Möglichkeit und Wirklichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik

Von *Dr. O. Schenker*,
Beamter des eidgenössischen statistischen Bureaus, Interlaken

Inhalt

1. Der Begriff der Wirklichkeit.
2. Der Begriff der Möglichkeit.
3. Das Verhältnis von Wirklichkeit und Möglichkeit, Begriff der Wahrscheinlichkeit, Anwendung auf die Statistik.
4. Die Bedeutung von Hypothesen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik.
5. Der Begriff des Zufalls.
6. Beispiele aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung; abhängige Ereignisse; ihre Bedeutung in der Statistik. Bewertung statistischer Zahlen durch den Divergenzkoeffizienten von Lexis.

Die Wissenschaft befasst sich mit der Wirklichkeit und sucht uns dieselbe durch Ermittlung von Beziehungen und Gesetzmässigkeiten näherzubringen. Unentbehrlich sind hierbei möglichst genau definierte Begriffe. Ein so scharfer Denker wie Schopenhauer definiert die Wirklichkeit als eine Abstraktion, welche entsteht, wenn man bei einem Objekt der Natur ganz von dem Kausalverhältnis zu den übrigen Objekten absieht [1]). Als Beispiel kann man die Naturbeschreibung anführen, die sich um Ursache und Wirkung der Naturerscheinungen nicht bekümmert, im Gegensatz zur Naturlehre. Eine strenge Trennung ist hier natürlich nicht möglich. Der aufmerksame und denkende Schüler wird beim blossen Zeichnen eines Naturgegenstandes, z. B. einer Pflanze, unwillkürlich nach der Ursache dieser oder jener Eigenschaft oder Erscheinung fragen. Ähnlich verhält es sich bei einer statistischen Erhebung, z. B. einer Volkszählung, indem auch hier die Ursachen und Wirkungen der gezählten Merkmale in den Hintergrund treten. Eine Wirklichkeit im absoluten Sinne kann es für den Menschen keine geben, erstens weil blosses Beobachten und reines Denken nicht scharf getrennt werden können (wie dies bereits angedeutet wurde), zweitens weil diese sogenannte Wirklichkeit abhängig ist von der Beschaffenheit unserer Sinnesorgane und des Gehirns. Diese Wahrheit verkörpert sich in dem Satze: «Die Welt ist meine Vorstellung». Aber auch die relative Wirklichkeit, die Wirklichkeit schlechthin, kann von uns nie völlig erkannt werden, weil wir nicht ohne Unterbruch die ganze Natur beobachten können, und weil die gemachten Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind. Ferner müssen wir uns zu Gemüte führen, dass Aufzeichnungen

[1]) Arthur Schopenhauer, Die Welt als Wille und als Vorstellung, 1. Bd. Kröners Volksausgabe, Leipzig 1911, S. 280 ff.

über gemachte Beobachtungen zum Teil oder ganz verloren gehen können. Der denkende Mensch hat von jeher das Bedürfnis gehabt, die klaffenden Lücken, welche zwischen den Beobachtungen des Menschen sich auftun, zu ergänzen. Hierher gehören z. B. die Rekonstruktionen von Funden aus prähistorischer Zeit. Gebraucht man hierbei seine Phantasie schrankenlos, so versteigt man sich in das Gebiet der Sage. Anders verhält es sich, wenn die Phantasie diejenigen Grenzen nicht verlässt, welche von der Möglichkeit vorgeschrieben werden.

Alles was schon Wirklichkeit gewesen ist und nach Naturgesetzen sein kann, ist möglich. Was in der Vergangenheit eingetreten ist, kann auch in der Zukunft eintreten. Auf dieser Tatsache beruht ja schliesslich die gesamte menschliche Kultur, die ohne die Möglichkeit der Wiederholung menschlicher Tätigkeit überhaupt nicht denkbar ist. Der Begriff der Möglichkeit bedeutet eine Verallgemeinerung desjenigen der Wirklichkeit, was wirklich ist, muss darum auch möglich sein oder in einer andern Fassung: die Zahl der wirklich beobachteten Fälle ist in derjenigen der möglichen Fälle überhaupt inbegriffen. Es braucht eigentlich nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass der Begriff der Möglichkeit in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik eine hervorstechende Rolle spielt, denn Massenbeobachtungen, die auf beiden Gebieten vorausgesetzt werden, können nicht beliebig oft angestellt werden. Will man z. B. über die Zusammensetzung einer Bevölkerung nach verschiedenen Merkmalen für einen Zeitpunkt Auskunft haben, der zwischen zwei aufeinanderfolgenden Volkszählungen liegt, so wird man zu Hypothesen Zuflucht nehmen müssen, die im Bereiche der Möglichkeit liegen, denn die Statistik über die Bevölkerungsbewegung ist nicht so vollständig, dass hier exaktere Methoden herangezogen werden könnten. Die Zahl der möglichen Fälle kommt vor allem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Sprache. Aber auch in der Statistik ist sie von Bedeutung, welche aber offenbar viel zu wenig gewürdigt wird; denn auch hier wird die Wirklichkeit nur voll verstanden werden können, wenn diese der Möglichkeit gegenübergestellt wird, gerade so wie die Sterblichkeit eines bestimmten Alters erst recht eingeschätzt werden kann, wenn man die Zahl der Sterbefälle zur Zahl der Personen unter Risiko ins Verhältnis setzt. Auf den statistischen Tabellen werden bekanntlich gewisse Merkmale kombiniert: z. B. der Wohnort mit der Heimat. Es ist nun nach den soeben gegebenen Ausführungen von Bedeutung, zu wissen, wieviele Kombinationen zwischen den Merkmalen z. B. einer Volkszählungskarte möglich sind. Nehmen wir 14 solcher Merkmale an (Volkszählung von 1920, ohne die Trennung von Haupt- und Nebenberuf, ferner ohne Ausscheidung der Heimarbeit und der Stellung im Beruf), so ergeben sich $2^{14}-1$ mögliche Kombinationen zu 1, 2, 3, 4 … 14 Merkmalen oder Elementen, oder 16.383. Soviele Tabellen sind also nach der Volkszählung von 1920 denkbar. Legt man 18 kombinierbare Merkmale zugrunde, so steigt die Zahl der möglichen Kombinationen auf $2^{18}-1$ oder 262.143. Die nachfolgende Zusammenstellung gibt etwas eingehenderen Aufschluss [1]):

[1]) Mathematische Bevölkerungstheorie, auf Grund von G. H. Knibbs «The mathematical theory of population», dargestellt von Dr. E. Czuber, erschienen bei Teubner, Leipzig und Berlin, 1923, S. 74.

Zahl der kombinierten Elemente	Zahl der statistischen Elemente												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	Zahl der verschiedenen Kombinationen												
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287
6						1	7	28	84	210	462	924	1716
7							1	8	36	120	330	792	1716
8								1	9	45	165	495	1287
9									1	10	55	220	715
10										1	11	66	286
11											1	12	78
12												1	13
13													1
Gesamtzahl der Kombinationen	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191

Diese Zahlen sind sehr lehrreich, sie zeigen, dass mit jedem neuen Merkmal die Zahl der möglichen Kombinationen auf das Doppelte steigt und einen entsprechenden Aufwand von Zeit und Geld zur Folge haben kann. Man wird sich daher hüten müssen, einen Fragebogen zu überladen.

Bekanntlich ist das Urmaterial einer Zählung immer mit Fehlern behaftet. Wir wollen nun hier zeigen, wie wichtig ist, das Urmaterial einer gründlichen Revision zu unterziehen und dass es leichtsinnig ist, dieselbe zu unterlassen. Zu diesem Ende fassen wir die Zahl der möglichen Kombinationen ins Auge, die unter den gezählten Individuen überhaupt möglich sind. Vom rein zahlenmässigen, statistischen Standpunkte aus wird zwar ein grosser Teil derselben nicht zu trennen sein, weil gewisse gemeinsame Merkmale (Heimat, Geschlecht ...) vorliegen; dies wird aber um so weniger der Fall sein, je mehr Merkmale kombiniert werden. In Wirklichkeit sind alle diese möglichen Kombinationen verschieden; denn es gibt nicht zwei Glieder der menschlichen Gesellschaft, die miteinander in allen Merkmalen völlig übereinstimmen. Vom Standpunkte des Zivilgesetzbuches ist dies selbstverständlich (Unterscheidung zwischen Personenrecht, Familienrecht und Sachenrecht). Bei der zahlenmässigen Beurteilung der menschlichen Gesellschaft wird man leicht dazu geführt, die Menschen als Sachwerte zu betrachten, die gegen einander ausgetauscht werden können, wenn nur die entsprechenden Zahlen unverändert bleiben. Dieser Materialismus in der Statistik wird sich verraten, sobald eine weitgehende Spezialisierung nötig wird, was eben auch zur wissenschaftlichen Forschung gehört. Dies vorausgesetzt, handle es sich bei einer Zählung um P Personen. Die Zahl aller möglichen Kombinationen unter diesen P Personen beträgt $2^P - 1$; seien die Zählkarten von f Personen fehlerhaft ausgefüllt, so beträgt die Zahl aller möglichen fehlerhaften Kombinationen unter den P gezählten Personen:

$$2^{P-f}\,(2^f - 1); \tag{1}$$

die Summe aller fehlerfreien Kombinationen aber ist:

$$2^{P-f} - 1; \tag{2}$$

die Summe sämtlicher Kombinationen ist also:

$$2^{P-f}(2^f - 1) + 2^{P-f} - 1 = 2^P - 1; \tag{3}$$

wie es sein soll. Der Ausdruck (1) schreibt sich in der Form: $2^P - 2^{P-f}$; denkt man sich P unveränderlich und f veränderlich von Null bis P, so nimmt (1) alle Werte an zwischen 0 und $2^P - 1$; mit der Zahl der Fehler wächst also auch die Zahl der fehlerhaften Kombinationen; dies ist ja ohne weiteres einzusehen. Fragen wir weiter: nach welchem Gesetz steigt die Zahl der fehlerhaften Kombinationen, wenn die Zahl der Fehler (d. h. fehlerhaft ausgefüllten Zählkarten) lückenlos steigt von 0 bis P? Hierüber gibt die folgende Zusammenstellung Auskunft:

	f = Zahl der fehlerhaft ausgefüllten Karten												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	P
Zahl der fehlerhaften Kombinationen	0	$2^P \cdot \frac{1}{2}$	$2^P \cdot \frac{3}{4}$	$2^P \cdot \frac{7}{8}$	$2^P \cdot \frac{15}{16}$	$2^P \cdot \frac{31}{32}$	$2^P \cdot \frac{63}{64}$	$2^P \cdot \frac{127}{128}$	$2^P \cdot \frac{255}{256}$	$2^P \cdot \frac{511}{512}$	$2^P \cdot \frac{1023}{1024}$	...	$2^P - 1$

Das Gesetz, nach welchem diese Zahlen fortschreiten, ist sehr einfach. Sie nähern sich asymptotisch dem Grenzwerte $2^P - 1$, d. h. ihre Differenzen ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}$ ... vom konstanten Faktor 2^P abgesehen), werden mit zunehmender Rangzahl immer kleiner, um bei genügend grossem P den Wert Null zu erreichen. Drückt man diese Zahlen in ‰ aller Kombinationen der P Personen aus, so erhält man bei grossem P (diese Bedingung muss ja in der Statistik erfüllt sein) das folgende Bild:

	f = Zahl der fehlerhaft ausgefüllten Zählkarten												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	P
Auf 1000 mögliche Kombinationen unter den P gezählten Personen kommen fehlerhafte	0	500	750	875	937,5	968,7	984,4	992,2	996,1	998,0	999,0	...	1000

Das interessante an diesen Zahlen ist der Umstand, dass sie von P unabhängig sind. Diese Darstellungen lehren, dass es *über jeden Vergleich leichter* ist und viel weniger Zeit und Arbeit kostet, die fehlerhaft ausgefüllten Zählkarten richtigzustellen als dasselbe mit den fehlerhaften Kombinationen zu tun. Über die

Grösse der Zahl $2^P - 2^{P-f}$, d. i. die Summe aller möglichen fehlerhaften Kombinationen, seien noch einige Bemerkungen gestattet, die sich vielleicht am besten aus der folgenden Zusammenstellung ergeben:

	$P = 1.000.000$						
	$f =$						
	1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
Ziffernzahl von 2^P . .	301.031	301.031	301.031	301.031	301.031	301.031	301.031
Ziffernzahl von 2^{P-f} .	301.030	301.027	301.000	300.729	298.020	270.928	1
Ziffernzahl von $2^P - 2^{P-f}$ wenigstens	301.030	301.030	301.030	301.030	301.030	301.030	301.030

Nun ist eine ganze Zahl, mit 301.030 Ziffern, so unermesslich gross, dass man sich darüber überhaupt keine Vorstellung machen kann. Aus dem ganzen Weltenraum können keine Vergleichszahlen herbeigezogen werden. Die ausserordentliche, grosse Einheit eines Lichtjahres mit 9.467.280.000.000 Kilometern bietet gar keine Vergleichsmöglichkeit.

3. Es ist bereits angedeutet worden, von welcher Bedeutung die Gegenüberstellung von Wirklichkeit und Möglichkeit ist; sie gehört mit zur wissenschaftlichen Forschungsmethode, im besondern auch der Sozialwissenschaften, indem sie uns lehrt, der Wirklichkeit diejenige Bedeutung beizulegen, welche sie verdient. Eigentlich bedeutet diese Gegenüberstellung nichts anderes als die Kritik der Wirklichkeit, denn bedeutet denn Kritik etwas anderes als Gegenüberstellung von dem was ist mit dem was sein könnte? Aus diesem Grunde haben sich auch die Kritiker der Gesellschaftsordnung, die Sozialisten, um die Sozialwissenschaften grosse Verdienste erworben. Drückt man das Verhältnis von Wirklichkeit und Möglichkeit zahlenmässig aus, so stösst man auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Eine solche Wahrscheinlichkeit stellt immer einen echten Bruch dar, so dass die den Zähler bildenden Einheiten in dem Nenner enthalten sind oder aus demselben hervorgehen. Da man irgendeine Sache am besten verstehen lernt, wenn man den Zweck derselben ins Auge fasst, so wollen wir nach dem Zwecke fragen, der mit der Bildung von Wahrscheinlichkeiten verfolgt wird. Hierauf lautet die Antwort: die Bildung von Wahrscheinlichkeiten hat den Zweck, Ereignisse oder Zustände der Zukunft vorauszusagen oder in analoger Weise solche der Vergangenheit zu erforschen, sofern sie nicht in das Gebiet der exakten Forschung gehören. Das erste beste Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann dies illustrieren. In der Regel wird die Zukunft zu enträtseln sein, aber auch die Vergangenheit ist uns nur bruchstückweise bekannt, so dass man auch hier ohne die Kunst des Vermutens nicht auskommt. Wir denken hier vor allem an die Geschichtschreibung. Nun haben auch die Gliederungs- und Verhältniszahlen der Statistik den Zweck, die sozialen Vorgänge und Zustände vorauszusagen respektive diejenigen der Vergangenheit zeitlich oder örtlich zu fixieren. Könnte man diese Zahlen

bloss auf die kritischen Zeitpunkte anwenden und würden sie nicht auch für die zwischen zwei Zählungen liegende Zeitstrecke Auskunft geben, so wären sie überhaupt wertlos. Man darf sagen, die Statistik bedeute eine Verallgemeinerung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, weil man durch eine allgemeinere Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes auf die Statistik gelangt. Wenn man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit unveränderlichen Wahrscheinlichkeiten rechnet, so wird man für die Anwendung auf das soziale Leben variable Wahrscheinlichkeiten voraussetzen müssen; daraus ergibt sich dann der Begriff der abhängigen Wahrscheinlichkeiten im Einklang stehend mit der mehr oder weniger grossen Verbundenheit oder Abhängigkeit der sozialen Erscheinungen. Die Fähigkeit, die Abhängigkeit der gesellschaftlichen Zustände und Erscheinungen bis zu den feinsten Fäden, die sich wie ein Spinnengewebe über die Gesellschaft ausbreiten, zu verfolgen, zu erkennen und danach zu handeln, pflegt man als soziales Verständnis zu bezeichnen. Blosses Wissen allein kann dasselbe nicht kennzeichnen, weil die feinern Regungen des sozialen Körpers dadurch nicht erfasst werden; es muss damit auch Mitgefühl für seine Mitmenschen verbunden sein. Wer z. B. vom blossen Rechtsstandpunkt aus das soziale Leben beurteilt, wird sich darüber kaum ein ganz zutreffendes Bild verschaffen können, obwohl man auch in der modernen Rechtspflege der Gebundenheit der menschlichen Handlungen bis zu einem gewissen Grade Rechnung trägt.

Mit Rücksicht auf den gemeinsamen Zweck der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik dürfte die Bezeichnung Wahrscheinlichkeitszahl oder statistische Wahrscheinlichkeit für diejenigen statistischen Verhältnisse, deren Zählereinheiten im Nenner enthalten sind oder aus demselben hervorgehen, nicht unpassend erscheinen; für einen genügend engen Zeitraum ist ja die Konstanz derselben gesichert; systematisch wirkende Einflüsse im Sinne einer Veränderung solcher Wahrscheinlichkeitszahlen setzen doch jedenfalls einen gewissen Zeitraum voraus, während die unvorbereiteten, zufälligen Einflüsse jederzeit zur Geltung kommen können. Selbstverständlich hindert dies nicht, Untersuchungen nach den strengern Kriterien der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorzunehmen. Anders ausgedrückt: der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bezieht sich im Grunde bloss auf den zeitlichen Geltungsbereich, der durch sie ermittelten Zahlen und Zahlenverhältnisse. Lexis hat den Weg gewiesen, welcher zu betreten ist zur Entscheidung der Frage: welchen Anteil bei veränderlichen Wahrscheinlichkeiten (und hierzu gehören vor allem auch die Wahrscheinlichkeitszahlen der Statistik) zufällige Einflüsse und welchen Anteil systematisch wirkende Ursachen auf die Schwankungen ausüben, welche die beobachteten Wahrscheinlichkeitszahlen um die Grundwahrscheinlichkeiten ausführen, und welche die Grundwahrscheinlichkeiten selbst ausführen (wenn man die beobachteten Wahrscheinlichkeitszahlen von allen Fehlern befreit oder befreit denkt, so erhält man die Grundwahrscheinlichkeiten).

4. Ohne Hypothesen ist keine Wissenschaft denkbar. Im besondern Masse gilt dies von der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik. Die Hypothese ist die vorläufige Annahme der Wahrheit eines Satzes zum Zweck ihrer Prüfung

an den daraus abgeleiteten Folgen [1]). Sie ist das wichtigste Bindemittel zwischen Induktion und Deduktion. Aus der unbeweisbaren Hypothese, dass das arithmetische Mittel aus mehreren Beobachtungen ein und derselben Grösse ihren wahrscheinlichsten Wert gibt, hat Gauss sein Fehlergesetz abgeleitet. Die Methode der kleinsten Quadrate ruht auf dieser Hypothese. Ohne die Hypothese der gleich möglichen Fälle kann keine einzige Wahrscheinlichkeit abgeleitet werden. In der Statistik bedeutet die Verwendung der Zahl ihre bedeutsamste Hypothese; denn streng genommen soll eine Zahl kongruente Grössen vereinigen, was von einer statistischen Zahl nie vollkommen gilt; im weitern beruht die Annahme, dass bei genügend grosser Beobachtungszahl diese Ungleichheiten der zu einer Zahl vereinigten Grössen sich ausgleichen, auf Hypothesen. Über den Einfluss, welchen die grosse Zahl von Fehlerquellen auf die statistischen Zahlen ausüben, ist man ebenfalls auf Hypothesen angewiesen. Unter diesen Umständen ist bei der Gewinnung der statistischen Zahlen die grösste Gewissenhaftigkeit erforderlich, damit nicht die Statistik zu einer blossen Spielerei mit Zahlen ausartet. Massenbeobachtungen können nicht in stetiger Aufeinanderfolge, sondern nur in mehr oder weniger grossen Zeitabständen vorgenommen werden. Zwischen den Zählungsterminen bleiben die beobachteten Zahlen nicht konstant; über den Grad dieser Veränderungen muss man sich durch Hypothesen Rechenschaft geben, indem man eine funktionale Abhängigkeit von der Zeit voraussetzt. Bekannt ist die Eulersche Hypothese über die Bevölkerungsvermehrung, wonach sich die Bevölkerung nach demselben Gesetze vermehrt wie ein an Zins und Zinseszins gelegtes Kapital. Aber es sind nicht bloss die Lücken zwischen verschiedenen Zählungen auszufüllen; die Zählungen selbst weisen Lücken auf, die manchmal erst bei Vergleichungen zutagetreten. Auch hier hilft man sich mit Hypothesen über die Abhängigkeit der unbekannten Zahl von einer bekannten. Als Beispiel kann man die schätzungsweise Ermittlung der Haushaltungszahl eines Landes aus seiner Bevölkerung anführen, indem ein mittlerer Haushaltungsbestand angenommen wird. Als eine Verallgemeinerung der funktionalen Abhängigkeit ist die korrelative anzusehen. Fassen wir die Alterskombinationen der Ehepaare eines Landes ins Auge, so entspricht einem bestimmten Alter des Ehemannes nicht ein *bestimmtes* Alter der Ehefrau, wie dies bei funktionaler Abhängigkeit der Fall wäre, sondern ein *veränderliches Alter*; diese Veränderlichkeit ist aber eine gesetzmässige und hängt vom Alter des Ehemannes ab. Wir haben hier den Fall einer korrelativen Abhängigkeit vor uns. Rechnet man mit einem mittlern Alter der Frau, so führt sie auf die funktionale Abhängigkeit zurück. Das Alter des Mannes erscheint als Funktion des mittlern Alters der Frau.

5. Die Unvollkommenheit unseres Wissens rührt daher, dass uns eine verhältnismässig kleine Anzahl von Kausalreihen zum Bewusstsein kommt und dass sich unsere Erkenntnis niemals auf sämtliche, in bezug auf Zeit und Ort ins Unendliche laufenden Glieder derselben erstrecken kann. Anderswie gäbe es keine Wahrscheinlichkeitsrechnung, keine Statistik und damit auch keine zufälligen Ereignisse, deren wesentliches Merkmal doch darin besteht, dass man sie nicht voraus-

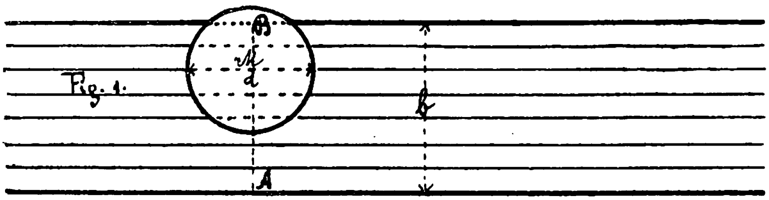
---

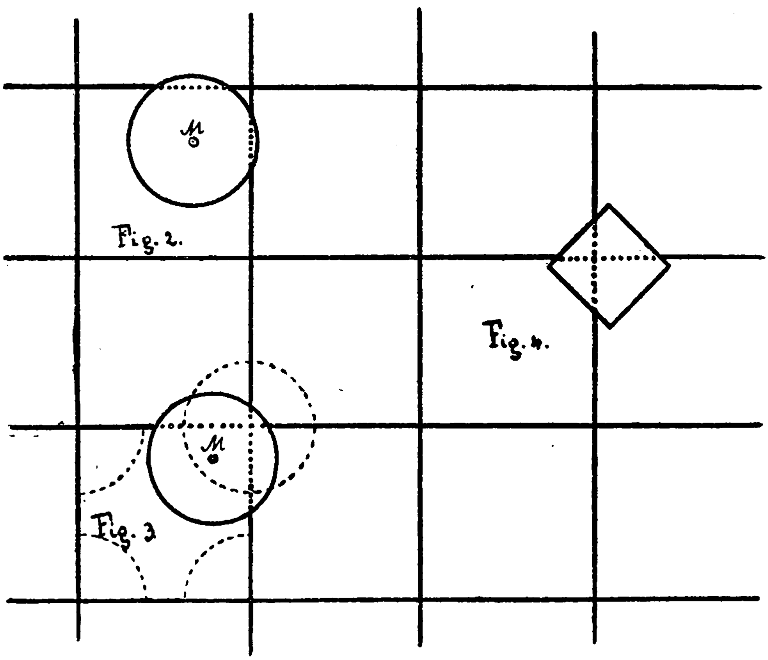
[1]) Psychologie und Logik, von Dr. Th. Elsenhans, Sammlung Göschen, 4. Aufl., S. 137.

sehen kann. Sogar ein Schopenhauer scheint dies übersehen zu haben, wenn er sagt: «Jedes Objekt, von welcher Art es auch sei, z. B. jede Begebenheit in der wirklichen Welt, ist allemal notwendig und zufällig zugleich; notwendig in Beziehung auf das eine, das ihre Ursache ist; zufällig in Beziehung auf alles übrige. Denn ihre Berührung in Zeit und Raum mit allem übrigen ist ein blosses Zusammentreffen ohne notwendige Verbindung.» Diese Auffassung ist offensichtlich zu weit gefasst, weil die Beschränkung fehlt, dass bei einem zufälligen Ereignis die Ursachen, welche es voraussehen lassen, unbekannt sind. Wenn Kant sagt: «Alles Zufällige hat ein Ursache» und hinzufügt: «Zufällig ist, dessen Nichtsein möglich», so ist diese Auffassung insofern unrichtig als sie sich bloss auf noch nicht eingetretene Ereignisse beziehen kann, aber nicht auf solche, welche bereits eingetreten sind; hat man beispielsweise mit einer Münze Wappen geworfen, so hat es keinen Sinn mehr, über die Möglichkeit dieses für uns zufälligen Ereignisses zu diskutieren; sein Nichtsein ist absolut unmöglich. Wenn sich Schopenhauer auf den Standpunkt stellt, dass die Zufälligkeit eines Ereignisses in dem örtlichen und zeitlichen Zusammentreffen mehrerer voneinander unabhängigen Ereignisse besteht, so darf diese Auffassung als sehr zutreffend bezeichnet werden; denn unsere Unwissenheit und Unvollkommenheit führt auf den Begriff der unabhängigen Ereignisse. Würden wir alle Kausalreihen als Funktionen von Zeit und Raum kennen, so bestände eine solche Unabhängigkeit nicht. Der Umstand, dass bei manchen Ereignissen, denen wir das Prädikat zufällig beilegen, auf den ersten Blick kein Zusammentreffen mehrerer Kausalreihen erkannt werden kann, spricht nicht gegen die Schopenhauersche Definition. Im Sinne der Infinitesimalrechnung erscheint jede Ursache als Summe von Ursachendifferentialen und gehört damit verschiedenen Kausalreihen an, die bloss zufolge unserer Unwissenheit nicht wahrgenommen werden; der ins Wasser fallende Stein setzt das Wasser nach unendlich vielen Richtungen der Wasserfläche in Bewegung; die Ursache der entstehenden Wellenbewegung, der fallende Stein, muss in Differentiale aufgelöst werden, sobald man die sich in ihm kreuzenden Kausalreihen ins Auge fasst.

6. Der Begriff des Zufalls soll hier an einigen einfachern Beispielen einlässlich erörtert werden, die zwar mit der Sozialstatistik direkt nicht zusammenhängen, welche aber doch geeignet sind, die für die Statistik so wichtigen Gegenüberstellungen der Wirklichkeit mit der Möglichkeit vorzubereiten. Die Darstellung des Unmöglichen gehört nicht in die Statistik, so wenig als in die Wissenschaft überhaupt. Je vollkommener die Abtrennung der unmöglichen Fälle ist und je ausgiebiger die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Fälle berücksichtigt werden können, desto wahrheitsgetreuer werden die Wahrscheinlichkeitszahlen der Statistik. Beispielsweise haben die allgemeinen Heiratsziffern einen beschränkten wissenschaftlichen Wert, weil sie die möglichen und unmöglichen Fälle unterschiedslos berücksichtigen. Werfen wir eine Münze mit dem Durchmesser d auf ein ebenes Feld, welches durch parallele Geraden in gleich breite Streifen von der Breite b eingeteilt ist, und fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass die Münze irgendeine Gerade bedecke (Fig. 1). Sobald $d = b$ ist, trifft dieser Fall immer ein, ebenso, wenn d grösser als b ist; die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist also die Gewissheit, d. h. 1. Zu untersuchen bleibt also bloss noch der Fall: d kleiner als b.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist offenbar um so kleiner, je kleiner d und je grösser b ist; die einfachste Annahme ist darum $p = \frac{d}{b}$; bei einer nähern Betrachtung erweist sich diese Annahme auch als zutreffend. P ist offenbar identisch mit der Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt M der Münze von irgendeiner der parallelen Geraden einen kleinern Abstand habe als $\frac{d}{2}$ (d. i. der Radius der Münze);





denn beide Ereignisse sind in der Weise voneinander abhängig, dass beide gleichzeitig eintreten bzw. nicht eintreten, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Die Zahl der möglichen Fälle, als Summe der eingetretenen und nicht eingetretenen Ereignisse sowohl als die Zahl der sogenannten günstigen Fälle (eingetretenen Ereignisse), ist übereinstimmend, also sind es auch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Man wird überhaupt immer versuchen, die unbekannte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf die bekannte oder leichter zuermittelnde eines davon abhängigen Ereignisses zurückzuführen. Denken wir nun die gleich breiten Streifen, in welche die Ebene durch die parallelen Geraden zerlegt wird, numeriert mit 1, 2, 3, 4 ... Bei den verschiedenen Würfen mit der Münze falle deren Mittelpunkt M $n_1, n_2, n_3, n_4 \ldots$ mal auf die bezüglichen Streifen (1, 2, 3, 4, ...). Günstige Fälle treffen für die verschiedenen Streifen bezüglich $v_1, v_2, v_3, v_4 \ldots$ mal ein, d. h. sovielmal werden ihre Begrenzungen von der Münze bedeckt. Die Summe v aller günstigen Fälle ist somit: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_s$, wenn s die Zahl der Streifen bedeuten soll, welche so gross sein muss, dass die Münze nicht über sie hinausfällt. Diese Bedingung spielt aber bloss eine nebensächliche Rolle; sollte sie nicht immer erfüllt sein, so lässt man einfach die betreffenden Würfe ausser Betracht. Unerlässlich ist aber die Bedingung, dass alle Lagen des Mittelpunktes M auf der Streifenbreite ($A\ M\ B$, Fig. 1) gleich möglich sind; dies setzt voraus, dass die Streifenbreite b gewisse Grenzen nicht überschreitet. Wolf wählte bei seinen Nadelversuchen für b... 45 mm. Bei ähnlichen Versuchen mit einem Centimestück war $b = 33$ mm. Die Summe: $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_s = v$ geht durch Division mit $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \ldots n_s$ über in:

$$\frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \frac{v_3}{n} + \frac{v_4}{n} + \ldots \frac{v_s}{n} = \frac{v}{n}$$

$\frac{v}{n}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Münze bei den n Würfen die Begrenzung irgendeines Parallelstreifens treffe. Je nachdem die Münze die Berandung des 1., 2., 3., ... s. Parallelstreifens trifft, wollen wir bzw. vom Ereignis 1, 2, 3, ... s sprechen. Sie schliessen einander aus, d. h. sie können nicht gleichzeitig eintreffen, sind aber sonst völlig voneinander unabhängig, d. h. das Eintreffen oder Nichteintreffen irgendeines derselben soll keinerlei Einfluss auf das Eintreten oder Nichteintreten irgendeines andern ausüben; oder was dasselbe besagt, ihre Wahrscheinlichkeiten sollen in keiner Weise voneinander abhängig sein. Man kann also sagen: *Wenn mehrere Ereignisse zeitlich bloss nebeneinander auftreten können (also zwei oder mehrere derselben nicht gleichzeitig), sonst aber keinerlei Abhängigkeit zutagetreten lassen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgendeines derselben (alternative Wahrscheinlichkeit) gleich der Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten.*

Ein Kausalzusammenhang zwischen zwei Ereignissen kann funktionale oder korrelative Abhängigkeit bedeuten. Die erstere entspricht nicht dem Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik; im Mittelpunkt dieser Wissensgebiete steht vielmehr die Korrelation. Sie suchen gleichsam den Weg zu bahnen zur Ermittlung funktionaler Zusammenhänge und bieten einen Ersatz für unser mangelhaftes Wissen. Die Verwendung des Abhängigkeitsbegriffes in diesen beiden Wissensgebieten bedeutet daher im allgemeinen korrelative Beziehungen. Aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit kann man denjenigen der Korrelation ableiten, wie die folgende Korrelationstabelle, einfachster Gestalt, zeigt. Sie bezieht sich auf den Wurf einer Münze auf ein in gleich breite Parallelstreifen eingeteiltes, ebenes Feld (Fig. 1); bedeckt die Münze die Begrenzung eines Parallelstreifens, so tritt ein günstiger Fall ein:

Zahl der günstigen Würfe	Zugehörige Zahl der Fälle mit																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
	Würfen im ganzen																		
0	1	1																	
1			1	1															
2					1														
3						1	1	1	1										
4										1	1	1	1						
5														1					
6															1	1	1		
7																		1	...
.																			
.																			...
.																			

Wir haben hier den Fall einer ins Unendliche fortsetzbaren Korrelationstabelle von einfachster Gestalt; die horizontalen Reihen, deren Glieder sämtliche den Wert 1 besitzen, verschieben sich um so mehr nach rechts, je grösser die Wurfzahl wird, entsprechend der vorhandenen Korrelation (gesetzmässige Veränderung in der Verteilung der Reihenglieder auf die Wurfzahlen mit wachsender Wurfzahl, im Gegensatz zu zufälligen Veränderungen). Das Gesetz der Korrelation ist also hier ein sehr einfaches: die Zahl aller Würfe wächst durchschnittlich proportional mit der Zahl der günstigen Würfe oder, wenn man sich an die geometrische Vorstellung hält: die Horizontalreihen gruppieren sich um eine gerade Linie und treffen dieselbe in Punkten, welche im Mittel ihre Durchschnittswerte darstellen, d. h. die Abweichungen sind als zufällige zu betrachten. Diese sogenannte Korrelationsachse wird also durch die arithmetischen Mittel der Horizontalreihen bestimmt. Die Zahlenreihen, welche hierzu senkrecht verlaufen, kurz, die Vertikalreihen, reduzieren sich hier auf ein einziges Glied, welches gleichzeitig den Mittelwert der betreffenden Vertikalreihe darstellt. Man kann nun auch sagen: die Zahl der günstigen Würfe wächst durchschnittlich proportional mit der Zahl der gemachten Würfe überhaupt oder geometrisch ausgedrückt: die Vertikalreihen gruppieren sich um eine gerade Linie und treffen dieselbe in Punkten, welche im Mittel ihre Durchschnittswerte darstellen, d. h. die auftretenden Abweichungen sind zufälliger Natur. Diese gerade Linie stellt ebenfalls eine sogenannte Korrelationsachse dar. Sie wird bestimmt durch die arithmetischen Mittel der Vertikalreihen. In unserem Beispiel fallen die beiden Korrelationsachsen zusammen entsprechend der Einfachheit der zugrunde liegenden Ereignisse. Die folgende Korrelationstabelle bezieht sich auf 33 Versuchsreihen mit je 20 Versuchen. Der einzelne Versuch bestand in dem Werfen einer Münze auf eine ebene Fläche. Dabei wurde festgestellt, wieviele Würfe gemacht werden mussten, um eine gegebene Anzahl Male Wappen zu werfen, wie die Tabelle zeigt:

Zahl der Würfe im ganzen in einer Versuchsreihe	Zugehörige Zahl der Fälle mit												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 ...
	Wappenwürfen in den 33 Versuchsreihen zusammen												
1	**13**	**20**											
2	2	**30**	1										
3		11	**22**										
4		5	**25**	3									
5		1	11	**21**									
6			5	**25**	3								
7			2	11	**19**	1							
8			2	2	**26**	2	1						
9			1	1	12	**18**	1						
10				1	3	**26**	2	1					
11				1	1	**19**	11	1					
12					1	9	**17**	5	1				
13					1	5	**18**	6	3				
14						2	10	**16**	3	2			
15						1	4	**20**	5	3			
16							3	10	**15**	2	3		
17							2	4	**19**	5	1	2	
18							1	4	4	**18**	4	1	1 ...
19							1	3	3	**16**	6	2	2 ...
20							1	2	2	5	**15**	5	3 ...
....							.	.	.	.	.	.	.
....							.	.	.	.	.	.	.
....							.	.	.	.	.	.	.

Die horizontalen Reihen geben die Häufigkeit oder Gewichte der Wappenwürfe bei gegebener totaler Wurfzahl an. Die vertikalen Reihen bezeichnen die Häufigkeit oder Gewichte der totalen Wurfzahlen bei gegebener Zahl der Wappenwürfe. Hieraus ergibt sich die mittlere Zahl der Wappenwürfe bei gegebener totaler Wurfzahl sowohl als die mittlere totale Wurfzahl bei gegebener Zahl der Wappenwürfe. Zum Beispiel gehört zur totalen Wurfzahl 8 die mittlere Zahl der Wappenwürfe: $\frac{2.2 + 2.3 + 26.4 + 2.5 + 1.6}{33} = 3{,}93$, und zum 5. Wappenwurf gehört die mittlere totale Wurfzahl:

$$\frac{1.7 + 2.8 + 18.9 + 26.10 + 19.11 + 9.12 + 5.13 + 2.14 + 1.15}{83} = 10{,}48.$$

Der gesunde Verstand wird diese Zahlen bestätigen: auf zwei Würfe hat man im Durchschnitt einmal Wappen zu erwarten, also auf 8 Würfe 4 und auf 10 Würfe fünfmal Wappen. Die Unstimmigkeit wegen den Bruchteilen ist auf zufällige Einflüsse zurückzuführen, die sich erst mit zunehmender Versuchszahl verlieren. Dementsprechend liegen die grössten Glieder, sowohl in den Horizontal- als in den Vertikalreihen, bis auf zufällige Abweichungen auf ein und derselben Geraden durch den Ausgangspunkt 0 der Zählung, auch hier fallen die beiden Korrelationsachsen zusammen. Solche Korrelationstabellen sind dem Statistiker geläufig und es gibt kein besseres Mittel, die Abhängigkeit sozialer oder wirtschaftlicher Erscheinungen zu durchdringen, als die Methode der Korrelation; in ihr verkörpert sich der wissenschaftliche Kern der Statistik. Beispielsweise beantwortet sie folgende Fragen: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Grösse einer Familie und der Kinderzahl, besteht eine Beziehung zwischen der Geburtenhäufigkeit und der Konfession, übt diese letztere auf die Häufigkeit der Eheschliessungen einen Einfluss aus, wie ändert sich die Zusammensetzung einer Familie mit der sozialen Stellung? Die Haushaltungsstatistik bietet wegen der vielen Kombinationsmöglichkeiten für diese Methode einen besonders guten Stoff dar. Dasselbe gilt für die Einheiten, in welchen sich Tier- und Pflanzenwelt offenbaren. Die Beziehungen zwischen ihren Lebensäusserungen werden am besten durch die Korrelationsmethode blossgelegt werden können [1]).

Kehren wir zur Figur 1 zurück. Die darauf bezügliche Wahrscheinlichkeit war: $\frac{v}{n} = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \frac{v_3}{n} + \frac{v_4}{n} + \cdots + \frac{v_s}{n}$ oder in anderer Form: $\frac{n_1}{n} \cdot \frac{v_1}{n_1} + \frac{n_2}{n} \cdot \frac{v_2}{n_2} + \frac{n_3}{n} \cdot \frac{v_3}{n_3} + \frac{n_4}{n} \cdot \frac{v_4}{n_4} + \cdots \frac{n_s}{n} \cdot \frac{v_s}{n_s}$. Nun ist allgemein $\frac{n_i}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass der $i$te Parallelstreifen vom Mittelpunkt M der Münze getroffen werde; weiss man, dass dies der Fall ist, weiter aber nichts, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze gleichzeitig die Berandung des $i$ten Parallelstreifens treffe: $\frac{v_i}{n_i}$; das Produkt $\frac{n}{n} \cdot \frac{v_i}{n_i}$ besagt also: *die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen zweier derart voneinander abhängigen Ereignisse, dass die Zahl der günstigen Fälle des ersten mit der Zahl der möglichen des zweiten identisch ist, stellt sich als Produkt der beiden Ereigniswahrscheinlichkeiten dar.* Man kann den Satz auch so aussprechen: *Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreffen zweier Ereignisse, von denen das eine Teilursache des zweiten ist, stellt sich dar als das Produkt der beiden Ereigniswahrscheinlichkeiten.* Als besondern Fall heben wir hervor: Die Teilursache wird zur alleinigen Ursache, das Eintreffen des ersten Ereignisses ruft also das zweite nach sich; um die Bezeichnungen unseres Beispiels zu gebrauchen: es wird $v_i = n_i$ und somit $\frac{n_i}{n} \cdot \frac{v_i}{n_i} = \frac{n_i}{n}$; beide Ereignisse verschmelzen zu einem einzigen mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{n_i}{n}$. Wenn überhaupt mehrere Vorkommnisse immer zusammen auftreten, so spielen sie für die Mutmassungskunst die Rolle eines einzigen, zur Ermittlung ihres voraussichtlichtlichen Eintretens genügt die Angabe einer einzigen Wahrscheinlichkeit; für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind sie also

[1]) Aus der Wirtschaftsstatistik sei als interessanter Fall von Korrelation erwähnt die Abhängigkeit zwischen der Zahl der in einem industriellen Betrieb beschäftigten Personen und der verwendeten motorischen Kraft, Ergebnisse der eidgenössischen Betriebszählung vom 9. August 1905, Bd. 3, S. 155.

identisch. Man könnte diese Tatsache als den Identitätssatz der Vermutungskunst bezeichnen. Machen wir, um auf unser Beispiel zurückzukommen, die Hypothese: $\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3} = \frac{v_4}{n_4} = \dots = \frac{v_s}{n_s}$, um p berechnen zu können. Dieselbe deckt sich mit der Annahme: zieht man durch die n_i in den $i$ten Parallelstreifen geworfenen Münzenmittelpunkte (M) die hierzu parallel laufenden Geraden, so teilen dieselben den Streifen in gleich breite Elementarstreifen (Fig. 1); i durchläuft alle Werte von 1 bis s, also alle möglichen Werte überhaupt und p geht über in:

$\frac{v_1}{n_1}\left(\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} + \frac{n_4}{n} + \dots \frac{n_s}{n}\right)$, oder wegen $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \dots + n_s = n$:

$$p = \frac{v_1}{n_1} = \frac{d}{b}.$$

Selbstverständlich wird eine genügend grosse Zahl von Beobachtungen vorausgesetzt. Vielleicht noch etwas exakter ist die folgende Entwicklung: Man denke sich einen jeden der s Parallelstreifen in soviele gleichlaufende, gleich breite Elementarstreifen zerlegt als er vom Mittelpunkt M bedeckt worden ist (Fig. 1); macht man die einfachste und naheliegendste Hypothese, dass sich die auf einen Parallelstreifen entfallenden Würfe gleichmässig auf seine Breite b verteilen. Sei Δ die Breite der Elementarstreifen im i^{ten} Parallelstreifen, so ist: $n_i \cdot \Delta = b$ und $v_i \cdot \Delta = d$, Δ erscheint somit als in b und d aufgehendes Mass, was bei genügend grossem n_i und v_i der Fall ist. Hieraus folgert man weiter: $\frac{v_i \cdot \Delta}{n_i \cdot \Delta} = \frac{v_i}{n_i} = \frac{d}{b}$, und der Ausdruck für p geht über in:

$$p = \frac{d}{b}\,\frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_s}{n} = \frac{d}{b}.$$

$\frac{v}{n}$ ist die Erfahrungswahrscheinlichkeit oder Wahrscheinlichkeit a posteriori, $\frac{d}{b}$ die theoretische oder Wahrscheinlichkeit a priori, dass die Münze die Berandung irgendeines Parallelstreifens treffe. Treffen die gemachten Hypothesen zu, so muss $\frac{v}{n} = \frac{d}{b}$ sein. In einer Versuchsreihe, 700 Würfe umfassend, beobachtete man 270 günstige Fälle, somit war $\frac{v}{n} = 0{,}3857$, anderseits war $\frac{d}{b}$, (da d...1,92 cm und b...5 cm mass) 0,3840. Die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Theorie darf als eine recht gute bezeichnet werden.

Gehen wir über zu einem andern Beispiel, indem wir die Parallelstreifen nach Figur 1 von dazu senkrecht stehenden Parallelstreifen, ebenfalls von der Breite b, schneiden lassen. Die Ebene wird dadurch in kongruente Quadrate zerlegt (Fig. 2). Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze vom Durchmesser d beim Werfen auf diese Ebene irgend zwei Parallellinien gleichzeitig treffe? Auch hier nehmen wir der Einfachheit wegen an, es sei d kleiner als b. Das Ereignis mit der zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit besteht bei diesem Beispiel aus zwei Komponenten oder Teilereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten nach den soeben gemachten Feststellungen übereinstimmend den Wert $\frac{d}{b}$ besitzen. Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Teilereignisse gleichzeitig eintreffen? Damit ist da das fragliche Ereignis identisch; wir haben keinen Grund anzunehmen, dass das Eintreffen oder Ausbleiben des einen Teilereignisses auf das Eintreffen oder Ausbleiben des andern von Einfluss sei, d. h. wir betrachten dieselben als voneinander unabhängig. Die Zahl der günstigen Fälle für das Totalereignis ist darum identisch mit der Zahl aller möglichen Kombinationen zwischen den günstigen Fällen der beiden Teilereignisse und analog ist die Zahl der möglichen Fälle für das Totalereignis identisch mit der Zahl aller möglichen Kombinationen zwischen den möglichen Fällen der beiden Teilereignisse, denn wegen der angenommenen Unabhängigkeit sind alle diese Verbindungen zulässig. Bedeuten v und v^i die Zahlen für die günstigen, n und n^i die für alle möglichen Fälle der Teilereignisse, so ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = \frac{v \cdot v^i}{n \cdot n^i} = \frac{v}{n} \cdot \frac{v^i}{n^i}$ oder auf Grund der bereits erhaltenen Resultate: $p = \frac{d}{b} \cdot \frac{d}{b} = \frac{d^2}{b^2}$. In einer Versuchsreihe von 627 Würfen traten 92 günstige Fälle ein, somit war $p = 0{,}1467$; anderseits war $\frac{d}{b} = 0{,}384$, also $\frac{d^2}{b^2} = p = 0{,}1475$; die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Berechnung ist so gut als man sie überhaupt erwarten kann. Man kann die Teilereignisse in der Weise trennen, dass man zum Werfen zwei gleich grosse Münzen verwendet; die Unabhängigkeit in den geworfenen Lagen der Münzen tritt dann mit voller Deutlichkeit hervor. Anschliessend halten wir die Tatsache fest: *Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihr gleichzeitiges Eintreffen gleich dem Produkt der beiden Ereigniswahrscheinlichkeiten.* Der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist von der Genauigkeit der Zeitmessung abhängig; er verschwindet, wenn diese Genauigkeit ohne Grenzen gesteigert wird; an Stelle der Gleichzeitigkeit tritt dann die Aufeinanderfolge und die festgehaltene Tatsache heisst dann allgemein: *Sind zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihr aufeinanderfolgendes Eintreffen gleich dem Produkt der beiden Ereigniswahrscheinlichkeiten.* Im letzten Beispiel ereignete es sich bei Steigerung auf 1452 Würfe 38mal, dass zwei sich kreuzende Geraden von der Münze, zweimal hintereinander getroffen wurden. Die Wahrscheinlichkeit für das letzte Ereignis berechnet sich also zu $\frac{38}{1452} = 0{,}0262$. Nach den beiden letzten Sätzen ist sie theoretisch: $\frac{d^2}{b^2} \cdot \frac{d^2}{b^2} = 0{,}0218$. Die Übereinstimmung ist natürlich keine vollkommene, wenn man aber bedenkt, welcher Umweg und welches Wirrwar von Tatsachen benutzt wurde, so darf man damit zufrieden sein.

Fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei den Würfen des vorigen Beispiels irgendeine Quadratecke von der Münze bedeckt werde. Wir machen die Hypothese, dass innerhalb desselben Quadrats die Mittelpunkte der geworfenen Münze gleichmässig verteilt seien; auf die beliebig klein gewählte Flächeneinheit eines und desselben Quadrats soll der Münzenmittelpunkt m-male fallen. Bedenkt man, dass ein günstiger Fall dann eintritt, wenn M innerhalb eines Kreisquadranten, mit Radius $\frac{d}{2}$ und mit einer Quadratecke zum Zentrum, fällt (Fig. 3), so findet man als Zahl der günstigen Fälle: $\pi \frac{d^2}{4} \cdot m$ und als Zahl aller möglichen Fälle: $b^2 \cdot m$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird daher sein: $p = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot b^2}$. Sie ist zunächst unter der Annahme berechnet, dass M auf ein ganz bestimmtes Quadrat gefallen sei, sonst aber über seine Lage Ungewissheit bestehe. Hieraus geht die alternative Wahrscheinlichkeit eine Ecke irgendeines Quadrats zu treffen, ganz wie in den vorigen Beispielen hervor, nämlich: $p = \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot b^2}$. Unter 1600 Würfen fand man 202 günstige, woraus $p = 0{,}126$; da $d = 1{,}92$ cm und $b = 5$ cm mass, so war theoretisch $p = 0{,}116$. Die Übereinstimmung zwischen Hypothese und Wirklichkeit ist zufriedenstellend mit Hinblick auf die mässige Zahl von Würfen. Die Gleichsetzung des theoretischen und des Beobachtungswertes von p gibt auch einen Näherungswert für π. Auf diesem Wege berechneten wir seinerzeit π bis auf die Genauigkeit von 3 Ziffern, also zu 3,14. Hierzu dienten ein Centimestück und Quadrate von 3,3 cm Seitenlänge.

Denkt man sich, dass die Münze an Stelle der symmetrischen Kreisform irgendeine andere Gestalt besitze, immerhin so, dass nicht zwei Quadratecken gleichzeitig überdeckt werden können. Welches ist dann die Wahrscheinlichkeit, mit einer derartigen Münze irgendeine Quadratecke zu treffen? Mit den abgeleiteten Grundsätzen und Hypothesen ist die Antwort nicht mehr schwer. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist das Verhältnis der Münzenfläche zur Quadratfläche. Wir wollen dies statistisch für den Fall bestätigen, dass die Münze Quadratform besitzt. Ein aus Holz geschnittenes Quadrat mit 3 cm Seitenlänge wurde 10.093 Male auf eine in kongruente Quadrate (Seitenlänge 6 cm) geteilte Ebene geworfen, 2534mal überdeckte es eine Quadratecke (siehe Figur 4), woraus sich empirisch die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurfe irgendeine Quadratecke zu bedecken durch 0,2511... ergibt gegenüber dem theoretischen Werte (der Wahrscheinlichkeit a priori) 0,25. Diese 10.093 Würfe wurden in 21 Serien vorgenommen. Man kann darum nach dem Vorgang von Lexis untersuchen, ob bloss zufällige Ursachen die Lage des Holzquadrats bestimmt haben oder ob noch andere Kräfte im Spiele gewesen sind [1]). Das Wort Lage ist in relativem Sinne zu verstehen; sie ist identisch mit der Stellung zum getroffenen Quadrat. Die Bewegung des hölzernen Quadrats beim Niederfallen ist nicht so kompliziert, dass eine, wenn auch bloss unbewusste Beeinflussung derselben undenkbar ist. Wir lassen nun die zu den einzelnen Serien gehörenden Wahrscheinlichkeiten, ihre Abweichungen von dem Mittelwert 0,251, sowie die Quadrate derselben folgen:

Nr der Serie	Zahl der möglichen Fälle	Zahl der günstigen Fälle	Zugehörige Wahrscheinlichkeit (3) : (2)	Abweichung von dem Mittelwert 0,251	Quadrat dieser Abweichung	Quadrat der Abweichung × Gewicht Kol. (2)×(6)
1	2	3	4	5	6	7
1	283	76	0,269	0,018	0,000324	0,092
2	320	80	0,250	0,001	0,000001	0,000
3	373	105	0,282	0,031	0,000961	0,358
4	405	105	0,259	0,008	0,000064	0,026
5	420	110	0,262	0,011	0,000121	0,051
6	422	121	0,287	0,036	0,001296	0,547
7	430	113	0,263	0,012	0,000144	0,062
8	435	126	0,290	0,039	0,001521	0,662
9	435	92	0,211	0,040	0,001600	0,696
10	445	136	0,306	0,055	0,003025	1,346
11	465	93	0,200	0,051	0,002601	1,209
12	485	107	0,221	0,030	0,000900	0,436
13	495	113	0,228	0,023	0,000529	0,262
14	505	130	0,257	0,006	0,000036	0,018
15	545	127	0,233	0,018	0,000324	0,177
16	565	148	0,262	0,011	0,000121	0,068
17	595	139	0,234	0,017	0,000289	0,172
18	602	140	0,233	0,018	0,000324	0,195
19	620	157	0,253	0,002	0,000004	0,002
20	623	170	0,273	0,022	0,000484	0,302
21	625	146	0,234	0,017	0,000289	0,181
Total	10.093	2534	0,251		0,014958	6,862

Nimmt man an, die fragliche Wahrscheinlichkeit sei in den einzelnen Serien mit gleicher Genauigkeit bestimmt worden, so ist der mittlere Fehler einer solchen Wahrscheinlichkeitsbestimmung: $\sqrt{\frac{0{,}014958}{20}} = 0{,}027$; da auf die Serie durch-

[1]) Für das folgende verweisen wir auf die gemeinverständliche Arbeit von Prof. G. Pólya: Anschauliche und elementare Darstellung der Lexisschen Dispersionstheorie, Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, Heft 2, 1919.

schnittlich 481 Versuche entfallen, so ist anderseits derselbe mittlere Fehler theoretisch: $\sqrt{\frac{0{,}251 \cdot 0{,}749}{481}} = 0{,}020$; der Unterschied in den beiden Bestimmungen rührt daher, dass die einzelnen Würfe allem Anschein nach nicht ganz vom Zufall abhingen; auf dieser Voraussetzung ruht der theoretische Wert 0,020. Das Verhältnis beider Bestimmungen, der Divergenzkoeffizient, beträgt: 1,35, die Ereigniszahlen der einzelnen Serien und damit die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind *übernormal* dispergiert. Berücksichtigt man die Gewichte der Serien, so wird der Divergenzkoeffizient: $\sqrt{\frac{6{,}862}{20} : 0{,}251 \times 0{,}749} = 1{,}35$, gleich wie vorhin.

Bekanntlich zeichnen sich die Verhältnis- und Wahrscheinlichkeitszahlen der Statistik durch einen gewissen Grad von Beständigkeit aus. Das Verfahren von Lexis gibt uns ein ausgezeichnetes Mittel an die Hand, um den Grad dieses für die Statistik charakteristischen Beharrungsvermögens zahlenmässig festzustellen. Die hier auftretenden Wahrscheinlichkeitszahlen begegnen uns fast immer in verschiedenen Serien, hervorgerufen durch die Notwendigkeit, Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Gebietsteilen vorzunehmen. Die Statistik ist das natürliche Anwendungsgebiet der Dispersionstheorie von Lexis. Da die Zahlenverhältnisse der Statistik nicht der Gegenwart, sondern der Zukunft dienen, so muss es von Wert sein, zu wissen, mit welchem Grad von Zuverlässigkeit die Zukunft durch das Mittel der Statistik blossgelegt werden kann.

Um die Bedeutung des behandelten Gegenstandes zum Schlusse rückblickend zu beleuchten, erinnern wir an einen Ausspruch von R. Boeckh: er bezeichnete als den ersten Grundsatz der wissenschaftlichen Statistik, die Häufigkeit der Tatsachen zu messen durch Vergleichung der Zahl der wirklichen mit der Zahl der möglichen Fälle [1].

---

[1] G. von Mayr, Statistik und Gesellschaftslehre, 1. Bd., 2. Aufl., erschienen bei J. C. B. Mohr in Tübingen, S. 162.

Aus der Gegenüberstellung von Wirklichkeit und Möglichkeit ergibt sich auch das Bedürfnis bei Überschriften, welche den Inhalt irgendeiner Darstellung bezeichnen sollen, genügend Raum frei zu lassen zur Bezeichnung anderer Zusammenfassungen aus Teilen dieser Darstellung, falls deren Wünschbarkeit sich geltend macht. Wir denken hier besonders an statistische Tabellen.