Zur Theorie der Sterbetafeln

Von *E. J. Gumbel*, Heidelberg

Inhaltsübersicht

1. Die Absterbeordnung ist eine Tabelle, welche die Zahl derer angibt, die aus einer beliebigen Anzahl von, sagen wir, 100.000 Neugeborenen die 1., 2., x-te, hundertste Wiederkehr ihres Geburtstages erleben. Obwohl die obere Grenze der menschlichen Lebensdauer nicht genau bekannt ist, pflegt man die Absterbeordnung bei einem bestimmten Alter, im folgenden ω genannt, abzuschliessen. Dividiert man diese Zahlenreihe durch die angenommene Ausgangszahl der Neugeborenen, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Neugeborener die x-te Wiederkehr seines Geburtstages erlebt. Diese *Erlebenswahrscheinlichkeit* wird im folgenden mit $l(x)$ bezeichnet. Sie soll nicht nur für die ganzzahligen Altersjahre, sondern für jedes beliebige Alter x definiert sein. Die Reihe dieser zwischen 1 (für $x = 0$) und 0 (für $x = \omega$) liegenden Zahlen wird als Sterbetafel bezeichnet. Mit wachsendem Alter nimmt die Erlebenswahrscheinlichkeit stets ab.

Aus dieser Funktion wird eine Reihe von anderen, biometrisch genannten Funktionen abgeleitet. Zunächst die *Sterbensintensität* $\mu(x)$. Hierunter versteht man die nach der Absterbeordnung während eines kurzen Altersintervalls Verstorbenen dividiert durch das Produkt der am Anfang dieses Altersintervalls Lebenden mal der Länge dieses Intervalls. Nimmt man das Altersintervall unendlich klein, so wird die Sterbensintensität gleich dem negativen logarithmischen Differentialkoeffizienten der Erlebenswahrscheinlichkeit nach dem Alter. Erfahrungsgemäss nimmt die Sterbensintensität bis zum 15. Lebensjahr mit dem Alter ab, von da an ständig zu. Ferner definiert man als *Lebenserwartung* eines x-jährigen, $E(x)$ die Gesamtheit der Jahre, welche die nach der Absterbeordnung x Jahre Alten noch zu verleben haben, dividiert durch die Zahl der x-jährigen. Erfahrungsgemäss nimmt die Lebenserwartung bis zum 3. Jahr mit dem Alter zu, von da an stets ab. Die Lebenserwartung eines Neugeborenen, also der Ausdruck $E(0)$, soll im folgenden als Lebenserwartung schlechthin bezeichnet werden.

Addiert man zur Lebenserwartung eines x-jährigen sein Alter, so soll der so entstehende Ausdruck als *Alterserwartung* bezeichnet werden. Beim Alter 0 fallen Alters- und Lebenserwartung zusammen.

Die Reihe der Erlebenswahrscheinlichkeiten ist gleich dem relativen Altersaufbau einer stationären Bevölkerung. Hieraus folgt, dass für diese Bevölkerung die Lebenserwartung gleich dem mittleren Alter beim Tod, ihr reziproker Wert gleich der Geburten- bzw. allgemeinen Sterbeziffer, der reziproke Wert der Lebenserwartung eines x-jährigen gleich der speziellen Sterbeziffer der über x-jährigen, endlich die Alterserwartung eines x-jährigen gleich dem mittleren Alter der über x-jährigen beim Tod ist. Durch diese Sätze ist die Lebenserwartung in ihren verschiedenen Ausdrucksformen mit den statistischen Eigenschaften der stationären Bevölkerung, dem Ausgangspunkt der theoretischen Bevölkerungsstatistik, eng verbunden. Entsprechend werden wir auf Grund von Sätzen über die Sterbetafel etwas über die lebende Bevölkerung aussagen können.

Vom mittleren Alter beim Tod ist zu unterscheiden das *mittlere Alter der* nach der Absterbeordnung oder innerhalb der stationären Bevölkerung *über dem Alter x Lebenden.* Diese, mit $\bar{x}_{(x)}$ bezeichnete Grösse ist zu definieren als der Mittelwert aller Lebensalter x, wobei die Erlebenswahrscheinlichkeiten als Gewichte verwendet werden. Das mittlere Alter aller Lebenden wird mit $\bar{x}$ symbolisiert und als mittleres Alter schlechthin bezeichnet. Endlich können wir auch den Mittelwert aller Lebenserwartungen bilden, die zu Altern über x gehören und hierbei die Erlebenswahrscheinlichkeiten als Gewichte verwenden. Speziell stellt man so für das Alter 0 auch den Mittelwert aller Lebenserwartungen auf.

Im folgenden werden einige neuere Untersuchungen über diese Grössen und hieraus abgeleitete Sätze aus der Bevölkerungsstatistik in gemeinverständlicher Form dargestellt.

2. Eine mathematische Darstellung der Erlebenswahrscheinlichkeit als Funktion des Alters ist für viele praktische Zwecke, vor allem für die Versicherungsmathematik, vonnöten. Aber die zahlreichen bekannten Sterbetafeln haben uns zur Überzeugung geführt, dass ein Naturgesetz hierfür nicht existiert. Vielmehr pflegt der Verlauf der Sterbetafel für ein ganzes Volk von zahlreichen, historisch und geographisch bedingten, Umständen, die Sterbetafel für spezielle Bevölkerungen sehr stark von den Auswahlmerkmalen, wie Geschlecht, Beruf, Wohnort, also von mathematisch nicht erfassbaren Grössen, abzuhängen.

Die bisherigen Versuche einer analytischen Darstellung von Sterbetafeln gehen aus vom Begriff der Sterbensintensität oder von Betrachtungen, welche eine physiologische Fundierung beanspruchen. Aber die erste Betrachtungsweise, welche in der Gompertz-Makehamschen Formel kulminiert, liefert eine nur vom 15. Altersjahr an gültige Darstellung, während die zweite in ihrer letzten Form zu einer Darstellung führte, die sich als ein bereits seit 100 Jahren bekannter Spezialfall dieser Formel herausstellte. Sie gibt den Verlauf der Sterbetafel erst vom 20. Altersjahr an gut wieder.

Zu einer besseren, natürlich ebenfalls rein formalen Darstellung der Sterbetafel gelangt man, wenn man von der Lebenserwartung eines x-jährigen ausgeht[1]. In einem geeignet gewählten logarithmischen Koordinatensystem lässt sich nämlich die Lebenserwartung des Alters x als lineare Funktion eines reduzierten

[1] Eine Darstellung der Sterbetafel, Biometrika, Bd. 16, H. 3/4, 1924.

Alters betrachten. Diese logarithmisch-lineare Beziehung gilt bereits vom dritten Lebensjahr an. Durch Umkehrung der Beziehung zwischen Lebenserwartung und Erlebenswahrscheinlichkeit lässt sich hieraus eine Formel für die Sterbetafel ableiten. Sie lautet

$$l(x) = \left(\frac{\omega}{\omega - x}\right)^n e^{-\frac{\omega}{E(o)(n-1)}\left[\left(\frac{\omega}{\omega - x}\right)^{n-1} - 1\right]}$$

Ausser den bereits eingeführten Konstanten ω und $E(x)$ tritt hier noch die Konstante n auf. Sie ist die Neigung der erwähnten Geraden. Die drei in der Formel vorkommenden Konstanten besitzen also eine einfache statistische Bedeutung. Damit der Inhalt der berechneten Kurve der Erlebenswahrscheinlichkeiten mit dem beobachteten Inhalt übereinstimme, muss für $E(o)$ die beobachtete Lebenserwartung eines Neugeborenen angesetzt werden.

Aus den oben erwähnten Grenzbedingungen der Erlebenswahrscheinlichkeit und der Bedingung, dass die Zahl der Überlebenden mit dem Alter stets abnehmen muss, erhält man ein Intervall, innerhalb dessen die dimensionslose Konstante n bedingt durch die beiden anderen liegen muss. Das n liegt nämlich zwischen 1 und $\frac{\omega}{E(o)}$. Eine Vergrösserung der Konstanten n bei Gleichbleiben der beiden andern bedeutet eine Verringerung der Sterblichkeit bei den jüngeren und Erhöhung bei den älteren Klassen. Durch die Angabe der drei Konstanten kann man also eine Sterbetafel charakterisieren, während dies durch die Angabe der drei Gompertz-Makehamschen Konstanten nicht möglich ist.

Im Gegensatz zur Gompertz-Makehamschen Formel ist auch die Bestimmung der drei Konstanten ausserordentlich einfach. Auszugehen hat man vom Verlauf der Lebenserwartungen, der in den Sterbetafeln angegeben ist. Setzt man das höchste erreichbare Alter etwa gleich 100 fest, so lässt sich die andere Konstante graphisch ermitteln. Denn es handelt sich dann nur darum, eine Reihe von gegebenen Punkten durch eine Gerade auszugleichen. Im anderen Fall geschieht dies mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

Infolge der Beziehung der Lebenserwartung zu den beobachteten speziellen Sterbeziffern erlaubt die Formel eine rasche Berechnung einer ausgeglichenen Sterbetafel. Übrigens lässt sich zeigen, dass der Gompertz-Makehamschen Formel eine ausserordentlich komplizierte Annahme über den Verlauf der Lebenserwartung zugrunde liegt.

Der hier eingeschlagene Weg gibt einen weiten Bereich von Möglichkeiten. So sind die lineare de Moivresche, die exponentielle und ein weiterer Spezialfall der Gompertz-Makehamschen Sterbetafel und die Willichsche Formel gleichzeitig Spezialfälle unserer Formel. Sie wird auch für Vorgänge, die dem Absterben einer menschlichen Generation ähnlich sind, von Interesse sein.

Unsere Ableitung erhebt keinerlei Prätension, ein Naturgesetz gefunden zu haben, sie beschränkt sich darauf, zu brauchbaren Interpolationsformeln zu führen. Dies wird in der Tat in höherem Masse erreicht, als es bisher zutraf. Denn während die bisherigen Formeln nur vom 15. bzw. 20. Lebensjahr an gelten, gibt die neue Formel, wie man durch Nachprüfung einer Reihe von Sterbetafeln feststellen kann, mit gleicher Genauigkeit den Verlauf vom 3. Lebensjahr an wieder, und ihre Aufstellung geht viel einfacher vor sich.

Die Berechnung des mittleren Alters der über einem bestimmten Alter Lebenden führt auf das unvollständigste Gammaintegral bzw., falls n gleich seiner oberen Grenze, das Exponentialintegral. Nur bei gewissen, nur theoretisch interessanten, Spezialfällen steht das mittlere Alter der Lebenden in einem einfacheren Zusammenhang mit der Lebenserwartung.

3. Die Frage nach der Grössenbeziehung zwischen Lebenserwartung und mittlerem Alter der Lebenden lässt sich auch ohne Annahme einer speziellen analytischen Formel für die Absterbeordnung untersuchen [1]). Man geht hierbei aus von der Erfahrungstatsache, dass die Absterbeordnungen für die heutigen sogenannten Kulturstaaten innerhalb eines bestimmten Bereichs verlaufen, der durch drei Gerade begrenzt wird. Die untere Grenze ist eine Absterbeordnung, bei der 35 % der Neugeborenen sofort stirbt. Der Rest nimmt linear mit dem Alter ab, bis bei 85 Jahren die Generation ausgestorben ist. Die obere Grenze besteht aus 2 Stücken. Das eine ist eine lineare Absterbeordnung, bei der das Grenzalter 150 Jahre wäre. Sie gilt von der Geburt an bis zum 60. Jahr. Von da an gilt eine zweite lineare Absterbeordnung, so dass die Generation mit 100 Jahren abgestorben ist. Praktisch gesprochen bedeuten diese Grenzen die Annahme, dass die Lebenserwartung eines Neugeborenen zwischen 27,6 und 60 Jahren liegt. Wie bekannt, ist dies für die Lebenserwartung der heutigen Kulturländer erfüllt. Mit Hilfe dieser Grenzen kann man für eine beliebige numerisch gegebene Sterbetafel zwei fiktive Sterbetafeln konstruieren, welche die Eigenschaft besitzen, dass bei der einen das mittlere Alter grösser, bei der andern kleiner ist als bei der wirklichen. Dagegen ist die Lebenserwartung für die beiden fiktiven Sterbetafeln die gleiche wie die der gegebenen. Durch Mittelbildung kann man dann das mittlere Alter der Lebenden als Funktion der Lebenserwartung ausdrücken. Die so abgeleitete Formel lautet:

$$\bar{x} = 43{,}17 - \frac{412{,}65}{E_{(o)}}$$

Kennen wir also die Lebenserwartung, so können wir hieraus das mittlere Alter berechnen. Um ein Mass für die Güte dieser Formel zu haben, wird man das mittlere Alter der nach der Absterbeordnung Lebenden direkt durch Multiplikation jedes Alters mit seiner Besetzung in der stationären Bevölkerung und Summation über alle Alter berechnen und mit der Formel vergleichen. Die nach dieser direkten aber umständlichen Methode berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle als «beobachtet», die nach der Formel berechneten als «berechnet» bezeichnet. Die Tabelle ist mit der Genauigkeit des Rechenschiebers berechnet.

---

[1]) Vgl. Eine allgemeine Eigenschaft der Sterbetafel, Zeitschrift für die ges. Versicherungswissenschaft, Bd. 24, H. 4, 1924.

Sterbetafel	Lebenserwartung	Beobachtetes mittleres Alter	Berechnetes Alter der Lebenden
Indien m 1901/10	22,59	24,9	24,9
Deutsches Reich m 1871/81 . .	35,58	31,2	31,3
Deutsches Reich m 1891/1900 .	40,56	32,4	32,9
Frankreich m 1898/1903	45,74	33,4	34,1
Schweden m 1891/1900	50,94	35,1	35,2
Australien m 1901/10	58,84	35,7	36,2

Die Formel stimmt also mit der Beobachtung sehr gut überein, da die Fehler höchstens 2 % betragen. Da nun die direkte Berechnung des mittleren Alters der Lebenden ausserordentlich mühevoll ist, erspart die Kenntnis dieser Formel eine Menge Arbeit. Darüber hinaus erlaubt sie uns analytische Aussagen über Eigenschaften der Sterbetafel. So sehen wir empirisch, dass in beinahe allen Fällen die Lebenserwartung grösser ist als das mittlere Alter der Lebenden. Nur bei der ungünstigen indischen Sterbetafel gilt das Umgekehrte. Die Formel aber sagt uns, dass für alle Sterbetafeln, für die die Lebenserwartung grösser als 28,09 Jahre, die Lebenserwartung grösser sein muss als das mittlere Alter der Lebenden. Bezeichnet man diejenigen Sterbetafeln, bei denen die Lebenserwartung grösser ist als 28,09 Jahre — und dies sind alle für die heutigen Kulturstaaten gültigen —, als «günstig», so lässt sich der Satz in folgender Form aussprechen: *In einer stationären Bevölkerung mit günstiger Absterbeordnung ist die Lebenserwartung* oder das Durchschnittsalter aller Sterbenden *grösser als das Durchschnittsalter aller Lebenden*. Differenzieren wir das mittlere Alter nach der Lebenserwartung, so erhalten wir: Das mittlere Alter der Lebenden wächst mit der Lebenserwartung. Da nun erfahrungsgemäss die Lebenserwartung der Frau grösser ist als die des Mannes, so folgt, dass auch das mittlere Alter der Frau grösser ist als das des Mannes.

Übrigens gibt es noch eine andere graphische Betrachtung [1]). Sie führt auf folgenden Satz: «Wenn zu einer gegebenen Absterbeordnung sich eine neue mit gleicher Lebenserwartung konstruieren lässt, bei der $1/_3$ der Geborenen sofort stirbt, während der Rest linear mit dem Alter abnimmt, bis die Generation bei einem Alter gleich der dreifachen Lebenserwartung ausgestorben ist und wenn diese Gerade die gegebene Absterbeordnung nur in einem Punkte schneidet, so ist die Lebenserwartung grösser als das mittlere Alter der Lebenden.» Die Bedingungen, damit diese Konstruktion gelingt, sind nicht ganz identisch mit den oben formulierten, aber praktisch kommt es auch darauf hinaus, dass die Tafel günstig sei. Wenn die Lebenserwartung zu gering ist, so schneidet die Gerade die Absterbeordnung zweimal und die Konstruktion misslingt. Die Konstruktion gelingt bei allen heutigen Sterbetafeln der sogenannten Kulturstaaten und genau wie oben gilt für Indien die umgekehrte Beziehung.

4. Bei beiden Methoden sind geometrische Annahmen über die Natur der Sterbetafel gemacht worden. Es interessiert, diesen Satz auch analytisch zu begründen; ferner diesen für das Alter Null geltenden Satz auf ein beliebiges

[1]) Vgl. Eine Eigenschaft der Sterbetafel, Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik, Bd. 4, S. 349, 1924.

Alter x zu erweitern. Hierzu braucht man eine Beziehung zwischen der Lebenserwartung eines x-jährigen und dem mittleren Alter der über x-jährigen. Sie lautet: *Das mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden ist gleich diesem Alter plus dem Mittelwert der Lebenserwartungen, die zu Altern über x gehören.* Speziell gilt also: Das mittlere Alter aller Lebenden ist gleich dem Mittelwert aller Lebenserwartungen.

Nimmt man nun an, dass die Lebenserwartung von dem Alter x an stets mit dem Alter fällt (gleich bleibt, wächst), so ist der Mittelwert der Lebenserwartungen, die zu Altern über x Jahre gehören, stets kleiner (gleich, grösser) als die Lebenserwartung eines x-jährigen selbst. Wenn man zu beiden Grössen das Alter x addiert, so erhält man: *Das mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden ist kleiner* (gleich oder grösser) *als die Alterserwartung eines x-jährigen, falls die Lebenserwartung vom Alter x an stets mit dem Alter fällt* (gleich bleibt, wächst). Die Erweiterung unseres für die Lebenserwartung eines Neugeborenen gültigen Satzes auf ein beliebiges Alter führt also auf die Alterserwartung.

Nach einem von L. von Bortkiewicz stammenden Verfahren [1]) lässt sich auch folgender Satz beweisen: *Das mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden ist kleiner* (gleich, grösser) *als die Alterserwartung eines x-jährigen, falls die Sterbensintensität vom Alter x an stets mit dem Alter wächst* (gleich bleibt, fällt).

Diese Rolle der Sterbensintensität bedeutet nur scheinbar eine neue Bedingung. Denn es lässt sich zeigen, dass der Verlauf der Lebenserwartungen von dem der Sterbensintensitäten abhängt. Zu diesem Behufe drückt man die Lebenserwartung für ein bestimmtes Alter durch die Sterbensintensität aus und bildet die Differenz der Lebenserwartungen für zwei Alter. Dann ergibt sich:

Die Lebenserwartung wird von einem bestimmten Alter an stets fallen (gleich bleiben, wachsen), *wenn die Sterbensintensität von diesem Alter an stets mit dem Alter wächst* (gleich bleibt, fällt). In allen drei Sätzen interessieren die eingeklammerten beiden Fälle praktisch nicht.

Alle drei Sätze lassen sich nur im zweiten Fall umkehren. So erhält man: Das mittlere Alter der über ein bestimmtes Alter Lebenden ist dann und nur dann gleich der Alterserwartung, oder die Lebenserwartung ist dann und nur dann konstant, wenn die Sterbensintensität konstant ist. Durch diese Bedingung ist der analytische Charakter der Sterbetafel festgelegt. Sie ist nur erfüllt, wenn die Erlebenswahrscheinlichkeit eine Exponentialfunktion des Alters ist. Praktisch kommt aber eine so einfache Absterbeordnung beim Menschen nicht vor.

In den beiden andern Fällen sind die Bedingungen notwendig, aber nicht hinreichend. Daher lässt sich der interessante erste Fall, wonach die Lebenserwartung für alle Alter fällt und das mittlere Alter der über einem bestimmten Alter Lebenden kleiner ist als die Alterserwartung, wenn die Sterbensintensität für alle Alter wächst, nicht umkehren. Es kann sehr wohl die Lebenserwartung für gewisse Alter steigen und trotzdem das mittlere Alter der Lebenden stets kleiner sein als die Alterserwartung. Dies gibt die Möglichkeit dafür, dass, wie praktisch oben gezeigt, bei den heutigen Sterbetafeln das mittlere Alter aller Lebenden kleiner ist als die Lebenserwartung eines Neugeborenen, obwohl keine

[1]) Die mittlere Lebensdauer, Jena 1893, S. 77.

dieser Bedingungen für das Alter 0 erfüllt ist. Und dass a fortiori dieser Satz auch für die Alter 0 bis zum 3. Lebensjahre gilt.

Während demnach die obere Grenze für das mittlere Alter der Lebenden theoretisch nur unter einer bestimmten Bedingung gilt, lässt sich eine untere Grenze aufstellen, welche ohne weiteres gilt. Sie lautet: *Das mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden ist stets grösser als das Alter x plus der halben Lebenserwartung eines x-jährigen.* Kombiniert man beide Sätze, so gilt mit der erwähnten Einschränkung speziell: *Das mittlere Alter aller Lebenden liegt zwischen der halben und der ganzen Lebenserwartung eines Neugeborenen.*

Die Grenzen für das mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden wurden an der Sterbetafel des Deutschen Reiches 1891—1900 nachgeprüft. Zuerst wurde der Mittelwert der Lebenserwartungen und damit nach dem ersten Satz dieses Abschnitts das mittlere Alter der Lebenden mit Hilfe einer Integrationsformel angenähert berechnet. Der Mittelwert der Lebenserwartungen ist für alle Alter kleiner als die Lebenserwartung selbst. Er fällt ziemlich linear und wird bei 100 Jahren natürlich angenähert gleich 0. Das mittlere Alter der Lebenden geht vom gleichen Wert für das Alter 0 aus und geht angenähert linear nach 100. Es liegt zwischen den beiden Grenzen und nähert sich etwas mehr der unteren. Das mittlere Alter der Lebenden ist zuerst kleiner als die Lebenserwartung, dann schneiden sich beide Kurven etwa beim 17. Jahr, und von da an ist das mittlere Alter natürlich stets grösser als die Lebenserwartung. Unsere Sätze über die Lage der Lebenserwartung sind also bestätigt.

5. Es interessiert, diese Beziehungen für eine Absterbeordnung von k verbundenen Gleichaltrigen zu erweitern. Denn sehr häufig werden Versicherungen in der Weise abgeschlossen, dass die Versicherungssumme beim Tod eines der verbundenen Leben fällig ist.

Die Aufstellung einer Sterbetafel für k verbundene Gleichaltrige beruht auf der Fiktion, dass man eine grosse Zahl von je k gleichzeitig Geborenen während ihres ganzen Lebens beobachtet und registriert, wie lang sie sämtlich am Leben sind. Als Absterben wird die Auflösung dieser Gemeinschaft durch den Tod auch nur eines dieser k verbundenen Lebenden bezeichnet. Demnach versteht man unter der *Sterbetafel für k verbundene Gleichaltrige* die Reihe der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass k Neugeborene *zusammen* den x-ten Geburtstag erleben.

Zunächst wird man die üblichen biometrischen Funktionen für diesen erweiterten Fall definieren. Zur Unterscheidung werden wir die bisher betrachteten Funktionen für die einfache Absterbeordnung durch den Zusatz einfach bezeichnen. Wo keine Verwechslungen möglich, wird im folgenden das schleppende Wort x-jährig weggelassen.

Die *Sterbensintensität* für k verbundene Gleichaltrige wird wieder der negative logarithmische Differentialkoeffizient der Erlebenswahrscheinlichkeit für k verbundene Gleichaltrige nach dem Alter. Die Lebenserwartung für k verbundene gleichaltrige x-jährige $E_{(x,k)}$ ist die Gesamtheit der Jahre, welche eine Gemeinschaft vom Alter x nach der Absterbeordnung *zusammen* noch zu verleben hat, dividiert durch die Zahl der nach der Absterbeordnung x-jährigen Verbundenen.

Entsprechend wird man die Lebenserwartung für k verbundene Neugeborene $E_{(o,k)}$ die Alterserwartung für k verbundene Gleichaltrige und den Mittelwert der Lebenserwartungen definieren.

Endlich wird das mittlere Alter von k verbundenen gleichaltrigen x-jährigen $\bar{x}_{(x,k)}$ zu definieren sein als der mit den Erlebenswahrscheinlichkeiten für k verbundene x-jährige als Gewichten berechnete Mittelwert aller Lebensalter über x.

Es interessiert nun, diese neuen Funktionen auf die einfachen Funktionen zu reduzieren. Die Erlebenswahrscheinlichkeit für k verbundene Gleichaltrige ist gleich der k-ten Potenz der einfachen Erlebenswahrscheinlichkeit. Auch für die Sterbensintensität ist diese Reduktion möglich: die Sterbensintensität für k verbundene Gleichaltrige ist gleich dem k-fachen Wert der einfachen Sterbensintensität. Dieser Satz wird in der Versicherungsmathematik häufig verwendet. Dagegen existieren solche einfache Reduktionsformeln weder für die Lebenserwartung noch für das mittlere Alter. Der natürliche Weg zur Berechnung der Lebenserwartung für k verbundene Gleichaltrige würde darin bestehen, jeweils die k-ten Potenzen der Erlebenswahrscheinlichkeiten zu bilden und mit ihnen dann wie mit den einfachen Erlebenswahrscheinlichkeiten zu verfahren. Diese Ableitung erlaubt aber keine allgemeine Reduktion auf die einfache Lebenserwartung. Dazu kommt, dass die Bildung dieser Ausdrücke praktisch ausserordentlich mühevoll wäre. Um dieses komplizierte Verfahren zu vermeiden, wird man einen speziellen Ansatz für die Lebenserwartung, nämlich den logarithmisch-linearen, zugrunde legen und hierfür die Reduktion durchführen. Man bekommt so eine Reduktionsformel, in der allerdings eine unvollständige Gammafunktion auftritt, zu deren numerischer Auswertung die von Pearson herausgegebenen Tabellen notwendig sind.

Die Formel, welche die Lebenserwartung für k verbundene x-jährige auf die einfache Lebenserwartung reduziert, lautet

$$E_{(x,k)} = \left(\frac{E_{(x)}\,(n-1)}{k\cdot\omega}\right)^{k} \left(\frac{E_{(o)}}{k}\right)^{\frac{k-1}{n-1}} \left(\frac{n-1}{\omega}\right)^{\frac{k-n}{n-1}} e^{\frac{k(\omega-x)}{(n-1)\,E(x)}}\ \Gamma\left(\frac{n(k-1)}{n-1}+1 : \frac{k\,(\omega-x)}{(n-1)\,E_{(x)}}\right)$$

wobei die zweite Variable in der Gammafunktion die untere Grenze des Integrals bedeutet. Die hier auftretenden Konstanten sind bereits sämtlich erklärt. Praktisch wird man zur Berechnung der Lebenserwartung für k verbundene Gleichaltrige zuerst die logarithmisch-lineare Formel an die Reihe der einfachen Lebenserwartungen anzupassen haben, um die Grössen $n, E_{(o)}, \omega$ zu erhalten. Eine gewisse Ungenauigkeit tritt dadurch auf, dass die logarithmisch-lineare Formel tatsächlich nur für die Alter über 3 Jahre gut passt. Daher passt auch die Formel, welche die Lebenserwartung für k verbundene Leben auf die einfache Lebenserwartung reduziert, nur für die Alter über dem dritten Jahre. Trotz dieser Beschränkungen wird die Formel von Interesse sein, schon weil keine andere existiert. Somit ist die Lebenserwartung für k verbundene Gleichaltrige auf die einfache Lebenserwartung zurückgeführt.

Die Zurückführung des mittleren Alters für k verbundene Gleichaltrige vom Alter x auf das einfache mittlere Alter der über dem Alter x Lebenden interessiert nicht, weil dieses Alter in den üblichen Sterbetafeln nicht angegeben ist, weswegen wir eine solche Formel praktisch doch nicht verwenden könnten. Dagegen ist stets die einfache Lebenserwartung für das Alter x angegeben. Wir werden deswegen versuchen, das mittlere Alter für k verbundene, über dem Alter x lebende, Gleichaltrige auf die Lebenserwartung für k verbundene Lebende zu reduzieren. Als Spezialfall erhalten wir dann eine Formel, welche die Neuberechnung des mittleren Alters der Lebenden aus den Originaldaten überhaupt überflüssig macht, da sie diese Grösse als Funktion der Lebenserwartung gibt. Hierzu müssen wir die oben für die einfache Sterbetafel abgeleiteten Sätze auf unseren Fall erweitern.

Zunächst gilt wieder der Satz: Das mittlere Alter für k verbundene über dem Alter x lebende Gleichaltrige ist gleich dem Alter x plus dem Mittelwert der Lebenserwartungen für k verbundene gleichaltrige x-jährige. Ferner gilt die obere Grenze: wenn die einfache Lebenserwartung von einem bestimmten Alter x an eine stets fallende Funktion des Alters ist, oder wenn die einfache Sterbensintensität von einem bestimmten Alter x an eine stets wachsende Funktion des Alters ist, so ist das mittlere Alter für k verbundene Gleichaltrige von diesem Alter an stets kleiner als die Alterserwartung. Endlich gilt wieder bedingungslos die untere Grenze: Das mittlere Alter für k verbundene Gleichaltrige über dem Alter x Lebende ist stets grösser als das Alter x plus der halben Lebenserwartung von k verbundenen Gleichaltrigen über dem Alter x Lebenden.

Diese Grenzen erlauben uns, das mittlere Alter von k verbundenen Gleichaltrigen durch die entsprechende Lebenserwartung auszudrücken. Das Problem lautet, den Mittelwert der Lebenserwartungen auf die Lebenserwartung zu reduzieren. Da dieser Mittelwert zwischen der halben und der ganzen Lebenserwartung liegt, wird man ihn in grober Abschätzung gleich $^3/_4$ der Lebenserwartung anzusetzen haben.

Eine feinere Abschätzung[1]) erhält man, indem man vorübergehend eine vereinfachende Fiktion zu Hilfe nimmt. Man betrachte die Lebenserwartung als lineare Funktion des Alters. Dann ist auch das mittlere Alter der Lebenden in bezug auf das Alter linear. Somit kann man das mittlere Alter als ein gewogenes arithmetisches Mittel aus seinen beiden Grenzen auffassen und die zugehörigen Gewichte ermitteln. Sie hängen von der Lebenserwartung des Neugeborenen und der Zahl der verbundenen Leben, nicht aber vom Alter ab. Nun verbessere man unsere Fiktion, indem man zur logarithmisch-linearen Formel übergeht und diese Gewichte auf den allgemeinen Fall überträgt. Da hierfür der Logarithmus der Lebenserwartungen eine lineare Funktion des reduzierten Alters ist, so wird man das mittlere Alter der Lebenden als gewogenes geometrisches Mittel aus seinen beiden Grenzen ansetzen dürfen. So bekommt man eine Formel, die das mittlere Alter $\bar{x}_{(x,k)}$ von k verbundenen Gleichaltrigen vom Alter x als lineare Funktion der Lebenserwartung für k verbundenes Leben gibt. Sie lautet:

[1]) Vgl. Lebenserwartung und mittleres Alter der Lebenden, Zeitschrift für die ges. Versicherungswissenschaft, Band 26, H. 1, 1925.

$$\bar{x}_{(x,\,k)} = x + E_{(x,\,k)}\, 2^{-\frac{2\,E(o)}{k\omega + (2-k)\,E(o)}}$$

Dies ist natürlich nur eine erste Annäherungsformel. Sie enthält in sich die Annahme, dass die Sterbensintensität stets wächst, und die weitergehende Annahme der Gültigkeit der logarithmisch-linearen Formel für die Lebenserwartung. Da aber diese für die Säuglingssterblichkeit nicht gilt, darf die Formel nur zu Abschätzungen verwendet werden. Trotz dieser Nachteile ist sie von Wichtigkeit, da bisher überhaupt keine solche Formel existierte. Mit Hilfe der obigen Formel, welche die Lebenserwartung für k verbundene Gleichaltrige als Funktion der einfachen Lebenserwartung gibt, können wir somit das mittlere Alter von k verbundenen Gleichaltrigen durch die einfache Lebenserwartung ausdrücken.

Diese Formel ist bereits für die einfache Absterbeordnung von Interesse, da der für die logarithmisch-lineare Formel abgeleitete exakte Ausdruck auf die schwer handliche, unvollständige Gammafunktion führt. Auf Grund der für die einfache Absterbeordnung spezialisierten Formel wurde das mittlere Alter der Lebenden für die Sterbetafel des Deutschen Reiches m. 1891/1900 berechnet. Andererseits wurde diese Grösse auch entsprechend unserer Definition berechnet, indem man mit Hilfe der Trapezformel den Mittelwert aller Lebenserwartungen bildete, woraus man durch Addition des Alters das mittlere Alter erhält. Doch ist dieser Weg sehr umständlich. Zwischen der Beobachtung und dieser Berechnung ergab sich vom dritten Altersjahr an eine ausgezeichnete Übereinstimmung. Die sämtlichen Fehler sind geringer als ein Prozent. Die nicht befriedigende Übereinstimmung für die jüngsten Alter ist verständlich. Auch für die Berechnung des mittleren Alters aller Lebenden als Funktion der Lebenserwartungen ist diese Formel nicht gut geeignet. Für diesen Zusammenhang wird man die früher angegebene Näherungsformel wählen.

5. Abgesehen von ihrer bereits erwähnten Bedeutung für die Versicherungsmathematik sind diese Beziehungen für die formale Bevölkerungstheorie von Wichtigkeit. Als einfachsten Typus kann man eine fiktive Bevölkerung betrachten [1]), welche durch folgende Eigenschaften definiert ist: 1. die Geburtendichtigkeit sei eine lineare Funktion der Zeit, 2. die Bevölkerung ist geschlossen, 3. die Absterbeordnung ist konstant.

Dann ist die Zahl der jährlich Geborenen, die Bevölkerung und die Zahl der jährlich Gestorbenen eine lineare Funktion der Zeit, der Geburtenüberschuss gleich dem konstanten jährlichen Geburtenzuwachs mal der Lebenserwartung. Das Durchschnittsalter der Gestorbenen und das mittlere Alter der Lebenden ist in der linear zunehmenden Bevölkerung, auf die wir uns im folgenden beschränken, kleiner als in der stationären und nimmt mit der Zeit zu. Die Geburtenziffer ist grösser als in der stationären und nimmt im Laufe der Zeit ab. Die Sterbeziffer ist kleiner als in der stationären und nimmt im Laufe der Zeit zu. Dieser Satz beruht speziell auf der Eigenschaft, dass die Lebenserwartung eines Neugeborenen grösser ist als das mittlere Alter der

[1]) Vgl. Statistische Eigenschaften einer linear wachsenden Bevölkerung. Metron, Bd. 4 Nr. 2, 1924.

Lebenden. Trotz abnehmender Geburtenziffer und zunehmender Sterbeziffer wird die Bevölkerung linear wachsen. Diese Möglichkeit wird in der üblichen populärstatistischen Literatur meistens übersehen. Die Sterbeziffer wird kleiner sein als der reziproke Wert des Durchschnittsalters der Gestorbenen. Die jüngeren Altersklassen sind stärker, die älteren schwächer besetzt als in der stationären Bevölkerung. Die stärkere Besetzung der jüngeren Klassen hat die Tendenz, die Sterbeziffern zu erhöhen, die schwächere der älteren Klassen, sie zu erniedrigen. Und diese Tendenz ist, wie man sieht, stärker. Der Anteil der älteren Altersklassen nimmt zu, der der jüngeren ab. Die Fruchtbarkeitsziffer nimmt im Laufe der Zeit ab. Der Anteil der Frauen an der Gesamtbevölkerung wird kleiner sein als in der stationären Bevölkerung und wird im Laufe der Zeit zunehmen. Auch zum Beweis dieses Satzes wird die Beziehung von Lebenserwartung und mittlerem Alter der Lebenden benötigt. Eine stärker wachsende Bevölkerung wird ein geringeres mittleres Alter beim Tode, ein geringeres mittleres Alter der Lebenden, eine grössere Geburtenziffer, eine geringere Sterbeziffer, einen grösseren Unterschied des Altersaufbaus gegenüber dem Altersaufbau der stationären Bevölkerung und einen schwächeren Frauenanteil haben als eine schwächer wachsende. Die gesamte Struktur dieses Bevölkerungstypus strebt asymptotisch der Struktur der stationären Bevölkerung zu.

Das Wachstum der Bevölkerung setzt also die Sterbeziffer herab, d. h. wenn die Bevölkerung langsamer wächst, muss die Sterbeziffer steigen. Man sieht an diesem Beispiel, dass ceteris paribus bei fallender Geburtenziffer die Sterbeziffer schon ex definitione steigen müsste. Das ist übrigens auch deswegen klar, weil die einer Sterbeziffer von etwa 10 % entsprechende Lebenserwartung eines Neugeborenen von 100 Jahren unmöglich ist. Da wir jetzt, in den Zeiten fallender Geburtenziffer, ein Steigen der Sterbeziffer nicht beobachten, so bedeutet dies, dass die Sterbeziffer praktisch ebenfalls gefallen ist.

So führen Untersuchungen über Sterbetafeln zu interessanten Sätzen der Bevölkerungstheorie.