Die Ausgleichung der schweizerischen Volkssterbetafel für die Jahre 1920 und 1921

Von Dr. *Ch. Willigens,* Beamter des eidgenössischen statistischen Bureaus in Bern

Seit 1880 sind im Anschluss an die schweizerischen Volkszählungen Volkssterbetafeln aufgestellt worden, von denen die erste, von Dr. Schärtlin berechnet, sich auf die Jahre 1876 bis 1880 bezieht, die übrigen den Zeitraum zwischen je zwei Volkszählungen umfassen.

Die Elemente zu einer Volkssterbetafel sind:

1. die Altersgliederung der Bevölkerung, die durch die Volkszählung gegeben ist;
2. die Sterbefälle nach dem Alter, welche durch die Zivilstandsstatistik geliefert werden;
3. die Wanderungen.

Da die Wanderungen nicht bekannt sind, pflegt man ihren Überschuss, wie er sich aus der Differenz zwischen den Resultaten der Volkszählung einerseits und der Fortschreibung mit Hilfe der Zivilstandsstatistik anderseits ergibt, gleichmässig über die einzelnen Jahre zu verteilen. Durch den Krieg verursachte Wanderungen drängen sich auf wenige Jahre zusammen, ihre Verteilung über die einzelnen Jahre von 1911 bis 1920 müsste je nach dem Alter und Geschlecht verschieden angenommen werden, und bei dem Mangel an den nötigen Anhaltspunkten wäre eine Anfechtung der Resultate immer möglich. Aus diesem Grunde hat man sich entschlossen für die Untersuchung der Sterblichkeitsverhältnisse nur die Jahre 1920 und 1921 zu berücksichtigen.

Die Zahl der Sterbefälle in diesen beiden Jahren betrug:

	männlich	weiblich
1920	27.623	28.369
1921	24.877	24.641
Zusammen	52.500	53.010

Zum Vergleich mögen hier die Zahlen der Sterbefälle, die den wichtigsten Tafeln aus den Erfahrungen von Versicherungsgesellschaften zugrunde liegen, folgen.

1. 60 britische Gesellschaften.

0^{M} 195.771 } (Todesfallversicherungen mit lebenslänglicher Prämienzahlung,
0^{F} 19.905 } männlich und weiblich).

0^{EM} 6.021 } (Gemischte Versicherungen, männlich und weiblich).
0^{EF} 304 }

2. Französische Gesellschaften.

AF. 22.617 (assurés français).

RF. 36.916 (rentiers français).

3. Deutsche Gesellschaften.

M. u. W. I. 47.538 (23 deutsche Gesellschaften, männlich und weiblich vereinigt, mit ärztlicher Untersuchung).

4. 20 englische Gesellschaften. 26.721.

5. 30 amerikanische Gesellschaften. 46.543.

Berücksichtigt man, dass die Sterbefälle bei den Versicherungsgesellschaften sich nun über höhere Alter verteilen und die Kindersterblichkeit nicht in Betracht kommt, dass aber anderseits die Zahl der Sterbefälle der schweizerischen Bevölkerung von 0 bis 29 Jahren für jedes Geschlecht ungefähr 16.000 beträgt, so bleibt doch für die neue schweizerische Volkssterbetafel eine Zahl von Sterbefällen, welche hinter den oben angeführten im allgemeinen nicht zurücksteht. Der eigentliche Nachteil der Beschränkung auf wenige Jahre besteht vielmehr darin, dass abnorme Erscheinungen eines Jahres durch die Ergebnisse der andern Jahre nicht so gut ausgeglichen werden können. Wegen der Grippesterblichkeit des Jahres 1918 musste man darauf verzichten, dieses Jahr zu berücksichtigen. Auch das Jahr 1920 weist eine grössere Zahl von Sterbefällen infolge Grippe auf, welche durch ihre ungleichmässige Verteilung über die verschiedenen Altersjahre zur Unregelmässigkeit der Sterblichkeitssätze beitragen.

Die Zahl der Sterbefälle infolge Grippe betrug.

	männlich	weiblich
1911	508	682
1912	166	167
1918	12.646	8,845
1919	1.772	1.714
1920	1.763	1.755
1921	222	234

Für den Zeitraum 1911 bis 1917 weist das Jahr 1911 die grössten, das Jahr 1912 die kleinsten Zahlen auf. Auf die Einwirkung der Grippe im Jahre 1918 bei den verschiedenen Altersjahren soll in einer Publikation des eidgenössischen statistischen Bureaus näher eingetreten werden.

Vor der eigentlichen Ausgleichung wurde an den Zahlen der Lebenden eine Korrektur vorgenommen, um das versicherungstechnische Alter, d. h. das Alter, welches dem nächstliegenden Geburtstage entspricht, einzuführen, einerlei ob dieser Geburtstag erlebt worden ist oder nicht. Das Verfahren ist von Herrn Direktor Dr. Ney in einer Abhandlung in den «Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker» (12. Heft, 1917, Seite 31 u. f.) dargelegt worden. Die Anwendung dieses Verfahrens hat schon den Einfluss einer ersten Ausgleichung. Die entsprechende Altersgliederung für die Sterbefälle erhält man aus der Bearbeitung der Zivilstandsstatistik.

Die Wanderungen, welche durch die Passvorschriften sowieso stark eingeschränkt waren, wurden nicht berücksichtigt. Als Zahl der Lebenden am ersten Januar 1920 wurde also die Zahl der Lebenden eines Geburtsjahres am 31. Dezember 1920, plus Sterbefälle der Personen dieses Geburtsjahres im Laufe von 1920, angenommen.

Infolge der Unregelmässigkeit der Sterblichkeitssätze schien es gegeben einer analytischen Ausgleichung nach der Makehamschen Formel, unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, den Vorzug zu geben, da auf diesem Wege zufällige Erscheinungen am besten ausgeschaltet werden. Da die angewandte Methode von den bisherigen abweicht, soll sie hier kurz dargelegt werden.

Die Makehamsche Formel gibt die Zahl der Lebenden der Absterbeordnung im Alter x unter der Form:

$$l_x = k\, s^x\, g^{c^x}$$

Bisher wurde die Ausgleichung an den Logarithmen der einjährigen Erlebenswahrscheinlichkeiten vorgenommen und aus diesen die Logarithmen der l_x berechnet. Dieses Verfahren, welches zu einer Zeit in welcher ausschliesslich mit Logarithmen gerechnet wurde seine Berechtigung hatte, bedeutet heute bei der Verbreitung der Rechenmaschinen eher einen Umweg. Aus diesem Grunde wurde nach der Makehamschen Formel die Ausgleichung direkt an den Sterbenswahrscheinlichkeiten vorgenommen, wodurch der Arbeitsaufwand bedeutend verringert wird.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit nimmt die Form an:

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - s\, g^{c^x(c-1)} = 1 - s\, c^{x(c-1)Lg}$$

wobei Lg den natürlichen Logarithmus der Zahl g bedeutet. Ersetzt man die Exponentiale durch ihre Reihenentwicklung, so erhält man:

$$1)\quad q_x = (1-s) - s\left(c^x \frac{(c-1)\,Lg}{1!} + c^{2x}\frac{(c-1)^2\,(Lg)^2}{2!} + c^{3x}\frac{(c-1)^3\,(Lg)^3}{3!} \cdots\right)$$

Nun ist, wie eine angenäherte Berechnung der Konstanten und ein Vergleich mit den Ergebnissen anderer Sterbetafeln zeigt, c grösser als 1 und von dieser Zahl wenig verschieden und g kleiner als 1 und ebenfalls von 1 wenig verschieden. $(c-1)$ und Lg sind also kleine Zahlen, $c-1$ ist positiv und Lg negativ. Dies ist für das ganze Verfahren von der grössten Wichtigkeit, denn die unendliche Reihe 1) hat Glieder, die bei gegebenem x sehr rasch und beständig abnehmen. Beschränkt man sich nun auf eine bestimmte Anzahl von Gliedern zur Berechnung von q_x, so ist nach einem bekannten Satze der begangene Fehler absolut kleiner als das erste vernachlässigte Glied und ist von entgegengesetztem Vorzeichen.

Eine erste angenäherte Bestimmung der Konstanten c, s und g zeigt, dass das Glied mit c^{2x} erst um das Alter von 50 Jahren für die fünfte Dezimalstelle von q_x in Betracht kommt.

In diesem Bereich kann man also

$$q_x = (1 - s) - s\,(c - 1)\,Lg\,c^x = a + b_1\,c^x \tag{2}$$

annehmen.

Am besten geht man von einem empirischen Werte c_0 von c aus und bestimmt die beiden Konstanten a und b_1 mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Im vorliegenden Falle wurden die Alter von 30 bis 55 Jahren für die Männer und 25 bis 55 Jahren für die Frauen berücksichtigt.

Wir bezeichnen von nun an die beobachtete Sterbenswahrscheinlichkeit mit q_x, die ausgeglichene mit y_x. Hat man mit Hilfe der Formel 2) die Konstanten a und b_1 bestimmt, so erhält man aus diesen Werten

$$\left.\begin{aligned} s &= 1 - a \\ Lg &= \frac{-b_1}{(c_0 - 1)(1 - a)} \end{aligned}\right\}$$

und man ist folglich in der Lage, die Koeffizienten der höheren Potenzen von c^x in der Formel 1) zu berechnen. Schreiben wir nun

$$y_x = a + b_1\,c^x - b_2\,c^{2x} + b_3\,c^{3x} - b_4\,c^{4x} + b_5\,c^{5x} \tag{3}$$

so kann man die verschiedenen Potenzen von c^x berücksichtigen, sobald sie für die berechneten Dezimalstellen in Frage kommen. Im vorliegenden Falle kamen die Glieder bis c^{5x} zur Anwendung.

Die Normalgleichungen zur Bestimmung von a und b_1 nach der Methode der kleinsten Quadrate lauten:

$$\left\{\begin{aligned} [1.1]\,a + [1.c_0^x]\,b_1 &= [1.q_x] \\ [1.c_0^x]\,a + [c_0^x.c_0^x]\,b_1 &= [c_0^x.q_x] \end{aligned}\right. \tag{4}$$

wo die Ausdrücke in eckigen Klammern die übliche Bedeutung haben.

Eine kleine Änderung des Wertes von c ist für die Anfangsalter von geringem Einfluss. Der Wert von y_x wird, solange das Glied $b_1\,c^x$ klein bleibt, in der Hauptsache durch die Konstante a bestimmt, mit wachsendem x und c^x nimmt die Bedeutung von b_1 im Gliede $b_1\,c^x$ zu, und wenn die höheren Potenzen von c^x einen Einfluss auf y_x gewinnen, so wächst auch die Bedeutung der Konstanten c selbst. Es gilt nun zu wissen, ob der Ausgangswert c_0 auch so gewählt ist, dass eine befriedigende Anpassung für die Alter, welche bei der Aufstellung der Gleichungen 4) nicht mehr berücksichtigt werden konnten, stattfindet. Zu diesem Zwecke bringen wir an c_0 eine Korrektur an, welche wir mit λ bezeichnen wollen. Wir haben:

$$(c_0 + \lambda)^x = c_0^x \left(1 + \frac{\lambda}{c_0}\right)^x = c_0^x \left(1 + x\frac{\lambda}{c_0}\right)$$

wenn wir höhere Potenzen von $\frac{\lambda}{c_0}$ vernachlässigen. Beschränken wir uns z. B. auf die Alter für welche nur c^{3x} in Betracht kommt, so nimmt das rechte Glied der Formel 3) die Form an

$$5) \qquad a + b_1 c_0^x - b_2 c_0^{2x} + b_3 c_0^{3x} + \frac{\lambda}{c_0} . x \left(b_1 c_0^x - 2 b_2 c_0^{2x} + 3 b_3 c_0^{3x}\right)$$

$$= y_x + \frac{\lambda}{c_0} x . R$$

$$\text{wo } R = b_1 c_0^x - 2 b_2 c_0^{2x} + 3 b_3 c_0^{3x}$$

Wäre die Anpassung eine genaue, so müsste die Summe der Quadrate der Differenzen

$$\left(y_x + \frac{\lambda}{c_0} x R\right) - q_x$$

ein Minimum sein für $1 = 0$. Wenden wir auf diesen Ausdruck die Methode der kleinsten Quadrate an, so erhalten wir die Normalgleichung.

$$6) \qquad \frac{\lambda}{c_0} [xR . xR] = [q_x . xR] - [y_x . xR]$$

Aus der Gleichung 5) erhalten wir einen Wert für $\frac{\lambda}{c_0}$ und somit für λ, der im allgemeinen nicht gleich Null sein wird. Sein Vorzeichen gibt an, ob der gewählte Wert c_0 zu klein oder zu gross war, je nachdem λ positiv oder negativ ist. Man kann nun diesen Wert von λ als Korrektur annehmen und mit dem Werte $c = c_0 + \lambda$ die Konstanten a und b_1 nach den Formeln 4) neu bestimmen. Liefert dann die neue Gleichung 5) einen Betrag für λ, der nicht genügend klein ist, so kann das Verfahren wiederholt werden. Besonders vorteilhaft ist es, wenn man über zwei Werte c_1 und c_2 verfügt, von denen der eine zu klein, der andere zu gross ist. Man kann dann den Mittelwert der beiden als neuen Wert von c annehmen. Auf diese Art hat man es in der Hand, auch für höhere Alter eine gute Anpassung zu erreichen, indem man bei der Berechnung der Konstanten diejenigen Alter berücksichtigt, bei welchen ihr Einfluss am grössten ist.

Die Anpassung ist für die männlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten von 18 bis gegen 80 Jahre befriedigend, für die weiblichen von 25 bis gegen 80 Jahre. Darüber hinaus sind die beobachteten Zahlen sowieso unsicher, wegen der zu kleinen Zahl der beobachteten Sterbefälle.

Für die Alter vom Minimum bei 12 Jahren bis zum Zusammentreffen mit den Zahlen der Makehamschen Formeln sind die Differenzen $\mu_x = y_x - q_x$ mit der Formel

$$\mu_x' = \frac{\mu_{x-2} + \mu_{x-1} + \mu_x + \mu_{x+1} + \mu_{x+2}}{5}$$

ausgeglichen worden, wobei man bestrebt war, von den beobachteten Zahlen möglichst wenig abzuweichen. Nach einer ähnlichen Formel wurden auch die Sterbenswahrscheinlichkeiten von 1 bis 12 Jahren ausgeglichen, um einen regelmässigeren Verlauf dieser Zahlen zu erreichen. Wir geben in folgendem die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten wieder. Weitere Angaben werden in den statistischen Mitteilungen des eidgenössischen statistischen Bureaus zur Veröffentlichung gelangen.

Die Werte der Konstanten der Makehamschen Formel waren:

Männliches Geschlecht	Weibliches Geschlecht
$a = 0{,}003.249.$	$a = 0{,}004.417.$
$b_1 = 0{,}000.129.464.$	$b_1 = 0{,}000.029.126.$
$c = 1{,}09337.$	$c = 1{,}114.$
$k = 99.412{,}5.$	$k = 101.697{,}75.$
$s = 0{,}996.751.$	$s = 0{,}995.588.$
$g = 0{,}998.610.$	$g = 0{,}999.7435.$
$Lg = -\ 0{,}001.3910.$	$Lg = -\ 0{,}000.2565.$

Bei der Ausgleichung anderer Sterbetafeln habe ich später auch höhere Altersjahre berücksichtigt, indem ich aber in den Gleichungen 4) q_x durch $q_x + b_2 c^{2x}$ ersetzt habe. Das Zusatzglied $b_2\, c^{2x}$ wird nämlich durch die kleinen Änderungen von a und b_1 praktisch nicht beeinflusst, und man hat es so in der Hand, bis ungefähr zum 65. Altersjahre hinaufzugehen, wenn man nur zuerst a und b_1 ohne Korrektur von q_x bestimmt hat.

Männliches Geschlecht 1920/21

x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x
0	—	20	0,004.021	40	0,007.850	60	0,030.299	80	0,154.045
1	0,018.507	21	4.093	41	8.279	61	32.786	81	166.902
2	7.665	22	4.172	42	8.749	62	35.498	82	180.737
3	5.305	23	4.258	43	9.263	63	38.453	83	195.651
4	4.673	24	4.352	44	9.824	64	41.675	84	211.540
5	3.737	25	4.455	45	10.412	65	45.198	85	228.607
6	3.161	26	4.565	46	11.078	66	49.023	86	246.844
7	2.768	27	4.694	47	11.806	67	53.188	87	266.288
8	2.585	28	4.825	48	12.602	68	57.728	88	287.006
9	2.378	29	4.972	49	13.470	69	62.653	89	308.964
10	2.201	30	5.133	50	14.445	70	68.169	90	332.203
11	2.161	31	5.309	51	15.454	71	73.834	91	356.718
12	2.095	32	5.502	52	16.588	72	80.175	92	382.496
13	2.156	33	5.712	53	17.790	73	87.047	93	409.505
14	2.259	34	5.942	54	19.174	74	94.504	94	437.692
15	2.650	35	6.193	55	20.647	75	102.587	95	466.629
16	3.013	36	6.468	56	22.256	76	111.342	96	497.296
17	3.530	37	6.769	57	24.012	77	120.836	97	528.509
18	3.895	38	7.098	58	25.928	78	131.065	98	560.486
19	3.955	39	7.457	59	28.013	79	142.132	99	593.088
								100	627.172

Weibliches Geschlecht 1920/21

x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x	x	q_x
0	—	20	0,004.050	40	0,006.603	60	0,023.178	80	0,154.990
1	0,016.185	21	4.219	41	6.852	61	25.293	81	171.417
2	7.636	22	4.378	42	7.130	62	27.645	82	188.588
3	5.149	23	4.639	43	7.439	63	30.258	83	207.277
4	4.190	24	4.806	44	7.784	64	33.160	84	227.603
5	3.528	25	4.850	45	8.168	65	36.382	85	249.643
6	3.229	26	4.899	46	8.595	66	39.959	86	273.446
7	2.840	27	4.954	47	9.072	67	43.926	87	299.077
8	2.542	28	5.016	48	9.588	68	48.341	88	326.567
9	2.297	29	5.084	49	10.176	69	53.225	89	355.924
10	2.038	30	5.160	50	10.831	70	58.635	90	387.129
11	1.978	31	5.244	51	11.559	71	64.626	91	420.119
12	1.937	32	5.339	52	12.371	72	71.255	92	454.800
13	2.126	33	5.444	53	13.273	73	78.584	93	496.166
14	2.486	34	5.561	54	14.278	74	86.680	94	527.599
15	2.809	35	5.691	55	15.396	75	95.617	95	567.299
16	3.142	36	5.837	56	16.640	76	105.469	96	606.872
17	3.426	37	5.999	57	18.024	77	116.319	97	947.070
18	3.713	38	6.179	58	19.562	78	128.240	98	687.646
19	3.886	39	6.380	59	21.274	79	141.344	99	728.872
								100	769.805