Zur Methodik der Bevölkerungsvorausberechnung

Von Dr. *E. Zwinggi*, Basel

Inhaltsübersicht:

Einleitung

Die beiden Methoden, die vom Statistiker zur Vorausberechnung des künftigen Bevölkerungsstandes hauptsächlich verwendet werden, unterscheiden sich grundsätzlich voneinander. Beide Methoden haben schliesslich zum Ziele, die Grösse der Bevölkerung in den künftigen Jahren darzustellen; während die «analytische Vermehrungsformel» die gesuchte Grösse direkt in Funktion der Zeit angibt, berechnen wir bei der zweiten Methode, der «Fortschreibung des Bevölkerungsstandes mit Hilfe der Fruchtbarkeitsverhältnisse der weiblichen Bevölkerung», zuerst die Geburtenzahlen und erst nachher durch eine Summation über alle Altersklassen auch den zahlenmässigen Umfang der Bevölkerung selber. Um diese Unterschiede in der Methode klarer hervortreten zu lassen, müssen wir auf die Grundzüge beider Berechnungsarten etwas näher eingehen, ohne allerdings auf die historische Entwicklung des Problems einzutreten. Wir wollen dabei das Verfahren der «analytischen Vermehrungsformel» vorwegnehmen.

Den statistischen Berichten können wir den zahlenmässigen Umfang der Bevölkerung für einige Jahrzehnte zurück entnehmen. Würde man diese Beobachtungswerte graphisch auftragen, so müsste man vor allem erkennen, dass die Zunahme der Bevölkerung in einem stetig verlangsamten Tempo vorsichging. Der Statistiker hat nun verschiedene Methoden ausgearbeitet, um den Wachstumsverlauf zwischen dem ersten und dem letzten beobachteten Wert durch eine mathematische Formel wiederzugeben. Diese Interpolation der Bevölkerungszahlen wurde hauptsächlich im Hinblick auf eine möglichst genaue Bestimmung der Bevölkerungsgrösse zwischen den einzelnen Beobachtungswerten ausgearbeitet, da die Volkszählungen nur in grössern Zeitabschnitten durchgeführt werden. Das Interpolationsproblem ist an sich sehr einfach, solange wir bloss verlangen, dass in den festen Beobachtungswerten die Berechnung genau mit der Beobachtung übereinstimmt; bei der Ableitung einer zutreffenden, d. h. einer vernunftmässigen Interpolationsformel muss aber der verlangsamten Bevölkerungszunahme bereits Rechnung getragen werden. Da wir heute keine Gründe dafür angeben können, dass sich die Bevölkerungszunahme in den spätern Jahren wieder verstärke, nehmen wir meist an, dass die Bevölkerung im Laufe der Zeit gegen eine obere Grenze, gegen einen Beharrungszustand, hinstrebe. Dass mit dem Erreichen eines obern Grenzwertes nicht ein Verharren auf einer absoluten, festen Zahl verbunden ist, sondern ein Herumschwingen um eine Mittellage, erklärt sich von selber aus der Natur der gestellten Aufgabe.

Durch das Einbeziehen der Richtung des künftigen Wachstums in die Ableitung der Interpolationsformel erweitern wir nun ganz automatisch den Charakter dieser Formel. Die gleiche Beziehung, die den Wachstumsverlauf innerhalb der Beobachtungsgrenzen kennzeichnet, gestattet in ihrer Bauart, auch die Grösse der Bevölkerung über die letzte Zählung hinaus anzugeben. Die Interpolationsformel ist damit zur Extrapolationsformel geworden.

Ohne uns bewusst zu äussern, haben wir die prinzipielle Annahme getroffen, dass sich das Wachstum der Bevölkerung überhaupt durch eine mathematische Beziehung ausdrücken lasse, wir haben uns die Fiktion eines «Wachstumsgesetzes» zu eigen gemacht. Es ist hier nicht der Ort, die philosophischen Grundlagen des ganzen Fragenkomplexes zu erörtern, wir erinnern nur daran, dass sich die gleichen Einwände auch bei der mathematischen Erfassung der Sterblichkeit erheben. Die mathematische Darstellung des Sterblichkeitsverlaufes ist aber in der Versicherungswissenschaft von so grosser Bedeutung, dass wir z. B. der Makehamschen Sterbeformel nicht mehr entbehren könnten. Das «Wachstumsgesetz» wird den Verlauf der Vermehrung nie mit absoluter Genauigkeit auf Jahre hinaus angeben können, es stellt bloss den normalen Verlauf dar, so wie wir ihn heute unter Würdigung aller überhaupt messbaren Faktoren als am besten möglich halten [1]). Wir wollen daher künftig von einer «Vermehrungsformel» und nicht mehr von einem «Gesetz des Wachstums» sprechen.

Soll also die Vermehrungsformel den künftigen Wachstumsverlauf zutreffend wiedergeben, so muss der anzustrebende Grenzwert bei der Ableitung der Formel mitberücksichtigt werden. Diese Einbeziehung eines Grenzwertes in die Berechnungen verursacht nun aber oft bedeutende Schwierigkeiten.

Ein erster Weg besteht darin, dass man den obern Grenzwert und den Zeitpunkt, wo diese obere Schranke erreicht sein wird, zu schätzen versucht. Die Schätzung erfolgt auf Grund allgemeinster Betrachtungen über die Bevölkerungsdichte, die Industrialisierung und der Würdigung anderer, hauptsächlich wirtschaftlicher Momente. Die vorhandenen Beobachtungswerte, also die den statistischen Berichten entnommenen Daten über die bisherige Entwicklung, dienen ferner dazu, Annahmen über die Geschwindigkeit der künftigen Bevölkerungszunahme zu treffen. Bei dieser Art der Grenzwertbestimmung ist also keine Berechnung des absoluten Betrages der obern Schranke durch eine mathematische

[1]) Man vergleiche auch die Einleitung zu der Arbeit: «Die Witwenversicherung als Teil der allgemeinen Alters- und Hinterlassenenversicherung.» — Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 26. Heft, Bern 1931.

Methode aus den gegebenen Werten für die Bevölkerungsgrösse vorgesehen, die bisherige Entwicklung legt also mehr nur den Charakter des Wachstumsverlaufes fest. Man könnte diese Art der Vorausberechnung auch als «gerichtete Extrapolation» bezeichnen. — Diese «gerichtete Extrapolation» kam durch Friedli [1]) in seinen bevölkerungsstatistischen Grundlagen zur eidgenössischen Alters- und Hinterlassenenversicherung zur Einführung. Wir werden später noch ausführlich auf diese Vorausberechnungen eintreten müssen.

In der soeben entwickelten Methode der Grenzwertbestimmung ist dem persönlichen Gefühl des Statistikers ziemlich grossen Spielraum gelassen; die äusserliche Willkür scheint auf den ersten Blick bei der nun folgenden Methode mehr in den Hintergrund zu treten. Wenn die Extrapolationsformel in ihrem Charakter der stetig verlangsamten Bevölkerungszunahme Rechnung trägt, so muss auch in der mathematischen Formel der Grenzwert als eine zu bestimmende Konstante auftreten. Durch geeignete Kombination der Beobachtungswerte ergibt sich dann die Grenzbevölkerung auf rein mathematischem Wege. Wie sich praktisch eine solche Konstantenbestimmung gestaltet, ist im folgenden Abschnitt bei der Verhulstschen Vermehrungsformel erläutert. — Der Unterschied zwischen dieser und der frühern Methode ist aber nur äusserlich, indem wir das Hauptgewicht der Berechnung mehr auf die richtige Erfassung der Geschwindigkeit des Bevölkerungswachstums verlegen, aus dem sich dann mehr sekundär der Grenzwert ergibt. Beide Methoden können sich des persönlichen Empfindens des Statistikers nicht entschlagen, sei es in der Bestimmung der Grenzbevölkerung oder in der Ableitung der Vermehrungsformel selber.

Die zuletzt mitgeteilte Art der Bevölkerungsvorausberechnung, bei der sich also die Grenzbevölkerung durch eine mathematische Beziehung aus den frühern Beobachtungswerten ergibt, hat bei praktischen Vorausberechnungen häufig Anwendung gefunden. Wir erinnern hier nur an die Vermehrungsformel von Verhulst (in der englisch-amerikanischen Literatur auch als Pearl-Reed-Formel bezeichnet). Die Bevölkerungen von Amerika, England und Frankreich gehorchen mit guter Genauigkeit dieser Vermehrungsformel; dagegen konnte für die schweizerische Bevölkerung keine Übereinstimmung zwischen Berechnung und Wirklichkeit gefunden werden, wie sich auch infolge der relativen Kleinheit unseres Landes die störenden Momente viel stärker bemerkbar machen als bei einer ausgedehnten Bevölkerung.

Einige Vermehrungsformeln

Wir geben nachstehend noch einige Vermehrungsformeln in ihrer mathematischen Gestalt an, möchten aber auf die Eigenschaften dieser Funktionen nicht näher eingehen.

1. Die Vermehrungsformel von Friedli. — Es bedeute $B(t)$ die Grösse der Bevölkerung t Jahre nach der Volkszählung vom Jahre 1920, $B(0)$ die 1920 vorhandene Bevölkerung. Wenn noch

[1]) W. Friedli, «Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz». — Bern 1928.

$$f(t) = \frac{B(t+1)}{B(t)}$$

den Vermehrungsfaktor bedeutet, so kann $B(t)$ wie folgt als Produkt dieser Vermehrungsfaktoren geschrieben werden:

$$B(t) = B(0) \prod_{t=0}^{t-1} f(t). \tag{1}$$

Für den Logarithmus des Vermehrungsfaktors $f(t)$ wurde angenommen

$$\log f(t) = k(n-t)\, v^t, \; (t < n), \tag{2}$$

wo n die Zeit bis zum Eintritt des Grenzwertes bedeutet und k und v konstante Grössen sind.

2. Die Vermehrungsformel von Verhulst. — Wieder bedeute $B(t)$ die Bevölkerung zur Zeit t. (Die Zeit t braucht diesmal nicht von der letzten Zählung an gezählt zu werden, sondern sie läuft von einem sich aus den Beobachtungswerten bestimmenden Fixpunkt hinweg.) Ferner bedeute $B(\infty)$ die maximale Bevölkerung. Für die Grösse $B(t)$ hat Verhulst den folgenden Ansatz getroffen:

$$B(t) = \frac{B(\infty)}{1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}}}. \tag{3}$$

Die Grössen α und β sind Konstante, die sich mit $B(\infty)$ zusammen aus 3 Beobachtungswerten ergeben. Sind z. B. $B(t_0)$, $B(t_1)$ und $B(t_2)$ diese drei zeitlich gleich weit auseinander liegenden festen Werte, d. h. stellt $B(t_0)$ usw. die Grösse der Bevölkerung im Zeitpunkt $t = t_0$ usw. dar, so lassen sich α, β und $B(\infty)$ aus den reziproken Gleichungen für $B(t)$ nach dem folgenden Schema berechnen:

$$\frac{1}{B(t)} = \frac{1}{B(\infty)} \left\{ 1 + e^{\frac{\beta - t}{\alpha}} \right\}. \tag{4}$$

Bildet man aus (4) [1])

[1]) U. Yule, «The growth of population and the factors with control it.» — Journal of the Royal Statistical Society. Vol. LXXXVIII, London 1925. — Die hier entwickelte Methode der Konstantenbestimmung ist dieser Arbeit entnommen.

$$d_1 = \frac{1}{B(t_0)} - \frac{1}{B(t_1)} = \frac{1}{B(\infty)} e^{\frac{\beta - t_0}{\alpha}} \left\{ 1 - e^{\frac{-(t_1 - t_0)}{\alpha}} \right\}$$

$$d_2 = \frac{1}{B(t_1)} - \frac{1}{B(t_2)} = \frac{1}{B(\infty)} e^{\frac{\beta - t_1}{\alpha}} \left\{ 1 - e^{\frac{-(t_2 - t_1)}{\alpha}} \right\}$$

und durch Division $d_1 : d_2$ unter Beachtung, dass $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$

$$\frac{d_1}{d_2} = e^{\frac{t_1 - t_0}{\alpha}}, \tag{5}$$

so kann daraus α bestimmt werden.

Durch ein ähnliches Vorgehen findet man auch:

$$\frac{d_1^2}{d_1 - d_2} = \frac{1}{B(\infty)} e^{\frac{\beta - t_0}{\alpha}} \tag{6}$$

und

$$\frac{1}{B(\infty)} = \frac{1}{B(t_0)} - \frac{d_1^2}{d_1 - d_2}. \tag{7}$$

Aus der letzten Gleichung ist vorerst $B(\infty)$ zu bestimmen und durch nachheriges Einsetzen in (6) findet man sodann noch die letzte Konstante β.

3. Die Vermehrungsformel von Goldziher. — Durch Betrachtungen über Mittelwertsprozesse ist Goldziher [1]) auf eine Vermehrungsformel gestossen, die bloss auf zwei Rahmendaten $B(t_1)$ und $B(t_2)$ basiert. $B(t)$ ist durch die folgende Formel gegeben:

$$B(t) = B(t_1) \frac{1 + t\,(\varrho^{k+1} - 1)}{1 + t\,(\varrho^k - 1)}, \tag{8}$$

wo $\varrho = B(t_2) : B(t_1)$, also gleich dem Vermehrungsfaktor für das Beobachtungsintervall t_1 bis t_2 ist. Den Parameter k bestimmt man durch passende Auflösung der Gleichung (8) bei $t = t_2$. Die maximale Bevölkerung $B(\infty)$ wird endlich:

[1]) K. Goldziher, *a)* «Über die Verwendung von Mittelwertprozessen in der Bevölkerungsstatistik und in der Zinsrechnung.» — Skandinavisk Aktuarietidskrift, Jahrgang 3, 1920.

b) «Methodische Untersuchungen zu den bevölkerungsstatistischen Grundlagen der schweizerischen Alters- und Hinterlassenenversicherung.» — Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, 66. Jahrgang, 1930.

$$B(\infty) = B(t_1)\frac{\varrho^{k+1}-1}{\varrho^k-1}.$$

Die Problemstellung

Sind für eine Bevölkerung mehrere Vorausberechnungen vorgenommen worden, sei es durch Anwendung verschiedener Vermehrungsformeln oder bei einundderselben Wachstumsformel durch die Annahme ungleicher Fixpunkte, so stimmen im allgemeinen diese Vorausberechnungen nicht genau miteinander überein. Wir stehen damit vor der bedeutungsvollen Frage, welche von den angewendeten Vermehrungsformeln das «plausibelste Wachstumsgesetz» für die untersuchte Bevölkerung darstelle. Vergleicht man z. B. bloss die absoluten Bestandesgrössen in den verschiedenen Zeitpunkten miteinander, so kann ein Urteil über die Güte der Extrapolation nur schwer abgegeben werden; etwas leichter gestaltet sich die Abschätzung der Grenzbevölkerung. Es dürfte daher für den Bevölkerungsstatistiker nicht ohne Belang sein, eine Kontrollmethode zu kennen, die gestattet, die Güte der Extrapolation verhältnismässig leicht zu überprüfen. Ein feineres Mass zur Beurteilung der verschiedenen Ergebnisse als die absoluten Bevölkerungszahlen stellt nun aber die Fruchtbarkeit der weiblichen Bevölkerung dar. Doch bevor wir auf die Herleitung der Kontrollfunktion selber eintreten können, müssen wir uns noch mit der letzten Methode der Bevölkerungsvorausberechnung, der Fortschreibung des Bevölkerungsstandes auf Grund der Fruchtbarkeitsverhältnisse der weiblichen Bevölkerung, etwas näher befassen.

Viele statistische Ämter geben in den letzten Jahren in ihren Berichten auch eingehende Angaben über die Fruchtbarkeit der weiblichen Bevölkerung. So kennen wir die Zahl der Knaben- oder Mädchengeburten, bezogen z. B. auf 1000 Frauen aller Zivilstände einer ganz bestimmten Altersgruppe. Ist also in einem gegebenen Zeitpunkt die Alterszusammensetzung der weiblichen Bevölkerung bekannt, so kann auch die Zahl der im nächsten Jahre zu erwartenden Geburten berechnet werden. Treffen wir ferner noch bestimmte Annahmen über den Verlauf der Sterblichkeit, so kann auch angegeben werden, wie viele von den anfänglich vorhandenen Personen das Jahr überleben. Die Zahl dieser Überlebenden vermehrt um die Zahl der inzwischen Geborenen ergibt also den Umfang der Bevölkerung nach einem Jahr. Wir schreiten so von Jahr zu Jahr fort und berechnen zuerst die Geburtenzahlen und sodann die Zahl der überlebenden Personen. Der eingangs erwähnte Unterschied der beiden Methoden liegt also hauptsächlich darin, dass wir bei der «Methode der analytischen Vermehrungsformel» die Grösse der Bevölkerung direkt bestimmen und erst sekundär auf die Geburtenzahlen schliessen, während wir bei der «Methode der Fortschreibung» zuerst die Geburtenzahlen und erst nachher durch eine Summation aller Überlebenden auch den Gesamtumfang der Bevölkerung berechnen.

Der Begriff der Fruchtbarkeit war bei der ersten Methode nicht verwendet worden, er kann also rückwärts als Kriterium für die Güte der Extrapolation herangezogen werden. Die zu lösende Aufgabe lässt sich dann wie folgt aussprechen:

Gegeben ist die Entwicklung eines Volkes durch die Vermehrungsformel. Gesucht ist die Fruchtbarkeit der weiblichen Bevölkerung, die diesem berechneten Wachstum zugrunde liegt. Der Vergleich der rekonstruierten Fruchtbarkeit mit der in Wirklichkeit zu erwartenden ergibt dann ein Mass für die Zuverlässigkeit der vorgenommenen Extrapolation.

Einige Bemerkungen über das Wesen der abzuleitenden Kontrollfunktion sind hier noch anzufügen. Auch die Methode der Fortschreibung des Bevölkerungsstandes kann der Hypothesen nicht entbehren. Der sinkende Geburtenüberschuss weist auf eine abnehmende Fruchtbarkeit der weiblichen Bevölkerung hin; die Fruchtbarkeitsziffern als Mass der Fruchtbarkeit sind also nicht bloss abhängig vom Alter der Frau, sie sind auch Funktion von der Zeit. Dem kleiner werdenden Geburtenüberschuss trägt der Statistiker durch eine stetig gegen eine untere Grenzlage strebende Fruchtbarkeitsziffer Rechnung. Die Fixierung dieses unteren Grenzwertes hängt aber auch vom persönlichen Empfinden des Statistikers ab, um so mehr, als sich die Beobachtung der Fruchtbarkeitsverhältnisse noch über nur kurze Zeiträume erstreckt. Lag bei der eingangs entwickelten Extrapolationsmethode der Schwerpunkt der Ableitung auf der richtigen Bestimmung der Grenzlage und auf der Festlegung der Geschwindigkeit der künftigen Bevölkerungszunahme, so wird er bei der letzten Methode auf eine zuverlässige Erfassung des zeitlichen Verlaufes der Fruchtbarkeitsverhältnisse verlegt.

Die zu erwartende Fruchtbarkeit ist also in ihrer zeitlichen Entwicklung abzuschätzen; wir müssen mit dieser Schätzung dann die rückwärts berechneten Fruchtbarkeitsziffern vergleichen. Allerdings braucht vorgängig keine Abschätzung der absoluten Grösse der Fruchtbarkeitsziffern zu erfolgen, wir haben bloss zu untersuchen, in welchem Masse die Fruchtbarkeit als Ganzes zurückgehen wird. (Man könnte so z. B. erklären, dass ein stetiger Rückgang auf 75 % des Anfangswertes erfolge.)

Eine stets zunehmende rekonstruierte Fruchtbarkeitsziffer weist darauf hin, dass in diesem Zeitraum ein zu starkes Wachstum angenommen wurde, es wäre aber gegen die Natur der gestellten Aufgabe, wenn wir von unserer Kontrollmethode auch ein absolutes Resultat verlangen wollten. Die Lösung kann zeigen, ob die der Extrapolation zugrunde liegenden Fruchtbarkeitsverhältnisse gegen die Erwartung verstossen, so dass eine Über- oder Unterschätzung des Bevölkerungsstandes eingetreten ist, nicht aber, ob die verwendete spezielle Vermehrungsformel nun auch gerade das gesuchte «Gesetz» des Wachstums sei.

Die Herleitung der Kontrollfunktion

Die Grösse der Bevölkerung sei zur Zeit t (also t Jahre nach der letzten Zählung) vorausberechnet zu $B(t)$. Nach einem Jahre habe die Bevölkerung auf den Betrag $B(t+1)$ zugenommen; beide Werte $B(t)$ und $B(t+1)$ lassen sich durch die Vermehrungsformel berechnen. Wir setzen noch $\Delta B(t) = B(t+1) - B(t)$. Diese Zunahme $\Delta B(t)$ der Bevölkerung muss nun offenbar durch Geburten hervorgebracht werden, daneben müssen aber auch die durch Tod ausscheidenden

Frauen durch neue ersetzt werden. Wenn $L^t(y)$ die Zahl der y-jährigen Frauen zur Zeit t darstellt, ferner q_y die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine y-jährige Frau im Laufe des nächsten Jahres sterbe, so ist die Gesamtzahl der innert Jahresfrist sterbenden Frauen gegeben durch:

$$\sum_{y=0}^{w} L^t(y) \cdot q_y \,.$$

Wir nehmen nun schematisch an, dass alle Geburten am Jahresende stattfinden. (Diese schematische Festsetzung hat keinerlei Einfluss auf die Gültigkeit der abzuleitenden Gesetze.) Die Zahl der Mädchengeburten $t + 1$ Jahr nach Beobachtungsbeginn bezeichnen wir mit $G(t + 1)$. Dann muss diese Zahl gleich sein der Bevölkerungszunahme $\Delta\, B(t)$ vermehrt um die Zahl der sterbenden Frauen. Also

$$G(t+1) = \Delta\, B(t) + \sum_{y=0}^{w} L^t(y) \cdot q_y \,. \tag{9}$$

Nun ist $L^0(y)$ die bekannte Alterszusammensetzung im Ausgangszeitpunkt $t = 0$, ebenso ist $\Delta\, B(1)$ bekannt, daher lässt sich auch $G(1)$ leicht bestimmen. Dieses Verfahren kann von Jahr zu Jahr fortgesetzt werden, denn es bestehen die beiden Beziehungen

$$L^t(y + t) = L^0(y) \cdot {}_t p_y$$

und

$$L^t(y) = G(t - y) \cdot {}_y p_0 \,; \tag{10}$$

die erste Formel kommt zur Anwendung, wenn die Zahl der Frauen im Alter $y > t$, die andere wenn die entsprechende Zahl für $y < t$ zu bestimmen ist. Dabei bedeutet noch ${}_y p_0$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Mädchen y-jährig werde. Die Werte q_y und ${}_y p_0$ können einer Sterbetafel für die betreffende Bevölkerung entnommen werden. — Damit sind aber die $L^t(y)$ für jedes t bestimmbar, und damit ist wiederum $G(t)$ gegeben.

Wir bezeichnen nun die Fruchtbarkeitsziffern mit $f(y, t)$; $1000\, f(y, t)$ stellt also die Zahl der Mädchengeburten zur Zeit t dar, die auf 1000 Frauen aller Zivilstände im Alter y entfallen. Der Jahrgang $L^t(y)$ gibt dann Anlass zu

$$L^t(y) \cdot f(y, t)$$

Mädchengeburten. Um alle im Zeitpunkt t stattfindenden Mädchengeburten zu erfassen, summieren wir über alle vorkommenden Altersklassen y. (In allen Altersklassen, wo keine Geburten mehr vorkommen, denkt man sich einfach $f(y, t) = 0$.) Damit wird

$$G(t+1) = \sum_{y=0}^{w} L^t(y) \cdot f(y,t). \tag{11}$$

Im allgemeinen sind nun aber die Fruchtbarkeitsziffern nur für Altersgruppen bekannt; wir wollen voraussetzen, dass sie für 5er Gruppen gegeben seien. Die $i+1$ste Altersgruppe umfasst daher die Alter $5i$ bis $5i+4$. Die dieser Altersgruppe entsprechende Fruchtbarkeitsziffer sei mit $f(i,t)$ bezeichnet. Die Gesamtzahl der zu erwartenden Mädchengeburten ist dann nach unserer modifizierten Beziehung (11):

$$G(t+1) = \sum_{i=i_0} f(i,t) \sum_{n=0}^{4} L^t(5i+n). \tag{12}$$

Die jüngste Altersgruppe, in der noch eine Fruchtbarkeitsziffer zuverlässig gemessen werden kann, sei i_0; alle Alter unter i_0 fallen daher in der Summation weg. ($f(i_0, t)$ ist also die Fruchtbarkeitsziffer für die Altersgruppe i_0.) Wir dividieren in (12) noch durch $f(i_0, 0)$ und finden:

$$\frac{G(t+1)}{f(i_0,0)} = \sum_{i=i_0} \frac{f(i,t)}{f(i_0,0)} \sum_{n=0}^{4} L^t(5i+n). \tag{13}$$

Wir treffen nun die Annahme, dass am Geburtenrückgang alle Altersklassen in gleichem Masse beteiligt seien. Diese Voraussetzung gestattet dann, den Quotient $f(i,t) : f(i_0, 0)$ wie folgt darzustellen:

$$\frac{f(i,t)}{f(i_0,0)} = \alpha(t) \cdot \frac{f(i,0)}{f(i_0,0)}, \tag{14}$$

wo $\alpha(t)$ nur eine von der Zeit t, nicht aber vom Alter der Frauen abhängige Funktion ist und wo ferner $f(i,0) : f(i_0,0)$ die im Beobachtungsnullpunkt vorhandene relative Fruchtbarkeit darstellt.

Eine Prüfung der Güte der Extrapolation wird hauptsächlich da vorgenommen werden müssen, wo die statistischen Grundlagen zur Fortschreibung des Bevölkerungsstandes mit Hilfe der Fruchtbarkeitsziffern fehlen. Um die Fruchtbarkeit zu rekonstruieren, brauchen wir nun aber bloss die relativen Fruchtbarkeitsziffern $f(i,0) : f(i_0,0)$, die wir, ohne dass ein zu grosser Fehler begangen wird, aus einer andern, ähnlich gebauten Bevölkerung übertragen dürfen. Diese Übertragung besagt nichts anderes, als dass dann in beiden Bevölkerungen die verschiedenen Altersgruppen der Frauen in gleichem Masse zu den Geburten beitragen. Wir haben also nicht die Fruchtbarkeitsverhältnisse als solche übernommen, sondern bloss die Verteilung auf die verschiedenen Altersklassen; bei der Wahl passender relativer Fruchtbarkeitsziffern muss naturgemäss darauf geachtet werden, dass keine Überpflanzung westeuropäischer Ergebnisse auf die osteuropäischen Bevölkerungen erfolgt, da die Heiratsalter ungleich verteilt sind.

Mit Hilfe von (14) lässt sich (13) auch schreiben:

$$\frac{G(t+1)}{f(i_0, 0)} = \alpha(t) \sum_{i=i_0} \frac{f(i, 0)}{f(i_0, 0)} \sum_{n=0}^{4} L^t(5i+n). \tag{15}$$

Die unbekannte Funktion $\alpha(t)$ ist daraus bestimmt zu:

$$\alpha(t) = \frac{\dfrac{G(t+1)}{f(i_0, 0)}}{\sum\limits_{i=i_0} \dfrac{f(i, 0)}{f(i_0, 0)} \sum\limits_{n=0}^{4} L^t(5i+n)}. \tag{16}$$

In dieser Gleichung ist alles bekannt ausser $\alpha(t)$ und $f(i_0, 0)$. (Wir erinnern uns, dass durch Formel (9) die Geburtenzahl $G(t+1)$ und durch (10) die Zahlen $L^t(5i+n)$ berechnet werden können, sobald wir eine Vermehrungsformel für $B(t)$ vorausgesetzt haben.) Da aber bei $t = 0$ die Funktion $\alpha(t) = 1$ sein muss, ist aus

$$1 = \frac{\dfrac{G(1)}{f(i_0, 0)}}{\sum\limits_{i=i_0} \dfrac{f(i, 0)}{f(i_0, 0)} \sum\limits_{n=0}^{4} L^0(5i+n)} \tag{17}$$

$f(i_0, 0)$ leicht berechenbar. Sodann kann der bestimmte Wert für $f(i_0, 0)$ in (16) eingesetzt werden, womit auch $\alpha(t)$ bestimmbar ist.

Infolge des beobachteten Geburtenrückganges muss also $\alpha(t)$ eine abnehmende Funktion sein. Bei der Beurteilung dieser Abnahme muss aber eine wichtige Voraussetzung stets beachtet werden: wir haben unsern Berechnungen konstante Sterblichkeitsverhältnisse zugrunde gelegt. Da in den nächsten Jahren weiter mit einem Rückgang der Sterblichkeit gerechnet werden darf, fällt die Funktion $\alpha(t)$ in ihrer Rekonstruktion etwas grösser aus als sie in Wirklichkeit zu sein braucht, da die Bevölkerungszunahme z. T. durch die bessern Sterblichkeitsverhältnisse bedingt ist und infolgedessen etwas weniger Geburten nötig sind zur Ersetzung der Gestorbenen.

Einige weitere Eigenschaften der Funktion $\alpha(t)$ können am besten anhand der praktischen Beispiele erläutert werden.

Praktische Beispiele

Die durchzuführenden praktischen Beispiele, welche die Anwendung der abgeleiteten Formeln zeigen sollen, beziehen sich auf die Vorausberechnung der weiblichen Bevölkerung der Schweiz. In der bereits zitierten Abhandlung von Friedli, «Bevölkerungsstatistische Grundlagen zur Alters- und Hinterlassenenversicherung in der Schweiz», wurde ein normales Wachstumsgesetz für die männliche und weibliche Bevölkerung der Schweiz abgeleitet; die mathematische Gestalt dieser Vermehrungsformel ist in Beziehung (2) wiedergegeben worden. Friedli ging von den Ergebnissen der Volkszählung vom Jahre 1920 aus und führte eine «gerichtete Extrapolation» gegen die im Jahre 2000 zu erreichende obere Grenze hin durch. Wir wollen in Zukunft das Wachstum nach der Formel von Friedli als normales bezeichnen.

Daneben hat Friedli zwei Extremfälle untersucht, die eine untere und eine obere Grenze der Entwicklung darstellen. Einmal wurde angenommen, die Bevölkerungsgrösse bleibe konstant, d. h. vom Jahre 1920 hinweg erfolge keine Bevölkerungszunahme mehr. Dieser untere Grenzfall, der von der Wirklichkeit natürlich stark abweicht, gestattet dann aber, wichtige Schlüsse in bezug auf die Wachstumsmöglichkeiten von Bevölkerungen zu ziehen, die eine zeitlang keine Vermehrung oder sogar einen Rückgang zu verzeichnen gehabt haben.

Der andere Extremfall setzt eine konstante Wachstumsrate von jährlich 10 ‰ fest. Diese konstante Wachstumsrate bewirkt, dass die Bevölkerungsgrösse selber durch eine geometrische Progression dargestellt ist. Eine unveränderliche Wachstumsrate berücksichtigt den eingetretenen Geburtenrückgang nicht, es tritt also eine Überschätzung des Bevölkerungsstandes schon nach relativ kurzer Zeit ein. Dieser Extremfall stellt also die obere Entwicklungsmöglichkeit dar.

Für alle drei Vorausberechnungen haben wir nun die Funktion $\alpha(t)$ berechnet, d. h. wir haben die Fruchtbarkeit rekonstruiert, die nötig ist, damit sich die Bevölkerung nach den angenommenen drei Vermehrungsformeln entwickle. Die zu dieser Rekonstruktion notwendigen relativen Fruchtbarkeitsziffern haben wir den Ergebnissen der amerikanischen Zählung vom Jahre 1920 für weisse Frauen entnommen [1]), wobei diese Ziffern dem ungleichen Verhältnis der Zahlen der verheirateten und der unverheirateten Frauen in beiden Ländern angepasst wurden. Die Fruchtbarkeitsverhältnisse im Jahre 1930 wollen wir für jede der drei Vermehrungsarten mit 1.000 bezeichnen. (Wir haben das Jahr 1930 als Ausgangspunkt für unsere Untersuchung gewählt und geben die Ergebnisse von 10 zu 10 Jahren wieder.) Für die Kontrollfunktion $\alpha(t)$ ergibt sich dann der folgende Verlauf: (Siehe Tabelle Seite 266)

In erster Linie erkennt man, dass für keine der drei Vorausberechnungen $\alpha(t)$ konstant ist. Die kleinsten Schwingungen um die Mittellage 1.000 herum haben wir im Falle, wo sich die Bevölkerung nach einer geometrischen Progression vermehrt, die grössten dagegen bei der konstanten Bevölkerung. Wie sind nun

[1]) A. J. Lotka, «The size of American families in the eighteenth century». — Journal of the American Statistical Association, June 1927.

diese auf den ersten Blick etwas sonderbaren Ergebnisse zu deuten? Da die Grösse der Bevölkerung durch eine stetig verlaufende mathematische Funktion dargestellt wird, weist auch der Wachstumsverlauf keine Schwingungen auf. Es ist nun eine mathematisch beweisbare Tatsache [1]), dass in diesem Falle die Geburtenfunktion $G(t)$ um eine Trendfunktion herum Schwingungen ausführt. Im Gegensatz zu der «glatt» verlaufenden Bevölkerungsgrösse schwingt also die Geburtenfunktion um eine mittlere Kurve, den Trend. Da sich auch die Berechnung der Kontrollfunktion $\alpha(t)$ auf die Geburtenzahlen $G(t)$ stützt, so muss auch $\alpha(t)$ eine Schwingung ausführen. Es muss daher nachdrücklich festgehalten

Verlauf der Funktion $\alpha(t)$

Jahr	Die Bevölkerung bleibt konstant	Die Bevölkerung wächst nach der Vermehrungsformel von Friedli	Die Bevölkerung wächst nach einer geometrischen Progression
1930	1.000	1.000	1.000
1940	1.250	0.996	1.029
1950	1.200	1.062	1.014
1960	1.017	1.096	0.992
1970	0.925	1.063	0.985
1980	0.979	1.019	0.995
B. Z. *) . . .	1.042	1.038	

*) B. Z. = Beharrungszustand.

werden, dass eine relativ kleine Zunahme von $\alpha(t)$ noch nichts darüber aussagt, ob die Extrapolation ungenügend sei. Schwingungen nahe um die Mittellage 1.000 deuten auf keine Abnormitäten hin, sie weisen vorerst vielmehr nach, dass zur Extrapolation nahezu konstante Fruchtbarkeitsverhältnisse angenommen wurden. Nun ist aber bereits angeführt worden, wie der bei den Berechnungen nicht berücksichtigte Rückgang der Sterblichkeit die Funktion $\alpha(t)$ etwas zu gross erscheinen lasse. Die Tatsache eines weitern Rückganges der Sterblichkeit, verbunden mit einer nahezu konstanten Funktion $\alpha(t)$ bedeutet also, dass die Extrapolation mit abnehmenden Fruchtbarkeitsziffern durchgeführt worden ist. Die von Friedli durchgeführte Vorausberechnung der weiblichen Bevölkerung auf Grund der mitgeteilten Vermehrungsformel basiert somit auf einer abnehmen-

[1]) Über das Auftreten solcher Schwingungen vergleiche z. B. die folgenden Arbeiten:

a) Chr. Moser, «Beiträge zur Darstellung von Vorgängen und des Beharrungszustandes bei einer sich erneuernden Gesamtheit». — Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 21. Heft, 1926.

b) W. Friedli, «Über die Stabilität der gegenseitigen Hilfskassen». — Zeitschrift für schweizerische Statistik und Volkswirtschaft, 63. Jahrgang, 1927.

c) H. Wyss, «Lage, Entwicklung und Beharrungszustand der eidgenössischen Versicherungskasse». — Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 24. Heft, 1929.

den Fruchtbarkeit; damit ist der Nachweis geleistet, dass diese Vermehrungsformel den normalen Wachstumsverlauf darstellt.

Der Extremfall der konstanten Bevölkerungszahl beansprucht nun ebenfalls grosses Interesse; zuerst könnte man glauben, dass dazu die kleinsten Fruchtbarkeitsziffern notwendig sind. Diese Annahme ist aber nur bedingt richtig. Damit keine Bestandeszunahme erfolgt, dürfen wohl am Anfang der Entwicklung nur wenig Geburten stattfinden, sind aber einmal diese Neugeborenen in das gebährfähige Alter vorgerückt und sind zugleich die Geburtenzahlen auf einem Wellenberg angelangt, so muss diese relativ grosse Geburtenzahl durch eine verhältnismässig kleine Anzahl gebährfähiger Frauen hervorgebracht werden. Dies ist aber nur möglich, wenn die Fruchtbarkeitsziffern ansteigen. Der rechnerische Nachweis geht aus unserm Beispiel klar hervor, indem von 1930 bis 1950 eine 20 %ige Zunahme der Fruchtbarkeitsverhältnisse erfolgen muss.

Dieses Ergebnis ist nun in folgender Hinsicht wertvoll. Hat eine Bevölkerung durch aussergewöhnliche Einflüsse einen Geburtenausfall erlitten, so werden sich die kleinen Zahlen der Neugeborenen periodisch beim Eintritt in das gebährfähige Alter wieder durch eine kleine Zahl an Neugeborenen auswirken. Dieser Ausfall wird rasch gedämpft sein, wenn die Bevölkerung über eine ungebrochene Fortpflanzungskraft verfügt, andernfalls tritt neben die sich mehr oder weniger auf alle Alter erstreckende Beschränkung der Kinderzahl noch der periodische Ausfall hinzu. Dieser letztgenannte Geburtenausfall kann sehr wohl bei einer Bevölkerung, die ohnehin die Tendenz zur Stagnation aufweist, einen Rückgang der Bevölkerungszahl auslösen.

Es bleibt noch die Besprechung der Ergebnisse für die Vorausberechnung nach der geometrischen Progression übrig. Die Schwankungen der Funktion $\alpha(t)$ sind gering, so dass eine Vorausberechnung mit nahezu konstanten Fruchtbarkeitsziffern vorliegt, sofern der zu erwartende Rückgang der Sterblichkeit nicht berücksichtigt wird. Da aber auch hier eine weitere Abnahme der Sterblichkeit vorausgesetzt werden darf, ist die Extrapolation wie die normale auf Grund abnehmender Fruchtbarkeitsziffern ausgeführt worden. Um aber zu entscheiden, ob die verlangten Fruchtbarkeitsverhältnisse in Wirklichkeit überhaupt erreichbar sind, müssen wir mit der normalen Vermehrungsformel von Friedli vergleichen. Wir geben daher in der folgenden Zusammenstellung den Verlauf der Funktion $\alpha(t)$ wieder, wenn $\alpha(0)$ beim normalen Wachstumsverlauf gleich 1.000 angesetzt wurde. (Siehe Tabelle Seite 268)

Beim Wachstum nach einer geometrischen Reihe müssen die Fruchtbarkeitsziffern schon von Anfang an um etwa 40 % höher sein als beim normalen Wachstum. Damit ist aber durch Betrachtung der Fruchtbarkeitsverhältnisse der Nachweis erbracht, dass diese Hypothese für längere Zeitabschnitte unhaltbar ist.

Der Beharrungszustand

Von der Überlegung ausgehend, dass die Bevölkerungszunahme nicht ins Unermessliche vorsichgehen könne, haben wir eine obere, nicht zu überschreitende Schranke für die Grösse der Bevölkerung angenommen. Eine Frage allerdings haben wir bei der Annahme eines solchen Beharrungszustandes übergangen. Da dem Beharrungszustand auch ganz bestimmte Fruchtbarkeitsverhältnisse koordiniert sind, wäre der Fall denkbar, dass am Beobachtungsnullpunkt schon schlechtere Fruchtbarkeitsverhältnisse vorhanden sind, als sie im Beharrungszustand zur Aufrechterhaltung dieses stabilen Zustandes notwendig sind. Das Wachstum der Bevölkerung wäre daher nur noch bedingt durch einen Rückgang der Sterblichkeit und durch eine anfänglich vorhandene starke relative Besetzung der gebährfähigen Altersklassen der Frauen. Für die normale Vermehrungsformel von Friedli ist eine ganz geringe Steigerung der Funktion $\alpha(t)$ von 1930 bis zum

Verlauf der Funktion $\alpha(t)$

Jahr	Die Bevölkerung bleibt konstant	Die Bevölkerung wächst nach der Vermehrungsformel von Friedli	Die Bevölkerung wächst nach einer geometrischen Progression
1930	0.997	1.000	1.419
1940	1.247	0.996	1.461
1950	1.196	1.062	1.439
1960	1.014	1.096	1.408
1970	0.922	1.063	1.399
1980	0.975	1.019	1.412
B. Z.	1.038	1.038	

Beharrungszustand nachzuweisen. Bei der Beurteilung dieser Erscheinung dürfen aber zwei sehr wichtige Gesetzmässigkeiten nicht übersehen werden.

Im Beharrungszustand ist die Altersverteilung der Frauen durch die Überlebensordnung dargestellt, daher spielt die absolute Grösse am Ende der Entwicklung in bezug auf die Höhe der Fruchtbarkeit keine Rolle mehr. Ein doppelt so grosser Bestand verlangt auch eine doppelt so grosse Geburtenzahl, da aber die relative Besetzung der gebährfähigen Altersklassen in beiden Fällen gleich ist, müssen auch die Fruchtbarkeitsziffern gleich sein. Das Bestehen eines Beharrungszustandes ist demnach ganz unabhängig davon, welchem absoluten Grössenbetrag die Bevölkerung zustrebt, einzig und allein die Altersverteilung, und damit die Sterblichkeit, entscheidet darüber, ob schliesslich eine Stabilisierung auf eine feste Grenze eintritt oder ob doch noch ein Abgleiten erfolgt. Dieser Umstand muss stets beachtet werden, wenn ein Urteil über die Güte einer Extrapolation abzugeben ist.

Der andere zu berücksichtigende Umstand betrifft den Rückgang der Sterblichkeit. Wenn unsere Berechnung ergeben hat, dass auf Grund der verwendeten Sterbetafel im Beharrungszustand eine grössere Fruchtbarkeit erforderlich ist als im Beobachtungsbeginn, so muss sich daher die Sterblichkeit im Laufe der Zeit so verbessern, dass sich bei Zugrundelegung der neuen Sterblichkeitsverhältnisse kleinere Fruchtbarkeitsziffern ergeben als am Anfang. Wir haben nun anhand konkreter Zahlenangaben untersucht, ob eine derartige Verbesserung der Lebensbedingungen überhaupt möglich ist. Wir berechneten einmal die Fruchtbarkeitsverhältnisse, wenn die schweizerische Absterbeordnung S. M. 1920/21 (die gleiche Tafel liegt auch den Berechnungen von Friedli zugrunde) die Altersverteilung im Beharrungszustand angibt, und dann, wenn die ältere analoge Sterbetafel S. M. 1901/10 Verwendung findet. Wenn wir die Fruchtbarkeitsverhältnisse nach der ältern Tafel im Beharrungszustand mit 1.000 bezeichnen, so ergab die Berechnung für die entsprechende Fruchtbarkeit nach der Tafel S. M. 1920/21 den Wert 0.923. Einzig der Sterblichkeitsrückgang innerhalb zwanzig Jahren hat bewirkt, dass die zur Aufrechterhaltung eines Beharrungszustandes notwendige Fruchtbarkeit um nahezu 8 % zurückgehen durfte. Damit ist gezeigt, dass unter Voraussetzung eines weitern Sterblichkeitsrückganges auch die Stabilisierung auf eine feste Grenzlage zu Recht besteht. Allerdings darf nicht verhehlt werden, dass bei einer ganz aussergewöhnlichen Senkung der Fruchtbarkeitsziffern ohne darauf folgende Erholung die Möglichkeit vorhanden ist, dass keine Festlegung auf eine obere Grenze stattfindet und dass damit die Bevölkerung zahlenmässig abnimmt. Die Berechnungen des deutschen statistischen Amtes haben diese Möglichkeiten bereits erwiesen. Auch zeigen gerade neueste Sterblichkeitsuntersuchungen, dass wenigstens eine zeitweise Zunahme der Sterblichkeit sehr wohl im Bereiche der Möglichkeit liegt [1]).

Schluss

Es war uns darum zu tun, durch einfache mathematische Überlegungen und mit Unterstützung passender praktischer Beispiele einen kleinen Ausschnitt aus dem Kapitel der «Bevölkerungsvorausberechnung» zu geben. Wir haben absichtlich darauf verzichtet, die Folgen des Geburtenrückganges und die damit verbundenen Umschichtungen im Altersaufbau zu beschreiben, da sich zahlreiche Autoren mehr oder weniger objektiv mit diesen Fragen beschäftigt haben. Einzig und allein eine Darstellung des künftigen Wachstumsverlaufes, die sich auf genaue mathematische Überlegungen gründet, darf als objektiv anerkannt werden; sind diese Voraussetzungen aber vorhanden, dann besitzt sie in wirtschaftspolitischer Hinsicht grossen, richtunggebenden Wert.

[1]) H. Grieshaber, «Die Lebensversicherung in Japan». — Festgabe Moser, Bern 1931.