5}].$$

Nimmt man, was für $x \geqq 5$ nahe zutrifft, an, die Sterblichkeit bleibe während je 5 Altersjahren konstant, so ist der Inhalt der Flächen $[A_m\, B_m\, B_{m+5}]$ gleich dem Dreiecksinhalt: $\frac{5\cdot(l_x - l_{x+5})}{2}$, und die Summe der Dreiecke wird:

$$\sum [A_m\, B_m\, B_{m+5}] = l_x \cdot \triangle_x = \frac{5}{2}(l_x - l_{x+5}) + \frac{5}{2}(l_{x+5} - l_{x+10}) + \ldots + \frac{5}{2}(l_{\omega-5} - l_\omega) + \frac{5}{2}(l_\omega - 0),$$

$$= \frac{5}{2}\, l_x$$

$$\text{oder } \triangle_x = \frac{5}{2}.$$

Somit gilt für $x \geqq 5$:

$$\overset{\circ}{e}_x = \frac{F_x}{l_x} + \frac{5}{2} = \frac{\sum^m 5\, l_m}{l_x} + \frac{5}{2};\quad (m = x+5,\, x+10, \ldots). \tag{11}$$

2. *Für* $x = 1$ ist $\sum (A_m\, B_m\, B_{m+n})$ = Dreieck

$$(A_1\, B_1\, B_5) + \sum_{5}^{\omega}{}^m (A_m\, B_m\, B_{m+5})$$

$$= l_1 \triangle_1 = \frac{4}{2}(l_1 - l_5) + \frac{5}{2}\, l_5$$

$$= 2\, l_1 + \frac{l_5}{2},$$

$$\text{woraus } \triangle_1 = 2 + \frac{l_5}{2\, l_1}.$$

In Wirklichkeit ist $\frac{l_5}{l_1} \sim 1$, und die genaue Form

$$\overset{\circ}{e}_1 = \frac{F_1}{l_1} + 2 + \frac{l_5}{2\, l_1}$$

geht mit genügender Genauigkeit über in:

$$\overset{\circ}{e}_1 = \frac{F_1}{l_1} + \frac{5}{2}. \tag{11a}$$

worin $F_1 = 4\, l_5 + \sum^m 5\, l\, m$; $(m = 10, 15\ldots)$.

3. *Für* $x = 0$ wird $\sum (A_m\, B_m\, B_{m+n})$

$$= l_0 \triangle_0 = \frac{l_0 - l_1}{2} + \frac{4\,(l_1 - l_5)}{2} + \frac{5}{2}\, l_5$$

$$= \frac{l_0 + 3\, l_1 + l_5}{2}$$

$$\text{und daraus } \triangle_0 = \frac{1}{2} + \frac{3\, l_1 + l_5}{2\, l_0}.$$

$$\overset{\circ}{e}_0 = \frac{F_0}{l_0} + \frac{1}{2} + \frac{3\, l_1 + l_5}{2\, l_0} \tag{11b}$$

wo $F_0 = l_1 + 4\, l_5 + \sum^m 5\, l_m$; $(m = 10,\ 15\ldots)$.

Die drei Formeln (11) zur Bestimmung von $\overset{\circ}{e}_x$ sind brauchbar für alle Werte $x < 70$. Werden sie auf die abgekürzt berechnete, schweizerische Überlebensordnung 1901—1910 (Männer) angewendet, so erhält man bis auf $^1/_{10}$ Jahr genau dieselben Werte für $\overset{\circ}{e}_x$, wie sie sich aus der schweizerischen Tafel, die nach Formel (9) berechnet ist, direkt ergeben (Übersicht 3). Vom Alter $x = 70$ an, treten dagegen grössere Differenzen auf, da die Zusammenfassung nach fünfjährigen Altersklassen hier einen zu groben Durchschnitt gibt. Da der Begriff der durchschnittlichen vollen Lebenserwartung in diesen höhern Altersklassen jedoch keine wichtige Grösse mehr ist, wurde von einer genauern Berechnung hier Umgang genommen und die $\overset{\circ}{e}_x$ durch Veränderung des Korrekturgliedes $\triangle_x$ mit den Werten $\overset{\circ}{e}_x$ der schweizerischen Absterbeordnung mechanisch in Einklang gebracht. Dies wird erreicht durch die Substitutionen:

$\triangle_{70} = 2{,}4$ $\quad\triangle_{85} = 2{,}0$
$\triangle_{75} = 2{,}3$ $\quad\triangle_{90} = 1{,}8$
$\triangle_{80} = 2{,}2$ $\quad\triangle_{95} = 1{,}0$

Diese Werte von $\triangle_x$ wurden zur Bestimmung von $\overset{\circ}{e}_x$ für $x > 70$ für die Stadt Bern unverändert übertragen. Die Fehler der Werte $\overset{\circ}{e}_x$ von $^1/_{10}$ bis $^3/_{10}$ Jahren, die dabei auftreten können, sind für die Diskussion der Ergebnisse bedeutungslos.

Auf Grund der besprochenen Berechnungen wurden folgende Werte für die *durchschnittliche, volle Lebenserwartung* $\mathring{e}_x$, *nach der Sterblichkeit in der Stadt Bern 1919—1922* ermittelt (Übersicht 4):

Alter x	Männer $_m\mathring{e}_x$	Frauen $_w\mathring{e}_x$
0	$56,_7$ Jahre	$60,_6$ Jahre
1	$59,_9$ »	$62,_2$ »
5	$57,_5$ »	$59,_6$ »
10	$53,_1$ »	$55,_5$ »
15	$48,_5$ »	$50,_8$ »
20	$44,_3$ »	$46,_5$ »
25	$40,_3$ »	$42,_3$ »
30	$36,_1$ »	$38,_2$ »
35	$31,_9$ »	$34,_1$ »
40	$27,_8$ »	$29,_8$ »
45	$23,_8$ »	$25,_6$ »
50	$20,_2$ »	$21,_7$ »
55	$16,_8$ »	$17,_9$ »
60	$13,_8$ »	$14,_5$ »
65	$11,_1$ »	$11,_4$ »
70	$8,_9$ »	$8,_7$ »
75	$7,_1$ »	$6,_6$ »
80	$5,_4$ »	$4,_8$ »
85	$4,_0$ »	$3,_3$ »
90	$2,_6$ »	$2,_1$ »
95	$1,_0$ »	$1,_0$ »

3. Vergleiche der Verhältnisse für die Stadt Bern 1919—1922 mit der schweizerischen Überlebensordnung 1901—1910.

In Übersicht 5 sind die Ergebnisse der geführten Untersuchung im Vergleich zu den Werten, die die schweizerischen Überlebensordnungen für die Jahre 1901—1910 liefern, dargestellt. Vor allem zeigt sich für die bernischen Verhältnisse die bekannte Tatsache bestätigt, *dass das weibliche Geschlecht weniger rasch stirbt als das männliche*; ferner ersieht man sofort, dass die *Überlebensordnung der Stadt Bern 1919—1922 in allen Altern wesentlich günstiger verläuft als diejenige der Schweiz 1901—1910.* Trotz den Nachwirkungen des Grippejahres 1918, die auch in der Zahl der Todesfälle der Beobachtungsjahre noch etwas zum Ausdruck gelangen, war die Sterblichkeit in der Stadt Bern in den Jahren 1919—1922 bedeutend geringer als in der Schweiz für die Zeit 1901—1910. Dies ist in erster Linie zurückzuführen auf die geringe *Säuglingssterblichkeit.*

Während nach der schweizerischen Überlebensordnung 1901—1910 von 1000 neugeborenen Knaben 138 bzw. von 1000 Mädchen 113 im ersten Lebensjahre starben, betrug die Säuglingssterblichkeit in der Stadt Bern 1919—1922 für Knaben 68 und für Mädchen 40 pro Tausend. Allerdings hat seit den Beobachtungen der Jahre 1901—1910 auch in der Schweiz im allgemeinen die Säuglingssterblichkeit stark abgenommen. Immerhin ist sie in der Stadt Bern gleichwohl noch bedeutend günstiger als im Landesdurchschnitt. Dies geht deutlich hervor, wenn man die Zahl der im ersten Lebensjahr verstorbenen Kinder der Jahre 1919—1922 mit der Zahl der gleichzeitig lebend Geborenen für die ganze Schweiz miteinander vergleicht. Für die gesamte Schweiz ergibt sich danach für die Jahre 1919—1922 eine Säuglingssterblichkeit von $86,_{24}$ ‰ für Knaben und $68,_{14}$ ‰ für Mädchen, gegen $68,_{37}$ ‰ (Knaben) bzw. $39,_{78}$ ‰ (Mädchen) für die Stadt Bern, unter Zugrundelegung der gleichen Methode.

Säuglingssterblichkeit in der Schweiz 1919—1922.

Jahr	Knaben			Mädchen		
	Lebendgeburten	Todesfälle im 1. Lebensjahr	in %	Lebendgeburten	Todesfälle im 1. Lebensjahr	in %
1919	36.846	3.382	$91,_{79}$	35.279	2.562	$72,_{62}$
1920	41.868	3.888	$92,_{86}$	39.322	2.908	$73,_{95}$
1921	41.352	3.472	$83,_{96}$	39.456	2.509	$63,_{59}$
1922	39.122	2.987	$76,_{35}$	37.168	2.326	$62,_{58}$
Total (Bern:)	159.188 (3.583)	13.729 (245)	$86,_{24}$ ($68,_{37}$)	151.225 (3.419)	10.305 (136)	$68,_{14}$ ($39,_{78}$)

Die bedeutend geringere Säuglingssterblichkeit in der Stadt Bern 1919—1922 gegenüber der Schweiz 1901—1910 geht auch aus den entsprechenden Werten für die durchschnittliche, volle Lebenserwartung eines Neugeborenen ($\mathring{e}_0$) deutlich hervor:

	Knaben: $_m\mathring{e}_0$	Mädchen: $_w\mathring{e}_0$
Schweiz 1901—1910	$49,_2$ Jahre	$52,_2$ Jahre
Bern 1919—1922	$56,_7$ »	$60,_6$ »
Differenz	$7,_5$ Jahre	$8,_4$ Jahre

Der Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeit ist in Tafel II graphisch dargestellt. Das *Minimum* der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x liegt nach den Berner Ergebnissen pro 1919—1922 wie gewohnt in der Altersstufe 10—14 Jahre. Während aber nach der schweizerischen Überlebensordnung 1901—1910 in diesem Alter von 1000 lebenden Knaben $2,_{14}$, und von 1000 Mädchen $2,_{58}$ starben, sank dieses Minimum nach den Beobachtungen für die Stadt Bern 1919—1922 auf $1,_{50}$ ‰ bzw. $1,_{33}$ ‰. Die Sterbenswahrscheinlichkeitswerte sind für beide Geschlechter und alle Alter (ausser $_mq_{65-70}$) für die

Stadt Bern 1919—1922 *kleiner* als die entsprechenden Werte der schweizerischen Berechnungen für die Jahre 1901—1910. Diese unverkennbar günstigere Stellung der Vitalität in der Stadt Bern kommt auch in der *Zahl der Überlebenden* l_x zum Ausdruck. Der geringern Sterblichkeit entsprechend ist die Zahl der Überlebenden in allen Altersklassen für die Stadt Bern 1919—1922 *grösser* als für die Schweiz 1901—1910. Der grösste Teil dieses Unterschiedes wird hervorgerufen durch die geringere Sterblichkeit im ersten Lebensjahr, die auf die Zahl der Überlebenden in allen Altersklassen einwirkt. Schaltet man aber diese Wirkung aus, indem man die Zahl der Überlebenden auf je 1000 Lebende vom Alter $x = 20$ bezieht (Übersicht 5 und Tafel I), so ist doch noch für die höhern Alter die geringere Sterblichkeit in der Stadt Bern durch die grössere Zahl von Überlebenden l_x gekennzeichnet.

Alter x	Männer: mlx		Frauen: wlx	
	Schweiz 1901-10.	Bern 1919-22.	Schweiz 1901-10	Bern 1919-22.
20	1000	1000	1000	1000
40	877	906	875	917
60	600	660	667	725
80	113	154	147	189

Die Werte für l_x zeigen, dass die Sterblichkeitsverhältnisse für Männer nach den Berner Beobachtungen 1919—1922 in den höhern Altern ungefähr die gleichen waren wie für das weibliche Geschlecht nach der schweizerischen Absterbeordnung 1901—1910, während die Männersterblichkeit für die Schweiz 1901—1910 erheblich ungünstiger, die Berner Frauensterblichkeit dagegen erheblich günstiger verlief als diese mittlern Werte.

Die durchschnittliche, volle Lebenserwartung ist auch in Tafel II graphisch zur Darstellung gebracht. Deutlich wird die günstigere Sterblichkeit in der Stadt Bern 1919—1922 gegenüber der schweizerischen 1901—1910 durch die grössern Werte der durchschnittlichen, vollen Lebenserwartung ausgedrückt. Die Differenz zwischen den Werten der beiden Berechnungen, die die Verlängerung der zukünftigen, wahrscheinlichen Lebensdauer für das betreffende Alter darstellt, beträgt zugunsten der Berner Verhältnisse:

Alter x	Männer	Frauen
0	$7{,}_5$ Jahre	$8{,}_4$ Jahre
5	$3{,}_0$ »	$4{,}_7$ »
10	$2{,}_8$ »	$3{,}_4$ »
20	$2{,}_6$ »	$2{,}_8$ »
40	$1{,}_8$ »	$1{,}_4$ »
60	$1{,}_1$ »	$0{,}_8$ »
80	$0{,}_9$ »	$0{,}_3$ »

Die günstigern Verhältnisse in der Stadt Bern 1919—1922 gegenüber der Schweiz 1901—1920 kommen also in der Zahl der Jahre durchschnittlicher, voller Lebenserwartung beim *weiblichen* Geschlecht in den jüngern Jahren stärker zum Ausdruck als beim männlichen. Ob die Lebensbedingungen in der Stadt Bern tatsächlich eine günstigere Sterblichkeit als diejenige der Schweiz im gegenwärtigen Zeitpunkt zeitigen, wird erst der Vergleich dieser Zahlen für die Stadt Bern mit einem neuern, zukünftigen schweizerischen Absterbeordnung zeigen können.

Literaturangaben:

A. Veröffentlichungen des eidgenössischen statistischen Bureaus:

1. Eidgenössische Volkszählung vom 1. Dezember 1920, Heft 2, Kanton Bern.
2. Eidgenössische Volkszählung vom 1. Dezember 1910, Band II (die schweizerische Absterbeordnung 1901—1910).
3. Die Bewegung der Bevölkerung in der Schweiz im Jahre 1922; schweizerische statistische Mitteilungen, Jahrgang 1924, 1. Heft.
4. Die Bewegung der Bevölkerung in der Schweiz im Jahre 1885; schweizerische Statistik, 66. Lieferung.
5. Die Bewegung der Bevölkerung in der Schweiz im Jahre 1878; schweizerische Statistik, 45. Lieferung (S. XXIV ff.: Die Berechnung von Mortalitätstafeln aus den Ergebnissen der Bevölkerungsstatistik).
6. Ehe, Geburt und Tod in der schweizerischen Bevölkerung 1871—1890, schweizerische Statistik, 128. Lieferung.

B. Andere Veröffentlichungen:

7. Moser: Leben und Sterben in der schweizerischen Bevölkerung, Rektoratsrede Bern vom 16. November 1916. Bern 1917.
8. Steiner-Stooss: Die Konstruktion der Durerschen Sterbetafel; Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrgang 1908.
9. Kihm: Technische Grundlagen zur Aufstellung der Bilanzen für die Pensions- und Hilfskassen von Eisenbahngesellschaften; Zeitschrift für schweizerische Statistik, Jahrgang 1896.
10. Böckh: Die Bewegung der Bevölkerung der Stadt Berlin 1869—1876. Berlin 1884.
11. Derselbe: Statistisches Jahrbuch der Stadt Berlin, Jahrgang 1881.

Tabellen.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x,

berechnet anhand der Todesfälle in der Stadt Bern 1919—1922,

nach der Methode $q_x = \dfrac{\text{Sterbefälle vom Alter } x}{\text{Lebende vom Alter } x + \dfrac{\text{Sterbefälle vom Alter } x}{2}}$

Übersicht 1.

Zurückgelegte Altersjahre	Männliches Geschlecht			Weibliches Geschlecht		
	Bevölkerung am 31. Dezember 1920 b	¼ der Sterbefälle 1919—1922 m	Sterbenswahrscheinlichkeit $q = \dfrac{m}{b + \frac{m}{2}}$	Bevölkerung am 31. Dezember 1920 b	¼ der Sterbefälle 1919—1922 m	Sterbenswahrscheinlichkeit $q = \dfrac{m}{b + \frac{m}{2}}$
unter 1	891	61,25	0.06 645	782	34,00	0.04 255
1—4	2.876	19,75	0.00 684	2.803	16,00	0.00 569
5—9	4.033	9,50	0.00 235	4.036	12,75	0.00 315
10—14	4.330	6,50	0.00 150	4.530	6,00	0.00 133
15—19	4.552	16,25	0.00 356	5.608	14,25	0.00 254
20—24	4.956	22,00	0.00 443	6.314	23,25	0.00 368
25—29	4.712	19,75	0.00 418	5.738	25,00	0.00 435
30—34	4.106	20,50	0.00 498	4.923	23,50	0.00 476
35—39	3.892	23,50	0.00 602	4.453	20,00	0.00 448
40—44	3.612	29,25	0.00 807	4.122	24,50	0.00 593
45—49	3.052	35,75	0.01 165	3.357	30,75	0.00 912
50—54	2.332	41,75	0.01 774	2.819	35,25	0.01 243
55—59	1.772	45,50	0.02 535	2.237	43,25	0.01 915
60—64	1.206	43,50	0.03 543	1.791	53,25	0.02 913
65—69	771	47,50	0.05 971	1.184	57,50	0.04 740
70—74	532	43,50	0.07 856	867	65,75	0.07 314
75—79	299	37,25	0.11 728	457	62,00	0.12 705
80—84	102	14,75	0.13 492	202	35,75	0.16 250
85—89	22	7,25	0.28 189	47	13,00	0.24 299
90—94	5	1,50	0.26 087	5	1,50	0.26 087
95 und mehr	—	—	—	—	—	—
Überhaupt	48.053	546,50	0.01 132	56.275	597,25	0.00 947

Übersicht 2. **Männliches Geschlecht.**

Die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x,

berechnet anhand der Todesfälle in der Stadt Bern 1919—1922, in Anlehnung an die Methoden Zeuner und Böckh.

Zurückgelegtes Alter x	$I = 4b_x$	$II = 4b_{x+1}$	$III = \sum {}_n m_x$	$IV = \sum {}_n m_x + \sum {}_v m_{x+1}$	$V = \sum {}_n m_{x+1}$	$VI = \sum {}_n m_{x+1} + \sum {}_v m_{x+1}$	nach Zeuner $q_x = \frac{IV}{I + III}$	nach Böckh $p' = \frac{I}{I + III}$	$p'' = \frac{II + V}{II + VI}$	$p = p' \cdot p''$	$q_x = 1 - p_x$
0	3564	2676	184	245	12	73	**0.06 537**	0.95 091	0.97 781	0.92 980	**0.07 020**
1—4							**0.00 702**			**0.99 316**	**0.00 684**
1	2676	2880	12	39	7	34	0.01 451	0.99 554	0.99 073	0.98 631	
2	2880	2832	7	19	3	15	0.00 658	0.99 758	0.99 578	0.99 337	
3	2832	3116	3	8	1	6	0.00 282	0.99 894	0.99 840	0.99 734	
4	3116	2932	1	13	1	13	0.00 417	0.99 968	0.99 592	0.99 560	
5—9							**0.00 236**			**0.99 766**	**0.00 234**
5	2932	3140	1	7	6	12	0.00 239	0.99 966	0.99 809	0.99 775	
6	3140	3468	6	8	.	2	0.00 254	0.99 809	0.99 942	0.99 751	
7	3468	3280	.	5	7	12	0.00 144	1.00 000	0.99 848	0.99 848	
8	3280	3312	7	11	4	8	0.00 335	0.99 787	0.99 879	0.99 667	
9	3312	3580	4	7	2	5	0.00 211	0.99 879	0.99 916	0.99 795	
10—14							**0.00 150**			**0.99 850**	**0.00 150**
10	3580	3448	2	4	4	6	0.00 112	0.99 944	0.99 942	0.99 886	
11	3448	3388	4	6	3	5	0.00 174	0.99 884	0.99 941	0.99 825	
12	3388	3340	3	3	2	2	0.00 088	0.99 912	1.00 000	0.99 912	
13	3340	3564	2	7	2	7	0.00 209	0.99 940	0.99 860	0.99 800	
14	3564	3316	2	6	1	5	0.00 168	0.99 944	0.99 880	0.99 824	
………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………
50—54							**0.01 775**			**0.98 190**	**0.01 810**
50	2020	1864	11	33	20	42	0.01 625	0.99 458	0.98 846	0.98 309	
51	1864	1776	20	36	13	29	0.01 911	0.98 938	0.99 114	0.98 061	
52	1776	1900	13	26	19	32	0.01 453	0.99 273	0.99 327	0.98 605	
53	1900	1768	19	38	15	34	0.01 980	0.99 010	0.98 945	0.97 965	
54	1768	1612	15	34	15	34	0.01 907	0.99 159	0.98 846	0.98 014	
………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………	………
80—84							**0.13 514**			**0.85 075**	**0.14 925**
80	136	88	10	19	9	18	0.13 013	0.93 151	0.91 509	0.85 241	
81	88	64	9	13	5	9	0.13 402	0.90 722	0.94 521	0.85 750	
82	64	72	5	12	3	10	0.17 391	0.92 754	0.91 463	0.84 836	
83	72	48	3	9	3	9	0.12 000	0.96 000	0.89 474	0.85 894	
84	48	20	3	6	4	7	0.11 764	0.94 111	0.88 889	0.83 654	
85—89							**0.31 159**			**0.73 364**	**0.26 638**
85	20	20	4	9	3	8	0.37 500	0.83 333	0.82 142	0.68 451	
86	20	32	3	9	4	10	0.39 130	0.86 957	0.85 714	0.74 534	
87	32	8	4	6	.	2	0.16 667	0.88 889	0.80 000	0.71 111	
88	8	8	.	3	.	3	0.37 500	1.00 000	0.72 727	0.72 727	
89	8	6	.	2	.	2	0.25 000	1.00 000	0.80 000	0.80 000	
90 u. mehr	(10)	(4)	(2)	(6)			**0.25 000**			**0.50 000**	**0.50 000**
90	6	4	.	.	1	2	$\frac{6}{12} : 2$	1.00 000	0.83 333	0.83 333	
91	4	.	2	6	1	4		0.66 666	0.25 000	0.16 667	
92	.	.	.	.	.	.		.	.	.	.
93	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
94	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Die schweizerische Überlebensordnung 1901—1910, für Männer;

berechnet aus den *arithmetischen Mitteln* der Sterbenswahrscheinlichkeiten n-jähriger Altersklassen,

wobei $n = 1$ für das Alter $x = 0$,

$n = 4$ » » » $x = 1$ bis 4, $l_0 = 10.000$.

$n = 5$ » » » $x = 5$ und mehr.

Übersicht 3.

Alter x	$n =$ ..... jährige Alters-klassen	Sterbens-wahrscheinlichkeit $q_{x+\frac{n-1}{2}}$ (arithmetisches Mittel)	Überlebens-wahrscheinlichkeit $p_{x+\frac{n-1}{2}}$	Berechnung von l_x aus $p_{x+\frac{n}{2}}$: $\log p_{x+\frac{n-1}{2}}$	$n \cdot \log p_{x+\frac{n-1}{2}}$	$\log l_x$	Überlebende: l_x	Sterbefälle: $n \cdot d_{x+\frac{n-1}{2}} = +l_x - l_{x+n}$	$d_{x+\frac{n-1}{2}}$	$F_x = \sum_{m=x+n}^{m=\omega} n \cdot l_m$	Mittlere, volle Lebenserwartung: $\overset{\circ}{e}_x = \frac{F_x}{l_x} + \triangle$ — $\triangle$	$\overset{\circ}{e}_x$	Tafelwerte: l_x	$\overset{\circ}{e}_x$	Alter x
0	1	0.13 840	0.86 160	$\bar{1}$.93 531	$\bar{1}$.93 531	4.00 000	10.000	1384	1384	470.894	$2,_2$	$49,_3$	10.000	$49,_3$	0
1	4	0.01 086	0.98 914	99 526	98 104	3.93 531	8.616	368	92	462.278	$2,_5$	$56,_1$	8.616	$56,_1$	1
5	5	0.00 309	0.99 691	99 866	99 330	91 635	8.248	126	25	429.286	$2,_5$	$54,_6$	8.247	$54,_5$	5
10	5	0.00 214	0.99 786	99 907	99 535	90 965	8.122	87	17	388.676	$2,_5$	$50,_4$	8.120	$50,_3$	10
15	5	0.00 386	0.99 614	99 832	99 160	90 500	8.035	153	31	348.501	$2,_5$	$45,_9$	8.034	$45,_9$	15
20	5	0 00 533	0.99 467	99 768	98 840	89 666	7.882	208	41	309.091	$2,_5$	$41,_7$	7.880	$41,_7$	20
25	5	0 00 583	0.99 417	99 746	98 730	88 500	7.674	222	44	270.721	$2,_5$	$37,_8$	7.672	$37,_8$	25
30	5	0 00 665	0.99 335	99 710	98 550	87 230	7.452	244	49	233.461	$2,_5$	$33,_8$	7.451	$33,_8$	30
35	5	0.00 835	0.99 165	99 636	98 180	85 780	7.208	296	59	197.421	$2,_5$	$29,_9$	7.206	$29,_9$	35
40	5	0.01 105	0.98 895	99 518	97 590	83 960	6.912	373	75	162.861	$2,_5$	$26,_1$	6.910	$26,_0$	40
45	5	0.01 472	0.98 528	99 356	96 780	81 550	6.539	467	93	130.166	$2,_5$	$22,_4$	6.536	$22,_4$	45
50	5	0.02 056	0.97 944	99 098	95 450	78 330	6.072	599	120	99.806	$2,_5$	$18,_9$	6.069	$18,_9$	50
55	5	0.02 867	0.97 133	98 737	93 685	73 820	5.473	741	148	72.441	$2,_5$	$15,_7$	5.470	$15,_7$	55
60	5	0.04 080	0.95 920	98 191	90 955	67 505	4.732	890	178	48.781	$2,_5$	$12,_8$	4.730	$12,_7$	60
65	5	0.05 916	0.94 084	97 352	86 760	58 460	3.842	1009	201	29.576	$2,_5$	$10,_2$	3.840	$10,_1$	65
70	5	0.08 637	0.91 363	96 077	80 385	45 220	2.833	1028	206	15.406	$2,_4$	$7,_8$	2.831	$7,_8$	70
75	5	0.13 082	0.86 918	93 911	69 555	25 605	1.805	910	182	6.381	$2,_3$	$5,_8$	1.802	$5,_8$	75
80	5	0.19 214	0.80 786	90 734	53 670	2.95 160	895	587	117	1.906	$2,_2$	$4,_3$	893	$4,_3$	80
85	5	0.26 749	0.73 251	86 482	32 410	2.48 830	308	243	49	366	$2,_0$	$3,_2$	307	$3,_2$	85
90	5	0.34 953	0.65 047	81 323	06 615	1.81 240	65	57	11	41	$1,_8$	$2,_4$	65	$2,_4$	90
95	5	0.51 262	0.48 738	68 787	$\bar{2}$.43 935	0.87 855	8	8	2	1	$1,_0$	$1,_6$	8	$1,_6$	95
100	5	0.71 090	0.28 910	46 105	$\bar{3}$.30 525	$\bar{1}$.31 790	$(0,_2)$	—	—	—	—	—	$(0,_3)$	—	100

Überlebensordnung für die Stadt Bern

nach der Volkszählung vom 1. Dezember 1920 und den Sterbefällen der Jahre 1919—1922.

$l_0 = 10.000$. n-jährige Altersklassen: $n = 1$ für $x = 0$,

$n = 4$ » $x = 1$ bis 4,

$n = 5$ » $x = 5$ und mehr.

Übersicht 4.

Alter x	Männliches Geschlecht: Sterbens-wahrscheinlichkeit $q_{x+\frac{n-1}{2}}$	Überlebens-wahrscheinlichkeit $p_{x+\frac{n-1}{2}}$	Über-lebende l_x	Sterbefälle $d_{x+\frac{n-1}{2}}$	$\mathring{e}_x$	Weibliches Geschlecht: Sterbens-wahrscheinlichkeit $q_{x+\frac{n-1}{2}}$	Überlebens-wahrscheinlichkeit $p_{x+\frac{n-1}{2}}$	Über-lebende l_x	Sterbefälle $d_{x+\frac{n-1}{2}}$	$\mathring{e}_x$	Alter x
0	0.06 800	0.93 200	10.000	680	56,7	0.04 040	0.95 960	10.000	404	60,6	0
1	0.00 684	0.99 316	9.320	63	59,9	0.00 569	0.99 431	9.596	54	62,2	1
5	0.00 235	0.99 765	9.068	21	57,5	0.00 315	0.99 685	9.379	29	59,6	5
10	0.00 150	0.99 850	8.962	13	53,1	0.00 133	0.99 867	9.232	12	55,5	10
15	0.00 356	0.99 644	8.895	31	48,5	0.00 254	0.99 746	9.171	23	50,8	15
20	0.00 443	0.99 557	8.738	38	44,3	0.00 368	0.99 632	9.055	33	46,5	20
25	0.00 418	0.99 582	8.546	35	40,3	0.00 435	0.99 565	8.889	38	42,3	25
30	0.00 498	0.99 502	8.369	41	36,1	0.00 476	0.99 524	8.697	41	38,2	30
35	0.00 602	0.99 398	8.162	49	31,9	0.00 448	0.99 552	8.492	38	34,1	35
40	0.00 807	0.99 193	7.919	63	27,8	0.00 593	0.99 407	8.304	49	29,8	40
45	0.01 165	0.98 835	7.605	87	23,8	0.00 912	0.99 088	8.061	72	25,6	45
50	0.01 774	0.98 226	7.172	123	20,2	0.01 243	0.98 757	7.700	93	21,7	50
55	0.02 535	0.97 465	6.558	158	16,8	0.01 915	0.98 085	7.233	133	17,9	55
60	0.03 543	0.96 457	5.768	190	13,8	0.02 913	0.97 087	6.566	180	14,5	60
65	0.05 971	0.94 029	4.816	255	11,1	0.04 740	0.95 260	5.665	240	11,4	65
70	0.07 856	0.92 144	3.540	238	8,9	0.07 314	0.92 686	4.444	281	8,7	70
75	0.10 110	0.89 890	2.352	201	7,1	0.10 888	0.89 112	3.039	266	6,6	75
80	0.13 492	0.86 508	1.346	135	5,4	0.16 250	0.83 750	1 708	201	4,8	80
85	0.19 128	0.80 872	669	85	4,0	0.52 186	0.74 814	704	108	3,3	85
90	0.30 400	0.69 600	231	39	2,6	0.43 058	0.56 942	165	31	2,1	90
95	0.64 216	0.35 784	38	8	1,0	0.91 652	0.08 348	10	2	1,0	95
100	.	.	0	.	.	.	.	0	.	.	100

Vergleichende Übersicht *der Sterblichkeit in der Stadt Bern (1919—1922) und in der Schweiz (1901—1910).*

$1000\ q_x$ = Sterbenswahrscheinlichkeit in ‰.

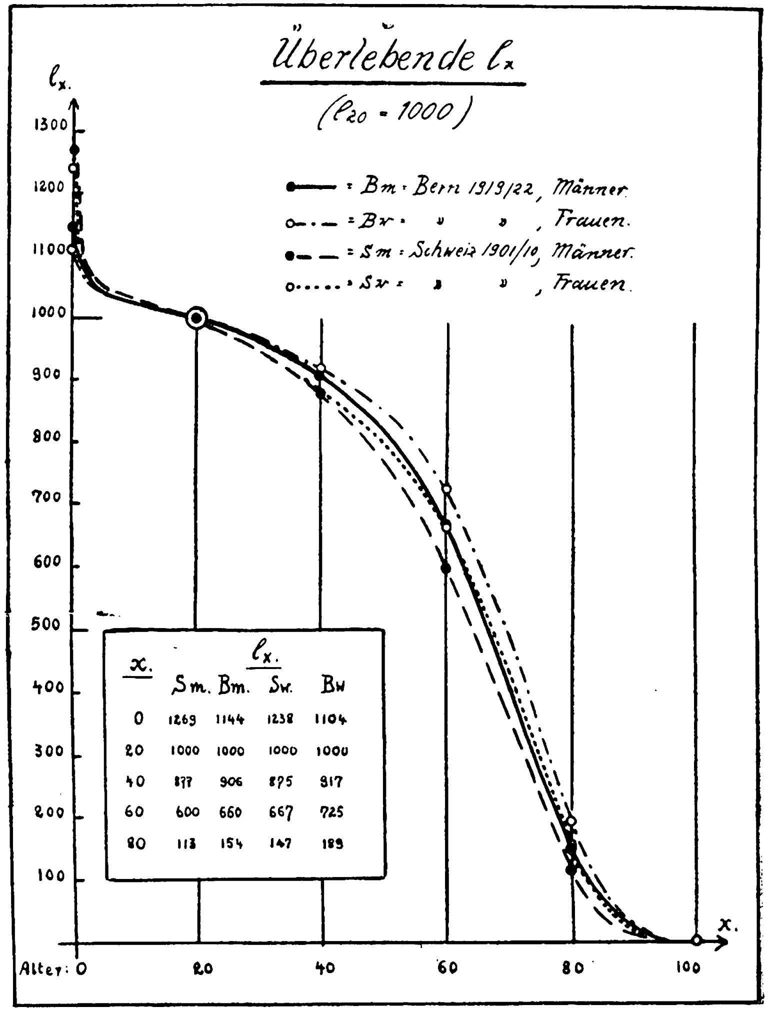
$l_x\ (l_{20} = 1000)$ = Überlebensordnung, bezogen auf 1000 Lebende vom Alter $x = 20$.

$\mathring{e}_x$ = Durchschnittliche, volle Lebenserwartung.

Übersicht 5.

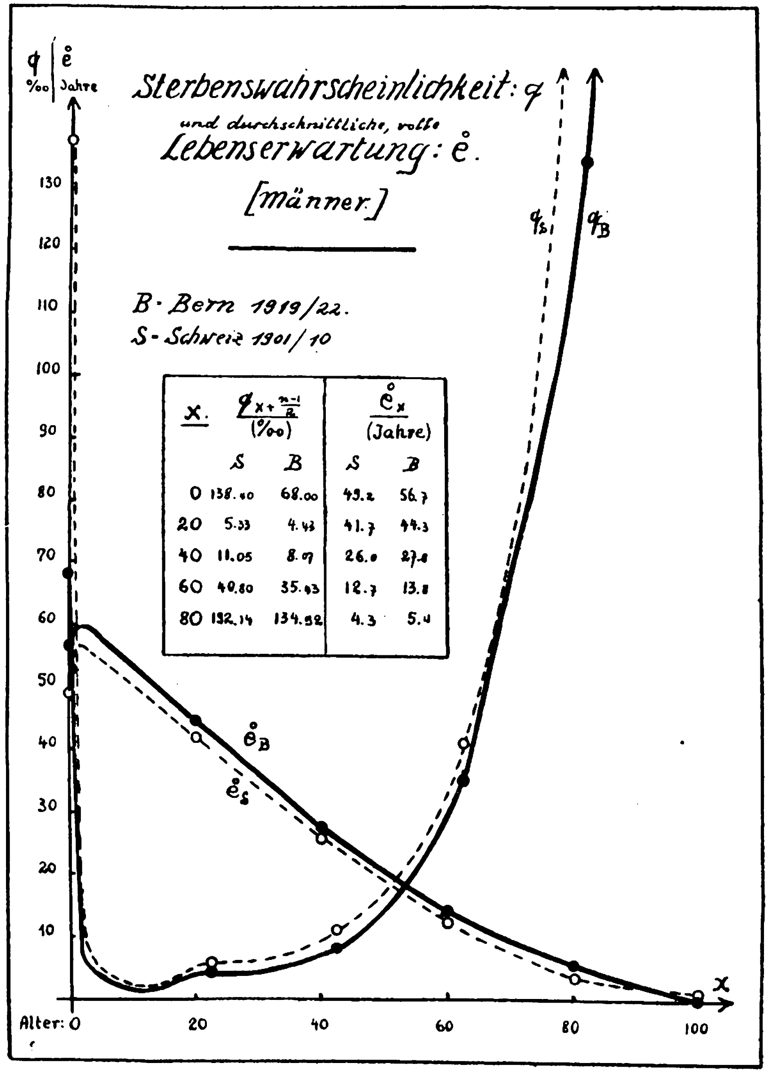
Alter x	Männliches Geschlecht: $1000\ q_{x+\frac{n-1}{2}}$ Bern 1919—1922	$1000\ q_{x+\frac{n-1}{2}}$ Schweiz 1901—1910	$l_x\ (l_{20} = 1000)$ Bern 1919—1922	$l_x\ (l_{20} = 1000)$ Schweiz 1901—1910	$\mathring{e}_x$ Bern 1919—1922	$\mathring{e}_x$ Schweiz 1901—1910	Weibliches Geschlecht: $1000\ q_{x+\frac{n-1}{2}}$ Bern 1919—1922	$1000\ q_{x+\frac{n-1}{2}}$ Schweiz 1901—1910	$l_x\ (l_{20} = 1000)$ Bern 1919—1922	$l_x\ (l_{20} = 1000)$ Schweiz 1901—1910	$\mathring{e}_x$ Bern 1919—1922	$\mathring{e}_x$ Schweiz 1901—1910	Alter x
0	68,00	138,40	1144	1269	56,7	49,2	40,40	112,58	1104	1238	60,6	52,2	0
1	6,84	10,86	1067	1093	59,9	56,1	5,69	10,53	1060	1099	62,2	57,5	1
5	2,35	3,09	1038	1047	57,5	54,5	3,15	3,62	1036	1053	59,6	56,2	5
10	1,50	2,14	1026	1030	53,1	50,3	1,33	2,58	1020	1037	55,5	52,0	10
15	3,56	3,86	1018	1019	48,5	45,9	2,54	4,66	1013	1024	50,8	47,6	15
20	4,43	5,33	**1000**	**1000**	44,3	41,7	3,68	5,73	**1000**	**1000**	46,5	43,7	20
25	4,18	5,83	978	974	40,3	37,8	4,35	6,36	982	972	42,3	39,9	25
30	4,98	6,65	958	946	36,1	33,8	4,76	6,85	960	941	38,2	36,1	30
35	6,02	8,35	934	914	31,9	29,9	4,48	7,60	938	909	34,1	32,3	35
40	8,07	11,05	906	877	27,8	26,0	5,93	8,46	917	875	29,8	28,4	40
45	11,65	14,72	870	829	23,8	22,4	9,12	10,26	890	839	25,6	24,6	45
50	17,74	20,56	821	770	20,2	18,9	12,43	14,16	850	797	21,7	20,7	50
55	25,35	28,67	750	694	16,8	15,7	19,15	21,00	799	742	17,9	17,1	55
60	35,43	40,80	660	600	13,8	12,7	29,13	32,84	725	667	14,5	13,7	60
65	59,71	59,16	551	487	11,1	10,1	47,40	51,97	626	565	11,4	10,7	65
70	78,56	86,37	405	359	8,9	7,8	73,14	80,53	491	432	8,7	8,2	70
75	101,10	130,82	269	229	7,1	5,8	108,88	122,90	336	284	6,6	6,1	75
80	134,92	192,14	154	113	5,4	4,3	162,50	180,42	189	147	4,8	4,5	80
85	191,28	267,49	77	39	4,0	3,2	251,86	252,55	78	54	3,3	3,3	85
90	304,00	349,53	26	8	2,6	2,4	430,58	338,97	18	13	2,1	2,4	90
95	642,16	512,62	4	1	1,0	1,6	916,52	471,58	1	2	1,0	1,8	95
100	.	710,90	.	.	.	1,0	.	637,62	.	.	.	1,1	100

Tafel I.



x.	l_x. Sm.	Bm.	Sw.	Bw
0	1269	1144	1238	1104
20	1000	1000	1000	1000
40	877	906	875	917
60	600	660	667	725
80	113	154	147	189

Tafel II.



x.	$q_{x+\frac{n-1}{2}}$ (‰) S	B	$\mathring{e}_x$ (Jahre) S	B
0	138.40	68.00	49.2	56.7
20	5.33	4.43	41.7	44.3
40	11.05	8.07	26.0	27.8
60	40.80	35.43	12.7	13.8
80	132.14	134.52	4.3	5.4