Altersaufbau und Sterblichkeitsmessung

Von Dr. *E. Zwinggi*, Bern

I.

In der vergleichenden Sterblichkeitsmessung werden oft die Sterbefälle bezogen auf die Gesamtheit, aus der sie hervorgegangen sind. Wir erhalten so eine Verhältniszahl, die besagt, dass z. B. von 1000 Personen einer bestimmten Altersgruppe soundsoviele infolge einer bestimmten Todesursache ausscheiden. Dass dieses rohe Mass der Sterblichkeit, die *Sterbeziffer*, unter Umständen ein ganz ungenügendes Mass der Sterblichkeit sein kann, geht aus dem Umstande hervor, dass eben die Sterblichkeit eine empfindliche Funktion des Alters ist. In zwei Beständen von gleichem Umfange, die überdies noch die gleichen Jahrgänge umfassen sollen, werden dennoch die Sterbeziffern verschieden sein, je wie die Verteilung nach den einzelnen Altern vorgenommen ist. Das relativ stärkere Vorhandensein der ältern Elemente kann in einer dieser Gesamtheiten eine Erhöhung der Sterbeziffer hervorrufen, ohne dass sich aber die Sterblichkeitsverhältnisse verschlechtert hätten.

Wir werden im folgenden den Einfluss der Altersverteilung auf die Grössenverhältnisse der Sterbeziffer näher untersuchen. Dabei werden wir zuerst die mathematischen Beziehungen herleiten, zur bessern Verdeutlichung aber im Anschluss daran Zahlenbeispiele angeben.

Die auf ihre Sterblichkeitsverhältnisse zu untersuchende Gesamtheit habe zur Zeit t den Umfang $B\binom{z+n}{z}$; sie umfasse die Alter z bis $z+n$. Innerhalb des Bestandes sei die Altersverteilung gegeben durch eine Funktion $L_x^{(t)}$, derart, dass

$$B_t\binom{z+n}{z} = \sum_{z}^{z+n}{}_x\, L_x^{(t)} \tag{1}$$

$L_x^{(t)}$ ist aufzufassen als die Zahl der x-Jährigen zur Zeit t. Wir schränken nun unsere Untersuchungen keineswegs ein, wenn wir annehmen, dass die x-Jährigen die Überlebenden der vor $x-z$ Jahren eingetretenen z-Jährigen sind, d. h.

$$L_x^{(t)} = L_z^{(t-x+z)} \cdot p_z\,(x-z) \tag{2}$$

Von diesen x-Jährigen scheiden jährlich aus

$$L_x^{(t)} \cdot q_x = L_z^{(t-x+z)} \cdot p_z\,(x-z) \cdot q_x \tag{3}$$

Als Sterbeziffer definieren wir nun:

$$T_t\binom{z+n}{z} = \frac{\sum\limits_{z}^{z+n} {}_x\, L_z^{(t-x+z)} \cdot p_z\,(x-z) \cdot q_x}{\sum\limits_{z}^{z+n} {}_x\, L_z^{(t-x+z)} \cdot p_z\,(x-z)} \tag{4}$$

Wir beziehen die Zahl der Sterbenden auf die anfängliche Bestandesgrösse, ebenso hätte sie auf die mittlere bezogen werden können.

Die Sterbeziffer erscheint in unsern Formeln als Funktion von $L_z^{(t)}$, also der Erneuerung. Ebenso wird der Altersaufbau, der z. B. durch den Quotienten

$$\frac{L_x^{(t)}}{B_t\binom{z+n}{z}}$$

gekennzeichnet ist, Funktion der Erneuerung sein. Es genügt also, um den Einfluss der Alterszusammensetzung auf die Sterbeziffer zu erfassen, die verschiedenen Erneuerungsformeln zu prüfen. Aus der Mannigfaltigkeit dieser Beziehungen beschränken wir uns auf die konstante Erneuerung und auf die Erneuerung nach einer geometrischen Progression.

$$L_z^{(t)} = K \tag{5}$$

$$L_z^{(t)} = K \cdot c^t \tag{6}$$

Die Einsetzung dieser Erneuerungsformeln in (1) würde ergeben, dass auch die Bestandesgrösse einem gleichen Zunahmegesetz gehorcht. Damit wird die Sterbeziffer in direkten Zusammenhang mit der Bestandesvermehrungsformel gebracht. Dieses Ergebnis wird uns später gestatten, interessante Rückschlüsse zu ziehen.

Wir spezialisieren den Ausdruck (4) für die Sterbeziffer auf die beiden genannten Erneuerungsformeln. Die konstante Erneuerung gebe eine Sterbeziffer, die durch den Index (+) gekennzeichnet ist. Die Sterbeziffer T_+ hat uns also Auskunft über die Sterblichkeitsverhältnisse zu geben, wenn sich der Bestand in einem stationären Zustande befindet. Analog bezeichne (—) den Zustand, wenn sich der Bestand nach einer geometrischen Progression vermehrt.

Die entsprechenden Formeln lauten nach Verwendung von (5) und (6):

$$T_+\binom{z+n}{z} = \frac{\sum\limits_{z}^{z+n} {}_x\, l_x \cdot q_x}{\sum\limits_{z}^{z+n} {}_x\, l_x} \tag{7}$$

$$T_-\binom{z+n}{z} = \frac{\sum\limits_{z}^{z+n} \!{}_x\, j^x \cdot l_x \cdot q_x}{\sum\limits_{z}^{z+n} \!{}_x\, j^x \cdot l_x} \tag{8}$$

wenn wir gesetzt haben:

$$\frac{1}{c} = j$$

$$p_z\,(x - z) = \frac{l_x}{l_z} \tag{9}$$

Zwei Punkte bedürfen der nähern Untersuchung. Einmal der allgemeine Verlauf von T bei festem z und variablem n. Dann die Beziehung von T_+ zu T_-. Die erste Frage sei vorweggenommen.

Da
$$l_{x+n} = l_x \cdot p_x \cdot p_{x+1} \ldots p_{x+n-1} \tag{10}$$
wird (7) ausgeschrieben lauten:

$$T_+\binom{z+n}{z} = \frac{q_z + p_z \cdot q_{z+1} + p_z \cdot p_{z+1} \cdot q_{z+2} + \,..\, p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+n-1} \cdot q_{z+n}}{1 + p_z + p_z \cdot p_{z+1} + \ldots\ldots\ldots p_z \cdot p_{z+1} \,..\, p_{z+n-1}} \tag{11}$$

der Übergang zu $n + 1$ ergibt:

$$T_+\binom{z+n+1}{z} = \frac{q_z + \ldots . p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+n-1} \cdot q_{z+n} \left(1 + p_{z+n} \cdot \dfrac{q_{z+n+1}}{q_{z+n}}\right)}{1 + \ldots\ldots p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+n-1} \cdot (1 + p_{z+n})} \tag{12}$$

Abkürzend bezeichne:

$$\begin{aligned} a &= q_z + p_z \cdot q_{z+1} + \ldots . p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+n-2} \cdot q_{z+n-1} \\ b &= p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+n-1} \cdot q_{z+n} \\ c &= 1 + p_z + \cdot\cdot\; p_z \cdot p_{z+1} \ldots\ldots p_{z+n-2} \\ d &= p_z \cdot p_{z+1} \ldots\ldots p_{z+n-1} \end{aligned} \tag{13}$$

Alsdann wird:

$$T_+\binom{z+n}{z} = \frac{a + b}{c + d} \tag{14}$$

$$T_+\binom{z+n+1}{z} = \frac{a + b\left(1 + p_{z+n} \cdot \dfrac{q_{z+n+1}}{q_{z+n}}\right)}{c + d\,(1 + p_{z+n})} \tag{15}$$

Es besteht nun die Relation:

$$\frac{a+b}{c+d} > \frac{a+x.b}{c+x.d} \tag{16}$$

wenn $$x > 1 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleright 0 \qquad (17$$

Bilden wir die Produkte ad und bc, so lassen sie sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} ad &= \sum_{0}^{n-1}{}_h \, q_{z+h} \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+h-1})^2 \cdot (p_{z+h} \ldots p_{z+n-1}) \\ bc &= \sum_{0}^{n-1}{}_h \, q_{z+n} \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+h-1})^2 \cdot (p_{z+h} \ldots p_{z+n-1}) \end{aligned} \tag{18}$$

mit der Bedeutung $$p_{z-1} = 1$$

Bedingung (17): $ad > bc$ ist sicher erfüllt, wenn

$$q_{z+h} > q_{z+n} \tag{19}$$

mit $$h \leqq n-1$$

Würde demnach $T_+\binom{z+n+1}{z}$ aus $T_+\binom{z+n}{z}$ durch Multiplikation mit $x = 1 + p_{z+n}$ hervorgehen und wäre Bedingung (19) erfüllt, so müsste sein:

$$\underline{T_+\binom{z+n}{z} > T_+\binom{z+n+1}{z}} \tag{20}$$

Nun wird aber im Zähler erweitert mit $1 + p_{z+n} \cdot \frac{q_{z+n+1}}{q_{z+n}} < 1 + p_{z+n}$, wenn z und n so festgelegt sind, dass $q_{z+n+1} < q_{z+n}$. Daher wird die entstehende Ungleichung (20) noch verstärkt.

Ergebnis: Wenn z und n die Bedingung

$$q_z > q_{z+1} > \ldots . q_{z+n} > q_{z+n+1} \tag{21}$$

erfüllt, dann verfolgt die Sterbeziffer mit wachsendem n eine abfallende Kurve.

Nun möge n eine Zeitlang (21) Genüge geleistet haben. Von einem gewissen Alter hinweg wird diese Bedingung aber nicht mehr erfüllt werden können, da die Sterbenswahrscheinlichkeiten mit steigendem Alter zunehmen. Die Determinante $ad - bc$ kann deshalb auch negativ werden. Zudem wird im Zähler in (12) mit einer grössern Zahl multipliziert als im Nenner. Beide Ergebnisse verlangen, dass

$$\underline{T_+\binom{z+n'}{z} < T_+\binom{z+n'+1}{z}} \tag{22}$$

Die Sterbeziffer T_+ muss mit wachsendem n ein Minimum aufweisen, um dann wieder anzusteigen, vorausgesetzt, dass das untere Grenzalter z der Bedingung (21) genügt.

Die Folgerungen lassen sich ohne weiteres auch auf T_- übertragen.

Die zweite, wichtigere Untersuchung befasst sich damit, T_- mit T_+ zu vergleichen.

Denkt man sich (7) und (8) in gleicher Weise ausgeschrieben wie (11), so ist:

$$T_+\binom{z+n}{z} = \frac{\sum_{0}^{n} {}_h\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+h-1} \cdot q_{z+h})}{\sum_{0}^{n} {}_h\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots .. p_{z+h-1})} \tag{23}$$

$$T_-\binom{z+n}{z} = \frac{\sum_{0}^{n} {}_h\, j^h \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+h-1} \cdot q_{z+h})}{\sum_{0}^{n} {}_h\, j^h \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+h-1})} \tag{24}$$

wobei wieder $p_{z-1} = 1$

Wir bilden nun einen Zwischenwert von der folgenden Form:

$$K_h = \frac{\sum_{0}^{h} {}_k\, j^k (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k}) + j^h \cdot \sum_{h+1}^{n} {}_k\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k})}{\sum_{0}^{h} {}_k\, j^k (p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+k-1}) + j^h \cdot \sum_{h+1}^{n} {}_k\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1})} \tag{25}$$

und den darauf folgenden $K_{h+1} =$

$$\frac{\sum_{0}^{h} {}_k\, j^k (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k}) + j^{h+1} \sum_{h+1}^{n} {}_k\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k})}{\sum_{0}^{h} {}_k\, j^k \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \ldots p_{z+k-1}) + j^{h+1} \sum_{h+1}^{n} {}_k\, (p_z \cdot p_{z+1} \ldots . p_{z+k-1})} \tag{26}$$

Wir bezeichnen mit:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{o}^{h}{}_{k}\, j^k \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \cdot \cdots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k}) \\ b &= j^h \sum_{h+1}^{n}{}_{k}\, (p_z \cdot p_{z+1} \cdot \cdots p_{z+k-1} \cdot q_{z+k}) \\ c &= \sum_{o}^{h}{}_{k}\, j^k \cdot (p_z \cdot p_{z+1} \cdot \cdots p_{z+k-1}) \\ d &= j^h \sum_{h+1}^{n}{}_{k}\, (p_z \cdot p_{z+1} \cdot \cdots p_{z+k-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

Demnach ist

$$K_h = \frac{a+b}{c+d} \tag{28}$$

und

$$K_{h+1} = \frac{a+jb}{c+jd} \tag{29}$$

Falls nun $K_h > K_{h+1}$

sein soll, muss sein $j < 1$ und $ad < bc$ (30)

Wenn aber $K_h < K_{h+1}$

ist verlangt, dass $j < 1$ und $ad > bc$ (31)

Wir haben also die Produkte ad und bc zu bilden.

$$ad = j^h \cdot \sum_{o}^{h}{}_{k} \sum_{h+1}^{n} j^k (p_z \cdots p_{z+k-1} \cdot p_z \cdots p_{z+i-1} \cdot q_{z+k}) \tag{32}$$

$$bc = j^h \cdot \sum_{o}^{h}{}_{k} \sum_{h+1}^{n}{}_{i}\, j^k (p_z \cdots p_{z+k-1} \cdot p_z \cdots p_{z+i-1} \cdot q_{z+i}) \tag{33}$$

Der Bedingung (31): $ad > bc$ genügen wir sicher durch den Ansatz:

$$q_{z+k} > q_{z+i} \tag{34}$$

mit

$$i \geqq h+1 > h \geqq k \tag{35}$$

Parallel dazu wird

$$K_h < K_{h+1} \tag{36}$$

Lassen wir h von 0 bis n variieren, so entsteht die Reihe

$$K_o < K_1 < \dots < K_n$$

Vergleichen wir noch K_0 und K_n mit den Definitionsgleichungen (23) und (24), so erkennen wir, dass

$$K_o = T_+\binom{z+n}{z}$$

$$K_n = T_-\binom{z+n}{z}$$

woraus endlich

$$\underline{T_-\binom{z+n}{z} > T_+\binom{z+n}{z}} \tag{37}$$

Dabei müssen, wie bereits angegeben, die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten der Bedingung (34) genügen.

Unser Resultat, in Worte gekleidet, heisst:

Die Sterbeziffer in einer stationären Bevölkerungsgruppe ist sicher stets kleiner als die Sterbeziffer in einer Gruppe, die nach einer geometrischen Progression anwächst, wenn die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten vom untern Grenzalter z gegen die höhern Alter hin eine abnehmende Reihe bilden.

Die genannten Verhältnisse, wo die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten eine abnehmende Reihe bilden, treffen wir in den jüngsten Lebensaltern an. Wenn z. B. das untere Grenzalter $z = 0$ ist, sinken für eine gewisse Anzahl Jahre die Sterbenswahrscheinlichkeiten. (Für die Tafel S. M. 1920/21 z. B. bis zum Alter 12). Würden demnach die Sterblichkeitsverhältnisse dieser jüngsten Jahrgänge durch die Sterbeziffer gemessen, so müsste die Sterbeziffer bei *gleichen* Verhältnissen im stationären Zustande dennoch *kleiner* sein als in einem Bestande mit exponentiellem Wachstum.

Dieses Ergebnis hat für die Methodik der Messung der Lebensverbesserung Bedeutung. Die vergangenen Jahrzehnte haben gerade in den jüngsten Jahren eine grosse Verbesserung der Sterblichkeitsverhältnisse gezeitigt. Parallel mit diesem Vorgang hat ein steter Geburtenrückgang stattgefunden. Wir haben aber anderswo [1]) gezeigt, dass dieser Rückgang einem Übergang vom exponentiellen Wachstum zu einem stationären Zustand äquivalent ist. Wollte man demnach in diesen jüngsten Jahrgängen die Fortschritte in der Lebensverbesserung durch die Sterbeziffer zeigen, so würde man zu einem zu grossen Resultate kommen. Die Abnahme der Sterbeziffer ist einerseits bedingt durch eine wirkliche Verbesserung, dazu kommt aber eine scheinbare, hervorgerufen durch eine Umschichtung im Altersaufbau.

---

[1]) Beiträge zu einer Theorie des Bevölkerungswachstums mit einer Anwendung auf Sozialversicherungskassen. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker — Heft 24, 1929.

Der zweite Fall nun, wo $ad < bc$, ist jedenfalls erfüllt, wenn

$$q_{z+k} < q_{z+i} \qquad k < i \tag{38}$$

d. h. wenn die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten eine zunehmende Reihe bilden. Damit ist verbunden (wegen 30):

$$K_h > K_{h+1}$$

und aus gleichen Gründen wie vorher:

$$\underline{T_-\binom{z+n}{z} < T_+\binom{z+n}{z}} \tag{39}$$

Die Sterbeziffer in einer stationären Bevölkerung ist sicher stets grösser als die in einer Bevölkerungsgruppe mit exponentieller Vermehrung, wenn die Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten vom untern Grenzalter hinweg zunehmen.

Praktisch treten diese Verhältnisse in den mittlern und höhern Altern ein.

Eine ähnliche Betrachtung wie bei den jüngsten Altern kann hier angefügt werden. Infolge des bereits zitierten Übergangs vom Wachstum nach einer geometrischen Progression zu einem stationären Zustande müssen die Sterbeziffern für die besagten Altersgruppen zunehmen. Die eingetretene Lebensverbesserung wird daher unterschätzt, da die Änderung im Wachstum einen der Lebensverbesserung entgegengesetzten Effekt hervorruft.

Ob die Sterbeziffer im stationären Zustand grösser ist als beim Wachstum nach einer geometrischen Progression war bestimmt durch das Vorzeichen der Determinante. Wir haben in unsern Untersuchungen aber nur die beiden «sichern» Fälle herausgegriffen. Die Determinante kann aber noch positiv sein, auch wenn ein Teil der Sterbenswahrscheinlichkeiten eine zunehmende Reihe bilden, so dass ein Minimum der Sterbeziffern oder ein Schnitt nicht etwa da auftreten, wo die Sterbenswahrscheinlichkeiten minimal sind.

II.

Schon aus diesen Ergebnissen dürfte sich zur Genüge ergeben, dass die Sterbeziffer unter Umständen ein ganz ungenügendes Mass für die Sterblichkeit sein kann. Einzig eine Masszahl, die sich auf die einzelnen Alter gründet, (z. B. die Erstellung der unabhängigen Ordnung), wird auch theoretisch einwandfreie Resultate ergeben. Praktischen Anforderungen genügt oft eine Zusammenfassung in fünfer Gruppen, oft ist dieses Vorgehen durch die Kleinheit des Beobachtungsmaterials bedingt. Je mehr Jahrgänge eine untersuchte Gesamtheit umfasst, um so grösser müssen die Abweichungen sein, denn um so stärker wird der verschiedene Altersaufbau die Masszahl beeinflussen.

Zur Verstärkung unserer Resultate haben wir ein Beispiel berechnet. Im stationären Zustande sei die Altersverteilung gegeben durch die Tafel S. M. 1920/21. Der zweite Bestand sei angewachsen mit einem Vermehrungsfaktor $c = e^{0.02} \sim 1.02$. In beiden Beständen berechnen wir die Sterbeziffer, wobei die Sterbenswahrscheinlichkeiten durch die genannte Tafel festgelegt seien. Wir stellen die Ergebnisse in den folgenden Tabellen 1 und 2 zusammen.

Tabelle 1: Sterbeziffer, wenn die Bestände auch die jüngsten Altersklassen umfassen

Altersgruppe	Von 1000 Personen der betr. Altersgruppe scheiden jährlich durch den Tod aus		$100.\frac{b}{a}$
	a) im stationären Zustande	*b)* bei Vermehrung nach einer geometrischen Progression	
0— 5	22.45	23.30	103.6
0—10	13.63	14.67	107.1
0—15	10.17	11.30	110.0
0—20	8.65	9.80	111.7
0—25	7.82	8.96	112.7
0—30	7.34	8.47	113.3
0—35	7.12	8.21	113.3
0—40	7.12	8.13	112.4
0—45	7.33	8.20	110.6
0—50	7.79	8.42	107.5
0—55	8.54	8.81	103.1
0—60	9.64	9.37	97.1
0—65	11.12	10.09	89.8
0—70	12.91	10.90	81.6
0—75	14.84	11.71	73.3
0—80	16.54	12.36	66.2
0—90	18.09	12.89	59.7
0—ω	18.19	12.91	59.1

Tabelle 2: Sterbeziffer, wenn die Bestände auch die höchsten Altersklassen umfassen

Altersgruppe	Von 1000 Personen der betr. Altersgruppe scheiden jährlich durch Tod aus		$100.\frac{b}{a}$
	a) im stationären Zustand	*b)* bei Vermehrung nach einer geometrischen Progression	
0—ω	18.19	12.91	59.1
10—ω	18.86	11.88	41.2
20—ω	22.55	15.53	54.8
30—ω	27.73	20.70	66.0
40—ω	35.76	28.88	76.2
50—ω	49.06	42.59	84.8
60—ω	72.67	66.95	91.5
70—ω	117.59	112.97	95.9
80—ω	206.58	203.05	98.3

In unsern Tabellen erheischen vor allem die Unterschiede der beiden Sterbeziffern unsere Aufmerksamkeit. Bei *gleichen* Sterblichkeitsverhältnissen gibt schon die Altersgruppe 0—20 Abweichungen von mehr als 10%, die auf mehr als 40 % für die gesamten Altersklassen anwachsen können. Für den Bestand, der die Alter 10—ω umfasst, beläuft sich die Abweichung auf nahezu 60 %.

III.

Die Gefährlichkeit einer Krankheit wird oft gemessen durch den Anteil, den sie am Gesamtsterben hat. Eine Abnahme dieser Verhältniszahl wird dann meist dahin gedeutet, dass diese Krankheit an tödlicher Wirkung eingebüsst hat.

Die Altersverteilung in einem Bestande sei wieder gegeben durch die Funktion $L_x^{(t)}$. Ferner bedeute q_x die gesamte Sterbenswahrscheinlichkeit, und $q_x^{(u)}$ die Wahrscheinlichkeit, an der Todesursache (u) innert Jahresfrist zu sterben. Definitionsgemäss muss dann gelten

$$q_x = \sum_u q_x^{(u)} \tag{40}$$

Der untersuchte Bestand umfasse wieder die Alter z bis $z + n$. Alsdann ist die Zahl der gesamten Sterbefälle pro Jahr gegeben durch

$$\sum_{z}^{z+n}{}_x\, L_x^{(t)} \cdot q_x \tag{41}$$

Daran hat die Ursache (u) den Anteil

$$\sum_{z}^{z+n}{}_x\, L_x^{(t)} \cdot q_x^{(u)} \tag{42}$$

Als *summarischen Anteilsquotient* definieren wir:

$$Q_t^{(u)} = \frac{\sum_{z}^{z+n}{}_x\, L_x^{(t)} \cdot q_x^{(u)}}{\sum_{z}^{z+n}{}_x\, L_x^{(t)} \cdot q_x} \tag{43}$$

Wir könnten nun Punkt für Punkt die frühern Ableitungen wiederholen. Zuerst wäre der summarische Anteilsquotient als Funktion der Erneuerung darzustellen und sodann auf die beiden Erneuerungsarten zu spezialisieren. Im stationären Zustande fände man

$$Q_+^{(u)} = \frac{\sum_{z}^{z+n}{}_x\, l_x \cdot q_x^{(u)}}{\sum_{z}^{z+n}{}_x\, l_x \cdot q_x} \tag{44}$$

und in gleicher Weise für eine Gruppe, die nach einer geometrischen Progression anwächst:

$$Q_{-}^{(u)} = \frac{\sum_{z}^{z+n} x\, j^x \cdot l_x \cdot q_x^{(u)}}{\sum_{z}^{z+n} x\, j^x \cdot l_x \cdot q_x} \tag{45}$$

Um zu entscheiden, in welcher Beziehung $Q_{-}^{(u)}$ zu $Q_{+}^{(u)}$ steht, hätte man einen Zwischenwert wie K_h zu bilden. Als Bedingung für

$$Q_{-}^{(u)} > Q_{+}^{(u)} \tag{46}$$

geht hervor:

$$\frac{q_{z+k}^{(u)}}{q_{z+i}^{(u)}} > \frac{q_{z+k}}{q_{z+i}}\,, \quad i > k \tag{47}$$

Wir haben nun zu untersuchen, welcher Art eine Todesursache sein muss, um die letzte Gleichung zu befriedigen.

Es sei (u) eine Todesursache, die am Gesamtsterben in jungen Jahren einen grossen Anteil hat, mit zunehmendem Alter aber ihren Einfluss einbüsst. Mathematisch gesprochen heisst das, dass der Anteil von $q_x^{(u)}$ an q_x abnimmt, dass also:

$$\frac{q_{z+k}^{(u)}}{q_{z+k}} > \frac{q_{z+i}^{(u)}}{q_{z+i}}\,, \quad i > k \tag{48}$$

Gleichung (47) ist aber identisch mit der letzten Beziehung. Um (48) zu genügen, ist aber nicht notwendigerweise verbunden, dass die $q_x^{(u)}$ selber eine abnehmende Reihe bilden, einzig der Anteil an q_x muss fallen. Eine Todesursache, deren Anteil am Gesamtsterben ein Maximum aufweist und dann wieder absinkt, kann (48) ebenfalls erfüllen, wenn das untere Grenzalter z der Gruppe so gewählt ist, dass für alle höhern Alter der Quotient $q_x^{(u)} : q_x$ auf dem fallenden Ast liegt. Das gefundene Resultat lässt sich demnach wie folgt aussprechen:

Geht eine Bevölkerungsgruppe vom Wachstum nach einer geometrischen Progression in einen stationären Zustand über, so nimmt der summarische Anteilsquotient einer solchen Todesursache (u) ab, deren Einfluss am Gesamtsterben vom untern Grenzalter z der Gruppe hinweg stetig abnimmt.

Die Frage, ob eine Krankheit an tödlicher Wirkung eingebüsst hat, kann nicht durch eine Verhältniszahl wie den summarischen Anteilsquotient entschieden werden, es sei denn, dass die Gruppe nur einige wenige Jahrgänge umfasst. Bei Krankheitsstatistiken über längere Zeitabschnitte wird diesem Umstande oft zu wenig Rechnung getragen, so dass über die Zu- oder Abnahme einer Krankheit eine irrige Auffassung entstehen kann. Der wechselnde Altersaufbau beeinflusst die Masszahl in weit grösserem Umfange, als man vielfach anzunehmen geneigt ist.

Wenn auch manchmal die Kleinheit des untersuchten statistischen Materials eine Gruppenzusammenfassung verlangt, so muss man sich doch stets die Unvollkommenheit der Ergebnisse vergegenwärtigen, um nicht Fehlschlüsse zu ziehen. Sollten beispielsweise die Gesundheitsverhältnisse der Stadt- und Landbewohner verglichen werden, so darf der verschiedene Altersaufbau keineswegs vernachlässigt werden. Die Stadt wird relativ mehr Elemente im erwerbsfähigen Alter und weniger Leute in hohen Altern aufweisen als das Land. Mathematisch würde die nach einer geometrischen Progression anwachsende Gruppe ein Bild der Stadtverhältnisse ergeben, während die Verhältnisse in der stationären Gruppe mehr denen auf dem Land entsprechen dürften.

Um die Fehlergrenzen besser zu erkennen, berechnen wir auch hier ein numerisches Beispiel. Die statistischen Grundlagen entnehmen wir englischen Verhältnissen (1911)[1]. Als Todesursachen werden die folgenden genommen:

a) Epidemische Krankheiten (wie Masern, Scharlach, Diphtherie, Blattern usw.).
b) Tuberkulose ausser Lungentuberkulose.
c) Lungentuberkulose.
d) Magen- und Leberkrebs (von uns kurzweg mit Krebs bezeichnet).
e) Bronchitis.

In einer ersten Tabelle stellen wir für diese Todesursachen den Anteil am Gesamtsterben dar, gemessen durch $q_x^{(u)} : q_x$.

Tabelle 3: Anteil der Todesursachen am Gesamtsterben, gemessen durch $q_x^{(u)} : q_x$ in %

Alter x	Epidemische Krankheiten	Tuberkulose ausser Lungentuberkulose	Lungentuberkulose	Magen- und Leberkrebs	Bronchitis
5	34.4	13.2	3.4	—	1.6
10	16.0	13.0	5.5	—	2.1
15	4.9	9.2	20.3	0.2	0.6
20	4.3	5.2	33.9	0.4	0.7
25	4.1	3.7	37.7	0.5	0.8
30	3.4	2.8	35.9	1.0	1.2
35	2.7	2.1	31.4	1.8	1.6
40	2.1	1.4	26.2	3.0	2.4
45	1.6	1.0	20.4	5.1	3.5
50	1.4	0.7	15.3	7.1	4.7
55	1.1	0.5	10.8	8.6	6.3
60	0.7	0.3	7.0	9.5	8.4
65	0.6	0.2	4.0	9.3	10.3
70	0.4	0.1	1.8	7.7	12.1
75	0.4	0.1	0.7	5.8	13.1
80	0.3	—	0.3	3.7	13.0

[1]) Nathan: Analysed Mortality: The English Life No. 8a Tables. Transactions of the Faculty of Actuaries, vol. X, 1924.

Eine zweite Tabelle stellt uns den Anteil dieser Todesursachen dar, bezogen auf 1000 vorkommende Todesfälle in der betreffenden Altersgruppe. Das Zeichen (+) bedeute wieder den stationären Zustand, (—) das Wachstum nach einer geometrischen Progression.

Tabelle 4: Der summarische Anteilsquotient

Altersgruppe	Auf 1000 Todesfälle in der betr. Altersgruppe kommen infolge von									
	Epidemischen Krankheiten		Tuberkulose ausser Lungentuberkulose		Lungentuberkulose		Magen- und Leberkrebs		Bronchitis	
	(+)	(—)	(+)	(—)	(+)	(—)	(+)	(—)	(+)	(—)
5—24 .	123.3	134.5	92.6	97.0	196.0	180.4	—	—	10.8	11.3
5—49 .	55.1	71.5	42.3	52.9	247.5	238.1	22.5	17.6	20.0	17.9
5—89 .	23.7	41.8	17.4	30.5	117.9	153.5	54.1	44.0	73.3	54.6
50—89 .	—	—	—	—	44.9	53.1	72.0	75.3	103.3	98.3

Wir halten fest, dass in beiden Beständen *gleiche* Sterblichkeitsverhältnisse vorhanden sind, dass der Unterschied also einzig durch die verschiedene Alterszusammensetzung bedingt ist.

Greifen wir speziell die Todesursache Krebs heraus. Beim Übergang (—) zu (+) nimmt der Anteil in der ganzen Gruppe 5—89 zu; ohne Kenntnis des durchaus verschiedenen Altersaufbaus würde man folgern, dass eine Zunahme der Krebssterblichkeit erfolgt ist. Die Unterteilung in die Gruppen 5—49 und 50—89 ergäbe eine Zunahme für die weniger als 49-Jährigen, eine Abnahme aber für die mehr als 50-Jährigen. Diese Schlussweise ist aber absolut falsch, wir haben weder Ab- noch Zunahme.

Wollte man die Verminderung an tödlicher Wirkung der epidemischen Krankheiten und der Tuberkulose ausser Lungentuberkulose durch den summarischen Anteilsquotienten messen, so wird die Wirkung überschätzt, wenn die Bevölkerung gegen einen stationären Zustand hin tendiert. Einzig die Umschichtung im Altersaufbau bewirkt eine Abnahme um nahezu die Hälfte. Dagegen würde eine Verbesserung der Bronchitissterblichkeit unterschätzt.

So einfach auch die Darstellung der Sterblichkeitsverhältnisse durch Sterbeziffer und summarischen Anteilsquotient ist, so wenig genügt sie wissenschaftlichen Anforderungen. Auch der Praktiker wird sich stets zu vergewissern haben, auf welche Grundlagen die statistische Masszahl aufbaut, um vor Fehlschlüssen bewahrt zu bleiben.