Das Alter des Methusalem

Von Dr. *E. J. Gumbel*, Paris

Inhaltsübersicht

	Seite		Seite
1. Das Grenzalter als Sterbetafelproblem	517	5. Theoretische Bestimmung des Grenzalters	524
2. Bisherige Vorschläge	518	6. Vergleich mit amerikanischen Beobachtungen	526
3. Neue Definition	519	Zusammenfassung	530
4. Der grösste Wert einer Verteilung	520		

Über das höchste beim Menschen beobachtete Alter existieren zahlreiche phantastische Angaben von älteren und neueren Schriftstellern, die vor allem den Orient betreffen. Diese hohen Zahlen werden von Unkritischen geglaubt und zum Teil dem Einfluss übersinnlicher Kräfte zugeschrieben. Tatsächlich sind sie nur das Ergebnis fehlender Registrierung. Je jünger die Einrichtung der Standesämter in einem Land, desto älter werden dort angeblich die Menschen — weil niemand das Datum seiner Geburt aus eigenem Erleben kennt. Auf solche Angaben aus Zeiten, in denen keine geordnete Bevölkerungsstatistik existierte, ist daher kein grosses Gewicht zu legen.

Für Länder mit modernen Volkszählungen existieren eingehende Nachweise. Obwohl individuelle Prüfungen der über 100jährigen meistens ein geringeres als das angegebene Alter ergeben, können diese Angaben wenigstens als relativ glaubwürdig betrachtet werden. Eine Ergänzung liefern manche Sterblichkeitsstatistiken. Allerdings hört bei den meisten die einjährige Klassifizierung leider etwa bei 100 Jahren auf, und die Zahl der über 100jährigen wird nur en bloc angegeben. Beide Quellen berechtigen zu der Auffassung, dass das höchste in moderner Zeit beobachtete Alter der Grössenordnung nach etwa 110 Jahre beträgt. Da die durchschnittliche Lebensdauer im verflossenen Jahrhundert ausserordentlich gestiegen ist, wird man vermuten können, dass derselbe Satz auch für frühere Zeiten richtig war.

Im folgenden verstehen wir unter dem beobachteten Grenzalter dasjenige, aus der Sterblichkeitsstatistik ersichtliche Alter, nach dessen Erreichung nur mehr einer gestorben ist. Es fragt sich, ob man sich mit solchen Beobachtungen begnügen muss oder ob eine theoretische Bestimmung dieses Alters möglich ist. Zunächst ist zu vermuten, dass dies nicht allgemein gültig, sondern nur für eine bestimmte Bevölkerung durchgeführt werden kann. Es erhebt sich aber der Einwand, dass es sich hierbei doch um ein rein individuelles Problem handelt, das, wenn überhaupt, nur vom physiologischen Standpunkt betrachtet werden

könnte. Daher entziehe es sich jeder statistischen Betrachtungsweise. Dieser Einwand ist irrig, denn es handelt sich hier um eine Parallele zum sogenannten Gesetz der kleinen Zahlen. Wie bei dieser Fragestellung, welche seltene Ereignisse betrifft, liegt hier eine sehr grosse Zahl von Beobachtungen vor, nämlich die Gesamtzahl derer, die aus einer bestimmten Bevölkerung und in einer bestimmten Zeit gestorben sind. Gleichzeitig handelt es sich hier um ausserordentlich geringe Wahrscheinlichkeiten, nämlich die, etwa das Jahr 110 zu erreichen.

1. Das Grenzalter als Sterbetafelproblem

Eine statistische Betrachtung über das Grenzalter ist somit gerechtfertigt. Gleichzeitig ist damit im Prinzip die Methode angegeben, durch welche wir eine Antwort auf unsere Frage finden werden. Denn unsere Aufgabe ist augenscheinlich mit der Untersuchung der Wahrscheinlichkeit, ein grosses Alter zu erreichen, verknüpft. Sie gehört somit zu den Sterbetafelproblemen. Von den in diesen Tafeln aufgeführten, sogenannten biometrischen Funktionen werden wir im folgenden die Reihe der Überlebenden, die Verteilung der Gestorbenen, die Sterbenswahrscheinlichkeit, die Sterbensintensität, die Lebenskraft und die Lebenserwartung benötigen.

Die Reihe der Überlebenden beginnt für das Alter Null, also den Zeitpunkt der Geburt, mit einer willkürlich gewählten Ausgangszahl, meistens 100 000, und sinkt beim Alter 100 etwa auf eins herab. Über dieses Alter hinaus kann die Reihe aus Mangel an genügenden Beobachtungen nicht fortgesetzt werden. Da alle Menschen einmal sterben, können diese Zahlen auch als die nach Erreichung eines bestimmten Alters Gestorbenen aufgefasst werden. Rechnet man mit der relativen Zahl der Überlebenden, die mit $l(x)$ bezeichnet wird, so beginnt diese Reihe mit 1 und endet mit 0,00001. Diese Werte geben die Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Alter zu erreichen oder nach ihm zu sterben.

Die Differenz zwischen der Zahl derer, die ein Alter x, und derer, die das darauf folgende Alter $x + 1$ erreichen, ist die relative Zahl der im Alter x bis $x + 1$ Gestorbenen. Dividiert man die Zahl der Gestorbenen eines Altersjahres durch die Zahl derer, die den Anfang dieses Alters erreichten, so erhält man die sogenannte Sterbenswahrscheinlichkeit. Die Zahl der in einem kleinen Altersintervall Gestorbenen wird als Verteilung der Gestorbenen über die Alter bezeichnet. Dividiert man die Werte der Verteilung für ein bestimmtes Alter durch die Zahl der Überlebenden dieses Alters, so erhält man eine als Sterbensintensität bezeichnete Funktion. Ihr reziproker Wert heisst Lebenskraft. Nach allen vorliegenden Beobachtungen steigt die Sterbensintensität etwa vom 15. Jahr an ständig, d. h. die Lebenskraft nimmt von da an ständig ab. Endlich benötigen wir noch die sogenannte Lebenserwartung, welche angibt, wieviele Jahre ein Mensch in einem bestimmten Alter im Durchschnitt noch leben wird.

Unser Problem des Grenzalters führte auf die Frage nach dem Verhalten der biometrischen Funktionen für sehr grosse Alter. Bevor wir unsere eigene Lösung angeben, müssen wir uns mit den darüber vorhandenen Theorien auseinandersetzen.

2. Die bisherigen Vorschläge

a) Die biometrischen Funktionen gelten üblicherweise als stetig, d. h. es wird angenommen, dass die Sterbefälle in jedem Alter eintreten. Nimmt man aber an, dass alle Sterbefälle genau am Ende eines Altersjahres eintreten, so ist die Sterbensintensität gleich der Sterbenswahrscheinlichkeit. Diese Auffassung wird als die unstetige bezeichnet.

Betrachtet man die biometrischen Funktionen in der Umgebung des höchsten Alters als unstetig, so hört die Verteilung der Gestorbenen bei einem bestimmten Alter einfach auf. Daher wird die Absterbeordnung exakt gleich Null und ist von da ab nicht mehr definiert. Somit wird man das höchste Alter dadurch bestimmen, dass für das um ein Jahr vorangehende die Sterbenswahrscheinlichkeit gleich Eins ist, so dass alle, die dieses Alter erreicht haben, innerhalb eines Jahres sterben. Diese Definition lässt sich auch innerhalb der üblichen stetigen Auffassung verwenden, nämlich insofern, als angenommen wird, dass für eine bestimmte Tafel ein bestimmtes Grenzalter existiert.

Die bekannte Formel von de Moivre, der älteste analytische Ansatz für die Sterbetafel, enthält diese Auffassung. Danach ist die Zahl der pro Altersjahr Gestorbenen konstant, also die Absterbeordnung eine lineare Funktion des Alters. Von den heute noch verwendeten Formeln sei die von Wittstein erwähnt. Auch sie setzt die Existenz eines endlichen Grenzalters voraus.

Diese Auffassung ist analytisch gesehen durchaus korrekt. Sie stösst nur auf die Schwierigkeit, dass dieses Alter kaum bestimmbar ist bzw. dass man es viel zu hoch ansetzen müsste, um auf alle Fälle sicher zu gehen. Gleicht man etwa die Wittsteinsche Formel mit Hilfe der für die Sterbenswahrscheinlichkeit über dem 100. Jahr beobachteten Werte aus, so gerät man in die Gefahr, unter Umständen einige besonders interessante Fälle von Menschen, die nachweislich sehr alt geworden sind, einfach weglassen zu müssen.

b) Die zweite Auffassung geht im Prinzip davon aus, dass die Absterbeordnung sich nur irgendwie, für hohe Alter aber ziemlich rasch, der Altersachse annähert, dass es aber berechtigt ist, die Absterbeordnung irgendwo als unstetig anzusetzen und anzunehmen, dass die Reihe der Überlebenden dort einfach aufhört. Diese Auffassung liegt den meisten Lehrbüchern der Versicherungsmathematik zugrunde. Sie führt jedoch wie Steffensen [1]) überzeugend ausgeführt hat, zu den grössten logischen Schwierigkeiten. Denn wenn ein solches Alter existiert, so kann niemand es überleben; wogegen für ein beliebig wenig davon verschiedenes, vorangehendes Alter bei genügender Zahl von Beobachtungen immer noch Lebende zu finden sein müssen. Durch genügende Vermehrung der Beobachtungen kann dieser Sprung beliebig gross gemacht werden.

c) Diese Schwierigkeit lässt sich umgehen, wenn man zunächst den Begriff des festen Grenzalters überhaupt fallen lässt und annimmt, dass die Absterbeordnung sich im Prinzip ins Unendliche erstreckt und sich nur asymptotisch der Null nähert. Diese Auffassung erscheint sehr kühn, denn man könnte daraus den voll-

[1]) J. F. Steffensen: Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science. Cambridge University Press, 1930.

kommen unsinnigen Satz ableiten, dass es Menschen geben müsse, die unendlich alt werden. Aber dies folgt keineswegs aus dieser Hypothese, was man schon aus der einfachen Tatsache entnehmen kann, dass die von allen Versicherungspraktikern gern benutzte Gompertz-Makehamsche Formel ja diese Eigenschaft hat, ohne dass diese Konsequenz jemals aus ihr gezogen worden wäre.

Insolera [1]) hat den Vorschlag gemacht, die Absterbeordnung bei demjenigen Alter abzuschneiden, wo die Sterbensintensität den Wert Eins hat. Dieser Ansatz stellt eine Modifikation der ersten Definition dar. Denn die Sterbensintensität erreicht den Wert Eins spätestens bei dem gleichen Alter wie die Sterbenswahrscheinlichkeit. Um diese Methode praktisch anzuwenden, schlägt Insolera zudem noch eine Modifikation der Gompertz-Makehamschen Formel vor, was zu wesentlichen numerischen Komplikationen führt.

Steffensen [2]) hat demgegenüber vorgeschlagen, das Grenzalter durch die Forderung zu definieren, dass alle Werte der Lebenserwartung mindestens auf drei Dezimalstellen genau sein sollen. Da die Sterbensintensität für hohe Alter nicht abnimmt, ist diese Forderung erfüllt, wenn sie etwa für das Alter $x = 100$ gilt. Demnach wird das Grenzalter aus der beobachteten Zahl derer berechnet, welche das 100. Jahr erlebt haben.

Beide Vorschläge führen auf ziemlich langwierige numerische Approximationen. Sie setzen zudem die Kenntnis der Werte der biometrischen Funktionen gerade bei den hohen Altern voraus, wo die Beobachtungen unsicher werden. Diesen und allen bisher gemachten Vorschlägen ist gemeinsam, dass der Wert des höchsten Alters nicht von der Zahl der Beobachtungen abhängt. Dies stellt einen wesentlichen Nachteil dar, da man es als sicher annehmen kann, dass dieses Alter, wie es auch definiert wird, mit der Zahl der Beobachtungen wächst. Endlich fehlt bei all diesen Bestimmungen jedes Kriterium für die Genauigkeit dieses Wertes.

Falls man somit die biometrischen Funktionen als unstetig betrachtet, existiert ein ganz bestimmtes Grenzalter, mit dem eine beliebig grosse Generation von Neugeborenen ausstirbt. Bei der üblichen Auffassung dagegen, wonach die biometrischen Funktionen stetig sind, ist die Feststellung eines solchen Alters für eine beliebig grosse Generation nicht möglich.

3. Neue Definition

Im folgenden werden wir für die übliche stetige Betrachtungsweise eine wahrscheinlichkeitstheoretische Methode aufstellen, um das zu einer bestimmten Zahl von Beobachtungen gehörige Grenzalter festzulegen.

Sobald man nämlich an die Sterbetafel vom Standpunkt der Lehre von den Verteilungen [3]) herangeht und insbesondere annimmt, dass die Verteilung der

[1]) F. Insolera: Una funzione di sopravvivenza. Giornale di Matematica finanziaria, Vol. XII, Nr. 4—6, Torino 1930.

[2]) J. F. Steffensen: Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science. Cambridge University Press, 1930.

[3]) Die Gausssche Verteilung der Gestorbenen. Conrads Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik. 138. Bd., III. Folge, Bd. 83. Jena 1933.

Gestorbenen sich mit wachsendem Alter nur asymptotisch der Null nähert, gewinnt die Frage nach dem Grenzalter ein vollkommen neues Gesicht. Es ist sinnlos, nach einem solchen festen Alter zu suchen. Seine Existenz wird ausdrücklich abgelehnt, und seine künstliche Bestimmung durch analytische Forderungen, welche von bestimmten Werten der biometrischen Funktionen ausgehen, ist zu verneinen. Damit verschwindet jedoch der Begriff des Grenzalters nicht überhaupt, er muss nur neu gefasst werden.

Wir definieren als das theoretische Grenzalter dasjenige Alter, von dem zu erwarten ist, dass aus einer bestimmten Zahl von Beobachtungen einer und nur einer es überlebt. Dieses Alter wird somit von der Zahl der Beobachtungen abhängen. Die Berechnung dieses Wertes geht ausserordentlich einfach vor sich.

Die Wahrscheinlichkeit, nach dem Alter x zu sterben, beträgt $l(x)$. Bei N Beobachtungen ist zu erwarten, dass $N\ l(x)$ Menschen nach diesem Alter sterben. Falls dies mindestens gleich Eins, sind Todesfälle nach diesem Alter, welches im folgenden $\overline{x}_\omega$ genannt wird, noch zu erwarten. Man kann also unter Zugrundelegung einer bestimmten analytischen Formel für die Absterbeordnung, welche kein endliches Grenzalter enthält, durch Auflösung der Gleichung

$$N\,l(x_\omega) = 1 \tag{1}$$

für vorgegebene Werte von N das erwartungsgemässe Grenzalter feststellen.

Dieser Schluss ist noch nicht ganz korrekt. Denn wir verlangen die Bestimmung des Alters, nach dem einer, und nur einer stirbt, während wir dasjenige Alter berechnen, nach dem mindestens einer stirbt. Ferner muss diese Rechnung noch dahin ergänzt werden, dass sie uns ein Mass für die Genauigkeit liefern soll. Wir werden sie daher nach beiden Richtungen hin noch etwas fester unterbauen.

4. Der grösste Wert einer Verteilung

Es ist einleuchtend, dass das hier vorliegende Problem der Bestimmung des grössten Wertes einer Verteilung keineswegs ein reines Sterbetafelproblem ist, vielmehr ganz allgemein bei jeder sich ins Unendliche erstreckenden Verteilung auftritt. Wir werden daher zunächst das allgemeine Problem der Berechnung des grössten Wertes einer beliebigen unbegrenzten Verteilung und der Genauigkeit dieses Wertes für eine grosse Zahl von Beobachtungen betrachten [1]).

Es sei $w(x)$ die Wahrscheinlichkeit einer statistischen Variablen, deren Variationsbereich unendlich sei, derart, dass auch sehr grosse Werte eine endliche, wenn auch sehr kleine Wahrscheinlichkeit besitzen. Eine solche Verteilung hat als charakteristische Grössen den Erwartungswert, also das arithmetische Mittel, den häufigsten Wert, also den Wert, dem die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt, und den Zentralwert, also denjenigen Wert, unterhalb und oberhalb dessen die Hälfte der Verteilung liegt. Die Werte, die oberhalb und unterhalb des Mittelwertes liegen, heissen, wenn man sie vom Mittelwert aus rechnet, Abweichungen. Von den sonstigen charakteristischen Grössen der Verteilung genügt es hier, den mittle-

[1]) Die mathematische Ableitung der hier verwendeten Formeln wird in der Arbeit L'età limite, Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari, Rom 1934, gegeben.

ren Fehler anzuführen, der, wie sein Name besagt, einen Mittelwert der Abweichungen vom Mittelwert darstellt.

Hat man eine Reihe von Beobachtungen einer solchen statistischen Variablen, so ist die Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung dadurch gegeben, dass der beobachtete Mittelwert angenähert gleich dem theoretischen Erwartungswert ist und dass die Beobachtungen sich um ihn etwa so verteilen, wie die Theorie es verlangt. Dies wird dadurch gemessen, dass der theoretische und beobachtete mittlere Fehler angenähert übereinstimmen. Hat man dagegen nur eine Beobachtung, so kann man nicht verlangen, dass sie gleich dem Erwartungswert sei, sondern nur, dass sie sich von ihm um weniger unterscheidet als der dreifache mittlere Fehler, der sich aus der theoretischen Darstellung ergibt. Damit wird der mittlere Fehler zu einem Kriterium der Übereinstimmung von Theorie und Erfahrung.

Als Beispiel einer solchen Verteilung werden wir das sogenannte Gausssche Fehlergesetz betrachten. Dies lohnt aus einem doppelten Grund. Zunächst spielt diese Verteilung in der ganzen Statistik eine fundamentale Rolle. Ferner lässt sie sich auch in der Sterblichkeitstheorie fruchtbar anwenden [1]).

Die Gausssche Verteilung einer statistischen Veränderlichen x um ihren Erwartungswert ξ lautet

$$w(x) = \frac{h}{\sqrt{\Pi}} e^{-t^2} \tag{2}$$

wobei

$$t = h(x - \xi) \tag{3}$$

proportional den Abweichungen ist. Diese Verteilung ist nach beiden Richtungen unbegrenzt. Ferner ist sie symmetrisch. Eine positive Abweichung ist ebenso wahrscheinlich wie eine dem absoluten Betrag nach gleich grosse negative. Endlich ist dieses Gesetz dadurch charakterisiert, dass die drei Mittelwerte: der Erwartungswert, der zentrale und der häufigste Wert, einander gleich sind. Zudem stehen sie zum mittleren Fehler in einer numerisch ein für allemal festgelegten Beziehung, so dass sich der mittlere Fehler aus der Kenntnis des Erwartungswertes berechnen lässt. Die Wahrscheinlichkeit des grössten Wertes lautet

$$w(\xi) = \frac{h}{\sqrt{\Pi}} \tag{4}$$

Sie ist um so grösser, je grösser die Konstante h ist. Deswegen heisst h die Präzision. Je grösser dieses Mass der Genauigkeit, desto kleiner ist der mittlere Fehler.

Es handelt sich für uns nunmehr darum, für eine solche Verteilung $w(x)$, die sich theoretisch ins Unendliche erstreckt, und für N Beobachtungen den grössten Wert zu berechnen. Es ist klar, dass es unter N Beobachtungen eine grösste geben muss. Da unendlich grosse Werte nicht beobachtet werden können, muss der grösste Wert endlich sein.

[1]) La distribuzione dei decessi secondo la legge di Gauss. Giornale dell' Istituto degli Attuari, III, Nr. 3, Roma 1932.

Aus der Kenntnis der Wahrscheinlichkeit $w(x)$ lässt sich die Wahrscheinlichkeit $W(x')$ berechnen, dass die Veränderliche unterhalb eines bestimmten Wertes x' liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei N Versuchen kein Wert auftrete, der grösser ist als dieses x', d. h. dass dieser Wert x' der grösste unter N Versuchen sei, ist gleich der Nten Potenz von $W(x')$. Hieraus lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass der grösste Wert bei N Versuchen bei x' liege. Demnach ist der grösste Wert einer statistischen Veränderlichen bei N Beobachtungen selbst wieder eine statistische Veränderliche mit einem Verteilungsgesetz, das von der ursprünglichen Verteilung und der Zahl der Beobachtungen abhängt. Dies bedeutet, dass es für eine gegebene Verteilung und zu einer vorgegebenen Zahl von Beobachtungen nicht einen bestimmten grössten Wert gibt, dass vielmehr ein ganzer Bereich von grössten Werten möglich ist. Jedem dieser Werte kommt eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass er der grösste sei. Demnach lassen sich für diese Verteilung des grössten Wertes wiederum die üblichen Mittelwerte bestimmen, z. B. der Erwartungswert und der häufigste Wert. Ferner besitzt auch diese Verteilung einen mittleren Fehler. Der Erwartungswert des grössten Wertes ist also der Mittelwert, genommen über diese Verteilung. Die Berechnung führt, wie Mises [1]) gezeigt hat, auf denjenigen Wert $\bar{x}_\omega$ der Veränderlichen, für welchen

$$W(\bar{x}_\omega) = 1 - \frac{1}{N} \tag{5}$$

Diese Methode ist zulässig, wenn die Zahl der Beobachtungen sehr gross ist und wenn die Wahrscheinlichkeit eines Wertes oberhalb von x mit wachsenden Werten von x sehr rasch, nämlich stärker als die Exponentialfunktion, gegen Null geht.

Wir fragen nunmehr nach demjenigen Wert der Verteilung des grössten Wertes, der die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt. Untersuchten wir vorher den mittleren, so diesmal den wahrscheinlichsten grössten Wert. Er ergibt sich nach bekannten Regeln der Differentialrechnung. Falls die Zahl der Beobachtungen gross genug ist, derart, dass eine weitere Bedingung, nämlich

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = -\frac{w(x)}{1 - W(x)} \tag{6}$$

erfüllt ist, erhalten wir hiefür wieder die Gleichung (5). Diese zweite Bedingung stellt nur eine andere Form der zur Berechnung von unbestimmten Quotienten verwendeten Regel dar.

Der wahrscheinlichste grösste Wert ergibt sich also aus derselben Gleichung wie der mittlere grösste Wert. Anders ausgedrückt: Der Erwartungswert fällt bei wachsender Zahl der Versuche mit dem häufigsten grössten Wert zusammen. Daher ist die Annahme berechtigt, dass die Verteilung des grössten Wertes selbst zum mindesten in erster Näherung Gaussisch ist.

Diese Annahme erlaubt, den mittleren Fehler der Verteilung des grössten Wertes angenähert zu berechnen. Denn danach kann man für die Wahrscheinlich-

[1]) R. von Mises: Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 5. Oktober 1922.

keit des Erwartungswertes des grössten Wertes den Gaussschen Ausdruck (4) ansetzen, in dem der mittlere Fehler auftritt. So erhält man für den mittleren Fehler σ der Verteilung des grössten Wertes den folgenden Ausdruck:

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{N w(\bar{x}_\omega)} \tag{7}$$

Darin sind e und Π zwei bekannte Zahlen. N ist die Zahl der Beobachtungen und $w(\bar{x}_\omega)$ die Wahrscheinlichkeit, die der erwartungsgemässe grösste Wert in der ursprünglichen Verteilung besitzt. Während N sehr gross, ist $w(\bar{x}_\omega)$ sehr klein. Das Produkt beider Grössen ist aber endlich.

Der so abgeleitete erwartungsgemässe grösste Wert und der mittlere Fehler gelten für genügend grosse Zahl der Beobachtungen und für jede unbegrenzte Verteilung, welche den beiden angeführten Bedingungen genügt.

Bei dieser Gleichsetzung der Verteilung des grössten Wertes mit einer Gaussschen Verteilung handelt es sich aber nur um eine erste Näherung. Denn der Zentralwert der Verteilung des grössten Wertes liegt stets oberhalb des Erwartungswertes, während bei einer Gaussschen Verteilung auch diese beiden Grössen einander gleich sein müssen.

Innerhalb unserer Ableitung des erwartungsgemässen grössten Wertes einer Verteilung und des zugehörigen mittleren Fehlers haben wir über die Natur dieser Verteilung selbst nur vorausgesetzt, dass sie keine obere Grenze besitzt, sich vielmehr theoretisch ins Unendliche erstreckt und sich dort asymptotisch, und zwar sehr stark, der Null nähert; endlich dass für ihre erste Ableitung die Bedingung (6) erfüllt ist.

Es liegt nahe, diese Sätze zunächst auf die Gausssche Verteilung selbst anzuwenden, um den hierbei zu erwartenden grössten Wert und den zugehörigen mittleren Fehler zu bestimmen. Der zu einer gegebenen Anzahl N gehörige, erwartungsgemässe höchste Wert von t, der mit $\bar{t}_\omega$ bezeichnet wird, ergibt sich nach (5) aus

$$\Phi(\bar{t}_\omega) = 1 - \frac{2}{N} \tag{8}$$

wobei Φ das sogenannte Gausssche Integral, für welches Tabellen existieren. Für eine gegebene Zahl N von Beobachtungen berechnet man zunächst den Wert $\bar{t}_\omega$. Der erwartungsgemässe grösste Wert $\bar{x}_\omega$ der Veränderlichen x wird dann durch Umkehrung der Gleichung (3) zu

$$\bar{x}_\omega = \xi + \frac{\bar{t}_\omega}{h} \tag{9}$$

Die beiden Forderungen, welche wir an die Ausgangsverteilung stellten, sind bei der Gaussschen Funktion erfüllt, die zweite allerdings nur, wenn die Zahl der Beobachtungen etwa 100 000 ist. Für wesentlich kleinere Zahlen muss man die umständliche Berechnung verwenden, welche L. von Bortkiewicz aufgestellt

hat [1]). Der erwartungsgemässe grösste Wert wächst mit der Zahl der Beobachtungen, aber nur ausserordentlich langsam.

Der mittlere Fehler der Verteilung des grössten Wertes wird dann

$$\sigma = \frac{0{,}54222}{h\bar{t}_\omega} \tag{10}$$

Je grösser also der erwartungsgemässe grösste Wert, desto kleiner ist sein mittlerer Fehler. Daher nimmt der mittlere Fehler des grössten Wertes, wenn auch sehr langsam, mit der Zahl der Beobachtungen ab. Je grösser der mittlere Fehler der ursprünglichen Verteilung, um so grösser ist auch der mittlere Fehler der Verteilung des grössten Wertes. Mit wachsender Zahl der Versuche wächst die Wahrscheinlichkeit des erwartungsgemässen grössten Wertes, wenn auch immer langsamer. Dies bedeutet, dass ein immer wachsender Teil der Verteilung ganz eng um den wahrscheinlichsten Wert liegt, dass also mit wachsender Zahl der Beobachtungen eine immer kleinere Umgebung des wahrscheinlichsten Wertes bereits die ganze Verteilung umfasst.

5. Theoretische Bestimmung des Grenzalters

Um diese Resultate auf unser Problem des Grenzalters anzuwenden, muss zunächst die biometrische Bedeutung der hier auftretenden Symbole und Sätze festgestellt werden.

Als statistische Variable x figuriert das Alter, dessen Variationsbereich von Null bis Unendlich reicht; als Verteilung $w(x)$ die in kleinen Altersintervallen Gestorbenen. Die beiden in Kapitel 4 gestellten Bedingungen lassen sich in die eine zusammenfassen, dass die Lebenskraft $\Lambda(x)$ asymptotisch nach Null geht, was bei der üblichen Auffassung von den biometrischen Funktionen stets erfüllt ist. Dann ergibt sich das theoretische Grenzalter aus der früher abgeleiteten Formel (1) und der mittlere Fehler aus

$$\sigma = \frac{e}{\sqrt{2\,\Pi}}\,\Lambda(\bar{x}_\omega) \tag{11}$$

wobei $\Lambda(\bar{x}_\omega)$ der Wert der Lebenskraft für dieses endliche Alter.

Um diese Formel numerisch verwenden zu können, muss nunmehr noch eine bestimmte analytische Annahme über die biometrischen Funktionen gemacht werden, welche kein endliches Grenzalter enthält. Als solche steht zunächst die Gompertz-Makehamsche Formel zur Verfügung, die unseren Bedingungen genügt. Gegen die praktische Verwendung dieser Formel spricht, dass die Berechnung numerisch langwierig ist. Ferner ist die Konstantenbestimmung hier bekanntlich schwierig. Entscheidend aber ist, dass die Werte der Konstanten in starker Weise von den Altersgruppen abhängen, mit deren Hilfe sie bestimmt werden. Wählt

[1]) L. von Bortkiewicz: Variationsbreite und mittlerer Fehler, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1922. Die Variationsbreite beim Gaussschen Fehlergesetz, Nordisk Statistik Tidskrift, Bd. 1, 1922.

man zur Bestimmung der Konstanten die höchsten Altersklassen, wie dies z. B. für die Tafel Deutsches Reich, männlich, 1891—1900 [1]), geschehen ist, so erhält man Werte von vollkommen anderer Grössenordnung, als wenn man, wie dies üblich, die mittleren Altersklassen wählt. Da nun natürlich eine Formel nur dann verwendet werden kann, wenn sie für die höchsten Altersklassen auch stimmt, würde eine Anwendung der Gompertz-Makehamschen Formel voraussetzen, dass die Konstanten neu berechnet werden. Aus begreiflichen Gründen wurde also die Formel nicht verwandt.

Keines dieser Argumente spricht gegen die Lexissche Formel. Sie ist gerade für die höchsten Alter geeignet, und die Konstantenbestimmung ist sehr einfach. Dieser Ansatz besagt, dass es ein Normalalter ξ gibt und dass die Verteilung der Gestorbenen um dieses Alter Gaussisch ist.

Zur Anwendung dieser Methode benötigt man den Wert des Normalalters ξ, die Wahrscheinlichkeit $l(\xi)$ nach diesem Alter zu sterben, und die Präzision h. Die Berechnung dieser drei Grössen geht folgendermassen vor sich: Man bezeichne die in der Absterbeordnung angeführten Zahlen der Gestorbenen des Altersjahres x bis $x + 1$ mit $D(x)$ und mit m das Altersjahr, welches das Maximum der Gestorbenen aufweist. Dann ist

$$\xi = m + \frac{1}{1 + \delta} \tag{12}$$

wobei

$$\delta = \frac{D(m) - D(m+1)}{D(m) - D(m-1)} \tag{13}$$

Mit genügender Annäherung ergibt sich dann $l(\xi)$ durch lineare Interpolation aus den in der Sterbetafel angeführten Werten $l(m)$ und $l(m + 1)$. Zur Berechnung von h dient die Beziehung

$$\frac{1}{h} = E(\xi)\sqrt{\Pi} \tag{14}$$

wobei $E(\xi)$ die Lebenserwartung des Normalalters. Man ermittelt sie mit genügender Annäherung durch lineare Interpolation aus den in der Sterbetafel angeführten Werten $E(m)$ und $E(m + 1)$.

Bezeichnet man die Zahl der Gestorbenen, welche bei der Aufstellung der Sterbetafel verwendet wurde, mit D, so ist die Zahl der nach dem Normalalter Gestorbenen $D\,l(\xi)$. Wegen der Symmetrie des Gaussschen Gesetzes ist die Zahl N der Beobachtungen gleich der doppelten Zahl der nach dem Normalalter Gestorbenen. Somit berechnet man für bekannte Werte von D und $l(\xi)$ zunächst die Grösse $\bar{t}_\omega$ aus (8), d. h. aus

$$\Phi(\bar{t}_\omega) = 1 - \frac{1}{D\,l(\xi)} \tag{15}$$

[1]) Statistik des Deutschen Reiches, Bd. 200, S. 21.

mit Hilfe der üblichen Tabellen des Gaussschen Integrals. Das Grenzalter $\bar{x}_\omega$ ergibt sich dann wieder aus (9) und der mittlere Fehler aus (10). Zu dieser Bestimmung ist nur notwendig, dass die beobachtete Zahl der Gestorbenen bekannt und etwa von der Grössenordnung 200 000 ist. Demnach lässt sich unsere Methode bei allen auf Volkszählungsergebnissen beruhenden Sterbetafeln anwenden.

Nach dieser Theorie hängt das für eine bestimmte Sterbetafel zu erwartende Grenzalter von drei Faktoren ab, nämlich dem normalen Alter beim Tod ξ, der Lebenserwartung in diesem Alter $E(\xi)$ und der Zahl der Beobachtungen N, worunter die doppelte Zahl derer zu verstehen ist, welche nach dem Normalalter verstorben sind. Jede Erhöhung des Normalalters erhöht das Grenzalter um den gleichen Betrag. Eine Erhöhung der Lebenserwartung des Normalalters wirkt auf das Grenzalter um so stärker, je grösser die Zahl der Beobachtungen. Bei gleichem Normalalter und Lebenserwartung des Normalalters wächst das Grenzalter um so mehr, je grösser die Zahl der Beobachtungen ist. Doch ist diese Wirkung nur ausserordentlich schwach.

Was den mittleren Fehler betrifft, so wächst er proportional mit der Lebenserwartung des Normalalters. Da diese aber im allgemeinen um so geringer ist, je grösser das Normalalter, wird der mittlere Fehler des Grenzalters mit wachsenden Werten des Normalalters fallen. Eine Vermehrung der Zahl der Beobachtungen und der Wahrscheinlichkeit, das Normalalter zu erreichen, wird dagegen nur einen ganz geringen Einfluss auf den mittleren Fehler haben.

6. Vergleich mit amerikanischen Beobachtungen

Es gilt nun, diese Theorie anzuwenden und mit den Beobachtungen zu vergleichen. Hierzu benötigen wir für die betreffende Sterbetafel die Werte der Absterbeordnung, der Gestorbenen und der verlebten Zeit in der Umgebung des Normalalters. Ferner brauchen wir aus den Registern die Zahl der beobachteten Toten, welche bei der Konstruktion der Tafel verwendet wurde, und zur Kontrolle unserer Rechnung dasjenige Jahr, nach dessen Erreichung der Älteste gestorben ist. Die beiden letzten Angaben sind in den Sterbetafeln in der Regel nicht angeführt. Sie finden sich jedoch in der Zusammenstellung von Glover [1]) für eine Reihe amerikanischer Tafeln.

Wir übernehmen im folgenden diese Angaben des beobachteten höchsten Alters und vergleichen sie mit unserer Theorie. Die Kritik dieser Zahlen ist nicht unsere Aufgabe; wir müssen die Verantwortung für sie den amerikanischen Statistikern überlassen. Auch ist prinzipiell unsere allgemeine Theorie des Grenzalters (1) und (7) von ihrer speziellen Anwendung auf die Lexissche Formel (9), (10) und (15) zu trennen.

Zunächst wird die Berechnung des Grenzalters und des mittleren Fehlers in allen Einzelheiten für die dort [1]) angeführte Tafel U. S. A. m. 1910 durchgeführt.

[1]) United States Life Tables 1890, 1901, 1910, 1901/10. Washington, Government Printing Office, 1921.

Sterbetafel U. A. S. m. 1910

Alter	Absterbeordnung	Gestorbene	Differenz	Lebenserwartung	Differenz
x	$l(x)$	$D(x)$		$E(x)$	
72	0,27134				
		0,01969			
73	0,25165		0,00008	7,53062	
		0,01977			0,40060
74	0,23188		0,00002	7,13002	
		0,01975			
75	0,21213				

Hieraus ergibt sich $m = 73$ und nach (13) $\delta = \frac{1}{4}$.

Daher ist das Normalalter nach (12) $\xi = 73{,}8$.
Durch lineare Interpolation ergibt sich die Erlebenswahrscheinlichkeit dieses Alters

$$l(\xi) = 0{,}23583$$

ebenso die Lebenserwartung des Normalalters

$$E(\xi) = 7{,}21014$$

Hieraus folgt für die Präzision nach (14)

$$\frac{1}{h} = 12{,}77964$$

Für diese Tafel sind die Angaben über 586051 Gestorbene verwendet worden. Demnach lautet die Zahl der Beobachtungen

$$D\,l(\xi) \cdot 10^{-6} = 0{,}138208.$$

Das dazu gehörige $\bar{t}_\omega$ ergibt sich aus der Gaussschen Tabelle durch Interpolation als

$$\bar{t}_\omega = 3{,}17247$$

Daher wird das erwartungsgemässe Grenzalter nach (9)

$$\begin{aligned}\bar{x}_\omega &= 73{,}8 + 3{,}17247 \cdot 12{,}77964 \\ &= 114{,}34\end{aligned}$$

Nach den Beobachtungen sind die fünf Ältesten im Alter 110 bis 111 gestorben. Wenn man eine gleichmässige Verteilung über die Zeit annimmt, kann somit das beobachtete Alter, nach welchem nur mehr einer gestorben ist, als 110,8 angenommen werden. Die Berechnung gibt also einen um 3,54 Jahre zu hohen Wert. Aber der mittlere Fehler beträgt nach (10)

$$\sigma = 2{,}184$$

Die Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung beträgt also das 1,62fache des mittleren Fehlers, was eine durchaus zulässige Grösse ist.

Diese Berechnung konnte nicht für alle bei Glover angeführten Tafeln durchgeführt werden. Zunächst fielen diejenigen Tafeln weg, bei denen die Zahl der Beobachtungen unterhalb der für die Zulässigkeit unserer Theorie notwendigen Grenze lag.

Bei anderen Tafeln entstand die Schwierigkeit, dass der älteste Mensch ein Neger war. Angesichts der bekannten Unzuverlässigkeit in der Registrierung der Neger liessen sich solche Tafeln nicht verwenden. So ist der älteste Neger des Jahres 1901 im Alter von angeblich 128 Jahren gestorben, während der älteste Weisse 119 Jahre erreichte. Die beiden ältesten Negerinnen im Jahre 1910 starben angeblich im Alter von 120 Jahren, wogegen die älteste Weisse das Jahr 117 erreichte. Aus diesem Grund wurde für die Männer im Jahre 1901 und für die Frauen 1910 nur die weisse Bevölkerung verwendet. Für die Männer des Jahres 1910 liess sich die Berücksichtigung der Neger rechtfertigen. Denn die drei ältesten Weissen und die beiden ältesten Neger des Jahres 1910 starben im Alter von 110 Jahren.

Ferner ist zu beachten, dass die einzelnen, bei Glover aufgeführten Tafeln nicht voneinander unabhängig sind. So ist die älteste Frau, welche im Jahre 1910 in New York gestorben ist, gleichzeitig die älteste Frau, die im Jahre 1910 in den Städten gestorben ist, und auch die älteste im Ausland geborene Frau. Sie könnte auch gleichzeitig die älteste Frau des Jahres 1910 überhaupt gewesen sein; kurz, die in verschiedenen Tabellen auftretenden Ältesten sind miteinander identisch. Um diesen störenden Faktor auszuschalten, sind die Tafeln in der folgenden Tabelle nach voneinander unabhängigen Gruppen geordnet. Die erste Spalte enthält das beobachtete Grenzalter, also dasjenige Alter, nach welchem nur mehr einer gestorben ist. Dabei wurde, wenn mehrere im letzten Jahr verstorben sind, eine gleichmässige Verteilung über dieses Alter angenommen. Die zweite Spalte gibt das berechnete Grenzalter nach (9) an, die dritte enthält den nach (10) berechneten mittleren Fehler, die letzte die Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung, ausgedrückt durch den mittleren Fehler.

Beobachtetes und berechnetes Grenzalter

Tafel U. S. A.	Grenzalter beobachtet	Grenzalter berechnet	Mittlerer Fehler	Relativer Fehler
Weisse Bevölkerung nach Geschlecht und Herkunft 1901 und 1910				
native female 1901	112,0	112,581	1,972	0,295
native male 1901	119,0	111,748	2,016	— 3,61
foreign born 1901	114,0	113,701	2,359	— 0,339
native female 1910	111,0	113,077	2,019	1,03
native male 1910	109,0	111,973	2,032	1,461
foreign born female 1910. .	117,0	114,879	2,613	0,982
foreign born male 1910 . .	110,67	114,831	2,638	— 1,56

Tafel U. S. A.	Grenzalter beobachtet	Grenzalter berechnet	Mittlerer Fehler	Relativer Fehler
Weisse Bevölkerung nach dem Geschlecht 1901 und in Stadt und Land 1910				
female 1901	114,0	114,812	2,153	0,378
male 1901	119,0	112,959	2,091	— 2,89
rural male 1910	110,5	111,362	2,075	0,415
rural female 1910	111,5	112,831	2,143	0,621
cities male 1910	110,0	117,103	2,703	2,63
cities female 1910	117,0	117,549	2,576	0,213
Weisse Bevölkerung 1910				
female	117,0	117,161	2,325	0,0692
male	110,67	114,033	2,163	1,55
Gesamtbevölkerung 1901 und 1910				
female 1901	114,0	115,110	2,172	0,512
male 1910	110,8	114,343	2,184	1,62
Stadt New York 1910				
female	117,0	116,405	2,596	— 0,229
male	110,0	115,262	2,602	2,02

Bei der Frage der Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Grenzalter ist zu beachten, dass die Beobachtungen unsicher sind, zudem, dass das Problem der theoretischen Berechnung einigermassen kompliziert ist. Daher ist kaum mehr als eine Übereinstimmung der Grössenordnung nach zu erwarten.

Die erste Gruppe enthält sieben unabhängige Beobachtungen. In vier Fällen gibt die Theorie einen zu grossen Wert. Die Verteilung der Vorzeichen der Abweichungen entspricht also der Erwartung. Die Grösse der Abweichungen ist bis auf einen Wert —3,61, der die grösste überhaupt vorkommende Abweichung darstellt, befriedigend. In der zweiten Gruppe von sechs unabhängigen Werten gibt die Theorie in fünf Fällen ein zu grosses Ergebnis. Die letzte Gruppe befriedigt dagegen in bezug auf die Verteilung der Vorzeichen der Fehler.

Betrachtet man die einzelnen Tafeln als unabhängig, was, wie gezeigt, nicht der Fall, so beträgt die Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung im Durchschnitt das 0,8fache des mittleren Fehlers. Nur in einem Fall wird der dreifache mittlere Fehler überschritten.

Die Übereinstimmung zwischen beiden Reihen darf als befriedigend betrachtet werden. Allerdings treten etwas zuviele positive Fehler auf. Denn bei den 19 beobachteten Werten existieren 14 positive und nur fünf negative Abweichungen. Die Theorie scheint also einen etwas zu grossen Wert des Grenzalters zu ergeben.

Zusammenfassung

Wir verwerfen die übliche Theorie über das Grenzalter und die bisher gemachten Vorschläge zu einer approximativen Bestimmung. Wir nehmen an, dass die Verteilung der Gestorbenen sich ins Unendliche erstreckt und sich nur asymptotisch der Null nähert. Dementsprechend definieren wir das höchste Alter als dasjenige Alter, von dem bei einer vorgegebenen endlichen Zahl von Beobachtungen zu erwarten ist, dass höchstens einer es überlebe. Damit eine bestimmte Formel für diese Berechnung verwendbar sei, muss in ihr die Lebenskraft asymptotisch nach Null gehen. Dies gilt insbesondere für die Lexissche Formel, welche auf folgendes Verfahren führt:

Für eine bestimmte Sterbetafel ermittelt man das Maximum der jährlich Gestorbenen und die Differenzen mit den beiden Nachbarwerten. So erhält man das Normalalter ξ. Ferner ermittelt man die zugehörige Erlebenswahrscheinlichkeit $l(\xi)$ und Lebenserwartung $E(\xi)$. Für die einer Sterbetafel zugrunde liegende Zahl von Gestorbenen berechnet man $N = 2\,D\,l(\xi)$. Dann gibt die Tabelle des Gaussschen Integrals [1]) das zugehörige reduzierte Grenzalter $\bar{t}_\omega$. Das erwartungsgemässe Grenzalter ergibt sich dann aus (9) und der mittlere Fehler aus (10).

Während alle bisherigen Vorschläge das Grenzalter mit Hilfe der naturgemäss unsicheren Beobachtungen in den höchsten Altern bestimmen, hat unsere Theorie den Vorzug, dass nur die Angaben in der Umgebung des Normalalters verwendet werden, wo die beobachteten Zahlen noch als durchaus sicher gelten können. Obwohl sich das Problem schliesslich auf das Leben einer einzelnen Person zuspitzt, also scheinbar — aber nur scheinbar — ausserhalb der auf Massen beruhenden Wahrscheinlichkeitstheorie steht, trotz der Einfachheit des analytischen Ansatzes und trotz der dabei vorgenommenen erheblichen Vernachlässigung, ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung ausgezeichnet. Die numerischen Beispiele ergeben somit, dass die paradox erscheinende Auffassung, wonach es kein endliches Grenzalter derart gibt, dass die Überlebensordnung hier aufhört, mit den Beobachtungen gut übereinstimmt. Damit sind alle Argumente widerlegt, die auf der Existenz eines solchen Alters beruhen.

[1]) E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd. I. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1924, S. 455.