# Zur Bedeutung und Bearbeitung von Altersangaben in der Statistik

Von Dr. *O. Schenker*, Bern

---

Gottlieb Schnapper-Arndt sagt in seiner, mit viel Geist geschriebenen, Sozialstatistik: «Die Kenntnis von der Alterszusammensetzung ist eine Kenntnis von erster Wichtigkeit. Die Alterszusammensetzung bestimmt die physische, ökonomische und intellektuelle Struktur eines sozialen Körpers in hervorragendster Weise. Ihre Kenntnis ist zum Verständnis einer grossen Zahl gerade im alltäglichen Leben kursierender Ziffern auf das dringendste erforderlich; man denke nur an die sogenannten Geburts-, Heirats-, Sterbe-, Krankheits-, Kriminalitäts- und dgl. Ziffern [1].» Ganz ähnlich lautet ein Urteil von Dr. Otto Most: «Kaum weniger bedeutsam als die Geschlechtsgliederung einer Bevölkerung ist ihr Altersaufbau. Er ist bestimmend für die wirtschaftliche, soziale, geistige und politische Entwicklung und Entwicklungsmöglichkeit. Je nach dem Anteil der einzelnen, teils mehr, teils weniger arbeitsfähigen Altersklassen muss das wirtschaftliche Leben eines Volkes ein anderes Gesicht haben. Die Stärke und Eigenart des intellektuellen Schaffens wird beeinflusst von dem zahlenmässigen Verhältnisse zwischen Lehrenden und Lernenden [2].» Die Altersgliederung eines Volkes hängt von vier Faktoren ab; diese sind 1. die Geburtenhäufigkeit, 2. die Sterblichkeit, 3. die Verteilung nach dem Geschlecht, 4. die Wanderungsbewegung. Alle vier Komponenten müssen bei der Konstruktion von Sterbetafeln berücksichtigt werden. Die Mortalitätstafeln geben uns also in verdichteter Form Auskunft über Werden und Vergehen der Produzenten und Konsumenten und bilden überhaupt, zusammen mit der Bevölkerungsstatistik, den wichtigsten Aufgabenkreis der Statistik; der Mensch ist eben die Voraussetzung aller sozialen Vorgänge. In seinem Votum zu einem Referat von Direktor Ney sel. («Les variations de la mortalité de la population suisse d'après les tables de mortalité») vertrat Direktor Schaertlin den Standpunkt, «dass es für das statistische Bureau wohl keine wichtigere Aufgabe geben könne als die Forschung über die Bevölkerungsstatistik und die Untersuchungen über die Mortalität; er möchte dringend raten, dass sich das statistische Bureau niemals von der Erfüllung dieser hohen Aufgabe abwendig machen lasse» [3].

---

[1]) Dr. Gottlieb Schnapper-Arndt: Sozialstatistik, Leipzig, 1908, S. 112.

[2]) Dr. Otto Most: Bevölkerungswissenschaft, in Sammlung Göschen, 1913, S. 89.

[3]) Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Heft 22, 1927, S. XV.

Die Sterblichkeitsstatistik nahm ihren Ursprung in England und ist verknüpft mit den Namen John Graunt, William Petty und namentlich von Edmund Halley. Die Royal Society (gegründet 1663) hatte ein «Concept» gemacht, durch eine «mathematische Invention und vermittelst der Arithmetica» Untersuchungen über die Lebensdauer der Menschen an verschiedenen Orten und über die Einwohnerzahl verschiedener Städte anzustellen. Daher wandte sich Justell, als Sekretär der Gesellschaft, nach Breslau; diese Stadt war durch korrekt geführte Sterberegister bekannt und durch eine stabile Bevölkerung ausgezeichnet: Zufolge der Binnenlage, weit abseits vom Meer, fehlten die störenden Wanderungen fast ganz, die jährlichen Geburten überstiegen nur wenig die Todesfälle. Halley durfte darum die durch Caspar Neumann übermittelten Totenregister von Breslau zu Zwecken der Sterblichkeitsmessung als besonders geeignet betrachten. Um die Verdienste des berühmten Kometensuchers, als Begründer der Mortalitätstafeln, richtig würdigen zu können, reproduzieren wir hier die Halleyschen Tafeln mit wenigen Abweichungen formeller Natur [1]).

### 1. Die absoluten Zahlen der Gestorbenen in nachbenannten Altersjahren:

(Im *1.* Jahre inklusive Totgeborene 348, im *2.*—*6.* Jahre durchschnittlich 198).

| |
|---|
| 7 . 8 . 9 . . . . . 14 . . . . . 18 . . . 21 . . . . . 27 . 28 . . . 35 . |
| 11 . 11 . 6 . 5½ . 2 . 3½ . 5 . 6 . 4½ . 6½ . 9 . 9 . 7 . 7 |

| |
|---|
| 36 . . . . . 42 . . . 45 . . . 49 . . . . . 54 . 55 . 56 . . . . 63 . . . . |
| 8 . 9½ . 8 . 9 . 7 . 7 . 10 . (10½) . 11 . 9 . 9 . 10 . 12 . 9½. |

| |
|---|
| . 70 . 71 . 72 . . . . . 77 . . . 81 . . . 84 . . . 90 . 91 . . . 98 . 99 . 100. |
| . 14 . 9 . 11 . 9½ . 6 . 7 . 3 . 4 . 2 . 1 . 1 . 1 . (1) . 0 . $^1/_5$ . $^3/_5$. |

Im Original fehlen zwischen den Altern 49 und 54 sowie 91 und 98 Zahlen für die Gestorbenen. Wir haben diese Lücken durch (10½) und (1) ausgefüllt.

[1]) Dr. J. Graetzer: Edmund Halley und Caspar Neumann, ein Beitrag zur Geschichte der Bevölkerungsstatistik, Breslau, 1883, S. 76.

2. Die Absterbenden in nachbenannten Altersjahren:

| Laufendes Alter | Personen | Laufendes Alter | Personen | Laufendes Alter | Personen | Laufendes Alter | Personen | Laufendes Alter | Personen | Laufendes Alter | Personen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1000 | **15** | 628 | **29** | 539 | **43** | 417 | **57** | 272 | **71** | 131 |
| **2** | 855 | **16** | 622 | **30** | 531 | **44** | 407 | **58** | 262 | **72** | 120 |
| **3** | 798 | **17** | 616 | **31** | 523 | **45** | 397 | **59** | 252 | **73** | 109 |
| **4** | 760 | **18** | 610 | **32** | 515 | **46** | 387 | **60** | 242 | **74** | 98 |
| **5** | 732 | **19** | 604 | **33** | 507 | **47** | 377 | **61** | 232 | **75** | 88 |
| **6** | 710 | **20** | 598 | **34** | 499 | **48** | 367 | **62** | 222 | **76** | 78 |
| **7** | 692 | **21** | 592 | **35** | 490 | **49** | 357 | **63** | 212 | **77** | 68 |
| **8** | 680 | **22** | 586 | **36** | 481 | **50** | 346 | **64** | 202 | **78** | 58 |
| **9** | 670 | **23** | 579 | **37** | 472 | **51** | 335 | **65** | 192 | **79** | 49 |
| **10** | 661 | **24** | 573 | **38** | 463 | **52** | 324 | **66** | 182 | **80** | 41 |
| **11** | 653 | **25** | 567 | **39** | 454 | **53** | 313 | **67** | 172 | **81** | 34 |
| **12** | 646 | **26** | 560 | **40** | 445 | **54** | 302 | **68** | 162 | **82** | 28 |
| **13** | 640 | **27** | 553 | **41** | 436 | **55** | 292 | **69** | 152 | **83** | 23 |
| **14** | 634 | **28** | 546 | **42** | 427 | **56** | 282 | **70** | 142 | **84**[1] | 20 |

[1]) Mutmassliche Fortsetzung:

| Alter . . . . | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Personen. . . | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

3. Die Lebenden in den respektiven Altersklassen:

| Alter | Personen | Alter | Personen | Alter | Personen | Alter | Personen | Alter | Personen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7** | 5547 | **28** | 3964 | **49** | 2709 | **70** | 1204 | **100** | 107 |
| **14** | 4584 | **35** | 3604 | **56** | 2194 | **77** | 692 | Total | 34.000 |
| **21** | 4270 | **42** | 3178 | **63** | 1694 | **84** | 253 | | |

Professor Kinkelin äusserte sich in einem Briefe vom 19. November 1908 über die Tafeln von Halley, wie folgt: ... «Was nun die Mortalitätstafel von Halley selbst anbelangt, so ist sie, wie er selbst ausdrücklich sagt, auf die Voraussetzung gegründet, dass die jährliche Geburtenzahl konstant sei, was man bei Breslau aus den von ihm angegebenen Gründen wohl annehmen dürfe. Unter dieser Voraussetzung ist seine Methode nicht anfechtbar. Wenn andere von ihr einen unrechten Gebrauch machten in Fällen, wo jene Voraussetzung offenbar nicht zutrifft, so ist er daran völlig unschuldig.»

«Wie hat Halley seine Tafel (2.) aus den Beobachtungen (Tafel 1.) von Neumann abgeleitet?»

«Über die Lebensjahre unter dem 7. teilt er mit Bezug auf die beobachteten Sterbefälle mit, dass von den 1238 jährlich Geborenen 890 ein Jahr alt werden. Daraus schliesst er, wie Farr (Anhang zum 6. Bericht des Registrar General,

S. 558) gewiss richtig vermutet, dass im 1. Jahr die Zahl der Lebenden das Mittel aus diesen beiden Zahlen, nämlich 1064 betrage, was Halley auf 1000 abrundet, wohl mit Rücksicht darauf, dass die Sterblichkeit im ersten Halbjahre grösser ist als im zweiten. Über das 2. Jahr besteht nur die Mitteilung, dass es mit 890 Lebenden beginnt. Da an dieser Stelle in der Mortalitätstafel nur die Zahl 855 steht, so ist anzunehmen, dass sie auf gleiche Weise aus den Zahlen vom Anfang (890) und vom Ende des Jahres (820?) hergeleitet wurde. Demnach bezeichnet die mit „Laufendes Alter" überschriebene erste Kolonne die Ordinalzahl des Lebensalters, und die zweite Kolonne die Zahl der während des betreffenden Lebensjahres durchschnittlich Lebenden. Über die Aufstellung der Tafel sodann bis zum 7. Jahre gibt Halley keine andern Aufschlüsse ausser der Bemerkung, dass „692 der Geborenen über 6 Jahre alt werden", d. h. das 7. Lebensjahr erreichen. Im Widerspruch mit dem Vorgehen in den ersten Lebensjahren setzt er nun diese Zahl 692 selbst in die Mortalitätstafel ein, anstatt sie in Verbindung mit der Zahl des 8. Lebensjahres ebenfalls zu reduzieren. Aus welchen Gründen er so die mittlere Zahl der im 7. Lebensjahr Lebenden durch die Zahl der 6 Jahre alten ersetzt hat, ist nicht ersichtlich. Die auf das 7. Lebensjahr folgenden Zahlen der Lebenden sind alle durch schätzungsweise Ausgleichung aus der Tabelle (1.) der Neumannschen Sterbeziffern entstanden, so dass in der Tat die bezeichnete Abweichung im 7. Lebensjahre von keiner Bedeutung ist.»

Dieses Schätzungsverfahren ist durchaus nicht identisch mit der fälschlich nach Halley benannten Methode zur Herleitung von Sterbetafeln, welche darin besteht, durch kumulative Addition der nach zurückgelegten Altern geordneten Verstorbenen desselben Beobachtungsjahres die Überlebensordnung zu bestimmen. Allerdings wird auch hier eine stabile Bevölkerung vorausgesetzt, wie die nachfolgende Skizzierung zeigt: Eine Sterbetafel gibt an, wie viele von je 1000 Geborenen einer wirklichen oder hypothetischen Generation das Alter 1, 2, 3 ... $w$ (höchstes Alter) erreichen; es liegt am nächsten, eine wirkliche Generation zugrunde zu legen, d. h. die Geborenen einer Geburtenstrecke (z. B. eines Jahres); aber diese Methode erfordert im Maximum eine 100jährige Beobachtung der Überlebenden aus der Geburtengeneration. Praktisch anwendbar ist dieses Verfahren daher bloss auf die Kindersterblichkeit, obwohl dagegen vom theoretischen Standpunkt aus keine Einwendungen gemacht werden können; damit verwandt, aber nicht so genau ist die Hermannsche Methode: die Gestorbenen zwischen zwei aufeinanderfolgenden zurückgelegten Altern gehören demselben Beobachtungsjahr, aber zwei verschiedenen Geburtsstrecken an; auch hier ist eine 100jährige Beobachtung notwendig, um die vollständige Absterbeordnung einer wirklichen Generation zu erhalten. Eine den modernen hygienischen und sozialen Verhältnissen Rechnung tragende Methode muss ihre Beobachtungen auf eine kleine Zahl von Jahren beschränken; hiezu hatte Halley, mit einem bewunderungswürdigen Scharfsinn, bereits den Weg gewiesen [1]). Wir beschränken unsere Beobachtungen auf ein Jahr; in dessen Verlaufe haben $l_0$ Geburten stattgefunden, von denen $l_1$ das Alter 1 erreichen, also $l_0 - l_1 = d_0$ gestorben sind. Ferner seien

[1]) Über die Halleysche Methode s. W. Lexis: Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik, Jena, 1903, S. 33 ff.

gestorben: zwischen den Altern 1 und 2 ... $d_1$, zwischen den Altern 2 und 3 ... $d_2$ Personen usw. ... zwischen den Altern $w-1$ und $w$ ... $d_{w-1}$ Personen. Vorausgesetzt wird auf 100 Jahre zurück eine gleichbleibende jährliche Geburtenzahl ... $l_0$ und eine gleichbleibende Sterblichkeit in allen Altern. Wir behaupten, dass die Zahlen: $\sum_0^w d_x, \sum_1^w d_x, \sum_2^w d_x, \sum_3^w d_x, \ldots d_w$, bis auf einen konstanten Faktor, eine Absterbeordnung darstellen (sogenannte Halleysche Methode).

Zum Beweise brauchen wir bloss zu zeigen, dass die behaupteten Summen mit den Überlebenden einer Geburtengeneration übereinstimmen, und wählen zu diesem Ende die um $w$ Jahre zurückliegende einjährige Geburtenstrecke. Derselben entstammen $l_0$ Geburten, von denen $l_1$ das Alter 1 erreichen, also $l_0 - l_1 = d_0$ gestorben sind; $l_2$ der Geborenen erreichen das Alter 2, so dass zwischen 1 und 2 Jahren $l_1 - l_2 = d_1$ gestorben sind usw.; $l_{w-1}$ der Geborenen erreichen das Alter $w-1$ und $l_w$ das Alter $w$, so dass zwischen $w-1$ und $w$ Jahren $l_{w-1} - l_w = d_{w-1}$ gestorben sind. Durch kumulative Addition der Relationen: $l_0 - l_1 = d_0$; $l_1 - l_2 = d_1$; $l_2 - l_3 = d_2$; ... $l_{w-1} - l_w = d_{w-1}$; $l_w = d_w$ ergeben sich die Überlebenden:

$$l_0 = \sum_0^w d_x;\ l_1 = \sum_1^w d_x;\ l_2 = \sum_2^w d_x;\ \ldots\ l_{w-1} = d_{w-1} + d_w;\ l_w = d_w.$$

Diese Überlebensordnung stimmt aber mit der Behauptung überein $q.e.d.$

Bei zu- oder abnehmender Geburtenzahl müssen die Sterbefälle in den verschiedenen Altern im gleichen Verhältnis vergrössert oder verkleinert werden, als die zugehörigen Geburten gegenüber dem Beobachtungsjahr kleiner oder grösser sind; daher kann allerdings der Tatsache nicht Rechnung getragen werden, dass die Gestorbenen eines bestimmten Alters zwei verschiedenen Geburtsjahren angehören; doch ist diese Fehlerquelle nicht von wesentlicher Bedeutung, zumal man das arithmetische Mittel aus den zugehörigen Geburten als Reduktionsfaktor verwenden kann. Wesentlich schlimmer steht es mit der Annahme einer gleichbleibenden Sterblichkeit während hundert Jahren. Wenn man aber gezwungen ist, diese sogenannte Halleysche Methode zu gebrauchen, ohne Korrektionen anbringen zu können, so darf nicht vergessen werden, dass bei zunehmender Geburtenzahl die Sterbenswahrscheinlichkeiten zu gross, im entgegengesetzten Falle zu klein ausfallen; dies kommt natürlich auch in der mittleren Lebensdauer zum Ausdruck:

$$\overset{0}{e}_0 = \frac{1}{2} + \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_w}{l_0} \quad ^{1)}$$

bei wachsender Geburtenzahl fällt dieser Ausdruck zu klein aus; im entgegengesetzten Falle liefert er ein zu grosses Resultat. Die mittlere Lebensdauer gilt als Beispiel eines nichttypischen Mittels: es bildet keinen Häufungspunkt für die

[1]) Prof. Dr. H. Kinkelin: Die Elemente der Lebensversicherungsrechnung, 3. Auflage 1932, 3. Aufgabe.

Sterbefälle und stellt auch keinen Näherungswert eines konstanten Grundwertes dar [1]). Gleichwohl ist dieser Mittelwert der kürzeste Ausdruck einer Überlebensordnung und reagiert in empfindlicher Weise auf die Veränderungen der Sterblichkeit und vor allem auf die Bewegungen der Kindersterblichkeit, weil diese letztere für den Verlauf der Sterblichkeit überhaupt bestimmend ist. Zu Vergleichszwecken ist daher die mittlere Lebensdauer geeignet. Als Beispiel können wir die Tafel 2 über die Breslauer Bevölkerung heranziehen, die neben einer Sterbetafel gleichzeitig eine Bevölkerungstafel darstellt; im stationären Zustand gilt die noch zu erörternde Relation: Bevölkerung = jährliche Geburtenzahl × mittlere Lebensdauer [2]); die Anwendung auf Tabelle 2 ergibt:

Mittlere Lebensdauer $= \frac{34.000}{1238} = 27{,}_5$ Jahre. Dasselbe Resultat erhält man unmittelbar aus Tabelle 2 durch Übergang von laufenden zu zurückgelegten Altern; demgegenüber betrug die mittlere Lebensdauer in der Schweiz im Mittel der beiden Geschlechter und für die Beobachtungsjahre 1920/21 ... 56 Jahre, also das Doppelte. Es dürfte nicht ganz überflüssig sein, die Lebenserwartung eines Neugeborenen oder für irgendein anderes Alter auch formell als gewogenes arithmetisches Mittel zur Darstellung zu bringen. Die für diese Klasse von statistischen Zahlen übliche Bezeichnung «isolierte Mittelwerte» rückt damit in ein anderes Licht. Man denke sich die vorliegende Bevölkerung nach den Altern 0, 1, 2, 3, ... $w$ ausgeschieden; dies kann annähernd auf Grund der Volkszählungsergebnisse geschehen. Die verschiedenen Alter seien besetzt mit: $l_0, l_1, l_2, l_3, \ldots l_w$ Personen, wo $w$ das höchste vorkommende Alter bedeutet; sind $p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots p_w$ die entsprechenden einjährigen Überlebenswahrscheinlichkeiten, so reduziert sich die Ausgangsbevölkerung: $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_w$ nach einem Jahr auf

$$l_0 \cdot p_0 + l_1 \cdot p_1 + l_2 \cdot p_2 + l_3 \cdot p_3 + \ldots + l_w \cdot p_w; \tag{1}$$

die durchlebte Zeit ist im Mittel:

$$l_0 \cdot \frac{1+p_0}{2} + l_1 \cdot \frac{1+p_1}{2} + l_2 \cdot \frac{1+p_2}{2} + l_3 \cdot \frac{1+p_3}{2} + \ldots + l_w \frac{1+p_w}{2}. \tag{1a}$$

Nach zwei Jahren ist die ursprüngliche Bevölkerung zusammengeschmolzen auf:

$$\begin{aligned} l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 + l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 + l_2 \cdot p_2 \cdot p_3 + l_3 \cdot p_3 \cdot p_4 + \\ + \ldots + l_{w-1} \cdot p_{w-1} \cdot p_w. \end{aligned} \tag{2}$$

Beim Übergang von (1) zu (2) wird im Mittel die Zeit durchlebt:

$$\begin{aligned} l_0 \cdot p_0 \frac{1+p_1}{2} + l_1 \cdot p_1 \cdot \frac{1+p_2}{2} + l_2 \cdot p_2 \cdot \frac{1+p_3}{2} + l_3 \cdot p_3 \cdot \frac{1+p_4}{2} + \\ + \ldots + l_{w-1} \cdot p_{w-1} \frac{1+p_w}{2} + \frac{l_w \cdot p_w}{2}. \end{aligned} \tag{2a}$$

[1]) Dr. Franz Žižek: Die statistischen Mittelwerte, Leipzig, 1908, S. 291.

[2]) Dr. Franz Žižek, op. cit., S. 55 ff.

Nach drei Jahren bleiben von der Bevölkerung: $l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_w$, zufolge der Sterblichkeit allein, noch übrig:

$$(3) \quad \begin{aligned} &l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 + l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + l_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 + l_3 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 + \\ &+ \ldots + l_{w-2} \cdot p_{w-2} \cdot p_{w-1} \cdot p_w \text{ Personen.} \end{aligned}$$

Beim Übergang von (2) zu (3) wird im Mittel die Zeit durchlebt:

$$(3a) \quad \begin{aligned} &l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \frac{1 + p_2}{2} + l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{1 + p_3}{2} + l_2 \cdot p_2 \cdot p_3 \frac{1 + p_4}{2} + l_3 \cdot p_3 \cdot \\ &\cdot p_4 \frac{1 + p_5}{2} + \ldots + l_{w-2} \cdot p_{w-2} \cdot p_{w-1} \frac{1 + p_w}{2} + \frac{l_{w-1} \cdot p_{w-1} \cdot p_w}{2}. \end{aligned}$$

Nach $w$ Jahren sind von der anfänglichen Bevölkerung noch vorhanden:

$$(w) \quad l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{w-1} + l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_w$$

Personen, welche im vorausgehenden Jahr im Mittel die Zeit durchlebt haben:

$$(w^a) \quad l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{w-2} \frac{1 + p_{w-1}}{2} + l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_{w-1} \frac{1 + p_w}{2}.$$

Nach $w + 1$ Jahren endlich sind noch vorhanden:

$$(w + 1) \quad l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_w$$

Personen, welche im vorangehenden Jahr im Mittel die Zeit durchlebten:

$$(w + 1)^a \quad l_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{w-1} \frac{1 + p_w}{2} + \frac{l_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_w}{2}.$$

Addiert man die ersten Glieder der Ausdrücke (1$a$), (2$a$), (3$a$) ... $(w + 1)^a$, so resultiert:

$$(4) \quad l_0 \left[\frac{1}{2} + p_0 + p_0 \cdot p_1 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + \ldots + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{w-1}\right];$$

das ist die von $l_0$ Personen des Alters Null überhaupt durchlebte Zeit; die mittlere Lebensdauer eines Neugeborenen ist also:

(4) $\frac{1}{2} + p_0 + p_0 \cdot p_1 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + \cdots + p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{w-1}$

entsprechend findet man als mittlere Lebensdauer eines Einjährigen:

$\frac{1}{2} + p_1 + p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 + \cdots + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdots p_{w-1}$

$$(4)\quad \begin{cases} \text{und analog für einen } x\text{jährigen:} \\ \frac{1}{2} + p_x + p_x \cdot p_{x+1} + p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} + p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot p_{x+3} + \ldots + p_x \cdot p_{x+1} \cdot \\ \qquad \cdot p_{x+2} \cdots p_{w-1}. \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeiten: $p_0, p_1, p_2, p_3 \cdots p_{w-1}$ entsprechen den Überlebenden: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots$ einer Sterbetafel, so dass:

$$p_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\,;\ p_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,;\ p_2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\,;\ p_3 = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}\,;\ \ldots\ p_{w-1} = \frac{\lambda_w}{\lambda_{w-1}}\,;$$

dementsprechend gehen die Ausdrücke (4) über in:

$$(5)\quad \begin{cases} \overset{\circ}{e}_0 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_w}{\lambda_0} \\ \overset{\circ}{e}_1 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \ldots + \lambda_w}{\lambda_1} \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ \overset{\circ}{e}_x = \frac{1}{2} + \frac{\lambda_{x+1} + \lambda_{x+2} + \lambda_{x+3} + \ldots + \lambda_w}{\lambda_x} \end{cases}$$

und dies sind die bekannten Darstellungen für die Lebenserwartungen auf Grund der Sterbetafeln. Die Lebenserwartung der Gesamtbevölkerung: $l_0 + l_1 + l_2 + + l_3 + \ldots l_w$ aber ist

$$(6)\quad \overset{\circ}{e}_{0,1,2,3,\ldots w} = \frac{l_0 \cdot \overset{\circ}{e}_0 + l_1 \cdot \overset{\circ}{e}_1 + l_2 \cdot \overset{\circ}{e}_2 + l_3 \cdot \overset{\circ}{e}_3 + \ldots + l_w \cdot \overset{\circ}{e}_w}{l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_w}, \quad \text{wie}$$

sich durch Summation der Ausdrücke ($1a$), ($2a$), ($3a$) ... $(w+1)^a$ unmittelbar ergibt. Die Lebenserwartungen $\overset{\circ}{e}_0, \overset{\circ}{e}_1, \ldots \overset{\circ}{e}_x \ldots$ erscheinen als Grenzwerte des gewogenen arithmetischen Mittels $\overset{\circ}{e}_{0,1,2,3\ldots w}$. Wir haben gesehen, dass $l_0, l_1, l_2, l_3, \ldots l_w$, bis auf einen konstanten Faktor, eine Überlebensordnung darstellen, sobald die jährlichen Geburten und die Sterblichkeit in allen Altern als unveränderlich vorausgesetzt werden, die Bevölkerung also als stationär betrachtet wird; dann treten in den Gleichungen (5) an Stelle von $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_w$ bzw. $l_0, l_1, l_2, \ldots l_w$; man hat also z. B.

$$\overset{\circ}{e}_0 = \frac{1}{2} + \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots + l_w}{l_0} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_w}{l_0}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\text{Bevölkerung}}{\text{Geburtenzahl}}\text{, oder annähernd}$$

$$\text{Bevölkerung} = \text{jährliche Geburtenzahl} \times \text{mittlere Lebensdauer;}$$

Die Methode zur Berechnung der mittleren Lebensdauer hat ein Analogon in derjenigen zur Ermittlung der mittleren Ehedauer; bei einer stationären Bevölkerung ist dieselbe gleich dem Quotienten aus der Zahl der stehenden Ehen und der Zahl der jährlichen Eheschliessungen oder Ehelösungen [1]). Am Ausbau dieses Verfahrens haben sich Männer wie Wappäus, Haushofer und Boeckh beteiligt. Es ist nicht Zufall, dass die Begründer der Bevölkerungsstatistik von einer stationären Bevölkerung ausgingen; die Erforschung stationärer Zustände ist eben die Voraussetzung für das Studium dynamischer Erscheinungen; ohne das Vorhandensein gewisser Beharrungszustände im Auftreten der sozialen Erscheinungen würde überhaupt die Statistik ihre Bedeutung einbüssen.

Wer als denkender Mensch auf irgendeinem Wissensgebiete tätig ist, empfindet von Zeit zu Zeit das Bedürfnis, sich auf seine Grundlagen und Hauptaufgaben zu besinnen; gleichzeitig lernt er die klassischen Leistungen auf dem betreffenden Forschungsgebiet würdigen; tut er dies nicht, so gleicht er dem Seefahrer, der ohne Kompass auf dem Meere umherirrt. Aus diesen Überlegungen heraus sind die vorliegenden Zeilen entstanden; hoffentlich werden sie nicht als «sehr extemporisiert» aufgefasst, um einen Ausdruck Goethes zu gebrauchen.

[1]) Dr. Franz Žižek, S. 58 ff.