Direkter Weg zur Ermittlung von Relationen zur Trendbestimmung

Von Dr. *O. Schenker*, Bern

Dr. Paul Lorenz definiert den Trend als eine Linie (Parabel), die einer gegebenen Wirtschaftsreihe unter Zugrundelegung des Prinzips der kleinsten Quadrate bestmöglich angepasst ist und deren mathematische Darstellung nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitet [1]). Wir schliessen uns dieser Definition an. Der Trend soll nicht eine empirische Kurve ersetzen, sondern nur den grossen allgemeinen Zug, den Hauptverlauf von Wirtschaftsreihen zum Ausdruck bringen; ohne sachliche Begründung dürfen Interpolationen und vor allem Extrapolationen nicht vorgenommen werden. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Trends bedeuten Verallgemeinerungen des arithmetischen Mittels; da die Mittelwerte im Mittelpunkt der Statistik stehen, so erfordern die Trendberechnungen keine besondere Rechtfertigung mehr; weil sie eben zu einer verallgemeinerten Auffassung der Statistik führen; das wissenschaftliche Forschen besteht bekanntlich im Verallgemeinern und im Spezialisieren; wir gehen induktiv vor und beginnen mit einfachen Fällen. Es seien die Wirtschaftswerte w_1, w_2, $w_3 \ldots w_n$ gegeben, und es soll der Trend nullten Grades ermittelt werden; bezeichnen wir mit c allgemein konstante Grössen, so hat der Trend nullten Grades die Form: $y = c_0$ mit der Bedingung:

$$\sum_{x=1}^{n}(c_0 - w_x)^2 = \text{Minimum},$$

wenn $1, 2, 3, \ldots n$ die Zeitpunkte bedeuten, in welchen die Werte $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ beobachtet worden sind; daraus folgt als einzige Normalgleichung:

$$\sum_{x=1}^{n}(c_0 - w_x) = 0, \quad \text{also } c_0 = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}{n},$$

d. h. der Trend nullten Grades bedeutet das arithmetische Mittel aus den Beobachtungswerten.

---

[1]) Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 21, 2. Auflage des Sonderheftes 9: Der Trend, ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven und sonstiger Zeitreihen, Berlin 1931, S. 7 u. ff.

Der Trend ersten Grades ist von der Form: $y = c_0 + c_1 x$ mit der Bedingung:

$$\sum_{x=1}^{n} (c_0 + c_1 x - w_x)^2 = \text{Minimum};$$

die Normalgleichungen sind:

$$\sum_{x=1}^{n} c_0 + c_1 x - w_x = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^{n} x (c_0 + c_1 x - w_x) = 0.$$

Der Trend zweiten Grades ist an die Bedingungen gebunden:

$$\sum_{x=1}^{n} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - w_x)^2 = \text{Minimum},$$

$$\sum_{x=1}^{n} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - w_x) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} x (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - w_x) = 0;$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 - w_x) = 0 \text{ etc.}$$

Die Auflösung der Normalgleichungen wird vor allem dadurch erschwert, dass beim Übergang zu einer Parabel höheren oder niedrigeren Grades (falls der berechnete Trend nicht befriedigt) alle Koeffizienten c neu berechnet werden müssen. Diese Koeffizienten lassen sich zudem nur schwer kontrollieren, weil sie sich nicht einfach darstellen lassen. Diesem Übelstande hat man durch Einführung sogenannter orthogonaler Funktionen abzuhelfen gesucht; statt den Trend darzustellen durch $y = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots$, wählt man die allgemeinere Form:

$$y = a_0 \cdot Q_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \ldots, \tag{1}$$

wo $a_0, a_1, a_2 \ldots$ konstant und $Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ ganz rationale Funktionen von x sind (und zwar Q_0 vom 0., Q_1 vom 1., Q_2 vom 2. Grad etc.). Der Trend 0. Grades hat nunmehr die Normalgleichung:

$$\sum_{x=1}^{n} a_0 \cdot Q_0 - w_x = 0;$$

über a_0 oder Q_0 kann willkürlich verfügt werden; wir wählen $Q_0 = 1$; der Trend zweiten Grades hat die Normalgleichungen:

$$\sum_{x=1}^{n} Q_0 (a_0 \cdot Q_0 + a_1 Q_1 - w_x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 (a_0 \cdot Q_0 + a_1 Q_1 - w_x) = 0$$

oder wegen $Q_0 = 1 \ldots$

$$\sum_{x=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot Q_1 - w_x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 (a_0 + a_1 Q_1 - w_x) = 0;$$

Q_1 ist von der Form $Q_1 = \alpha_1 + \beta_1 x$ mit α_1 und β_1 als verfügbare Konstanten; α_1 setzen wir 1 und β_1 wählen wir so, dass

$$\sum_{x=1}^{n} Q_1 = 0;$$

die Normalgleichungen zum Trend 1. Grades lauten dann:

$$\sum_{x=1}^{n}(a_0 - w_x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^{n}(a_1 \cdot \bar{Q}_1^2 - Q_1 \cdot w_x) = 0,$$

$$\text{also } a_0 = \frac{\sum_{x=1}^{n} w_x}{n} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{\sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot w_x}{\sum_{x=1}^{n} \bar{Q}_1^2}.$$

Der Trend 2. Grades besitzt die Normalgleichungen:

$$\sum_{x=1}^{n}(a_0 \cdot Q_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 (a_0 \cdot Q_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0,$$

$$\sum_{x=1}^{n} Q_2 (a_0 \cdot Q_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0$$

oder wegen $Q_0 = 1; \sum_{x=1}^{n} Q_1 = 0$:

$$\sum_{x=1}^{n}(a_0 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 (a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0$$

$$\sum_{x=1}^{n} Q_2 (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0;$$

Q_2 ist von der Form $\alpha_2 + \beta_2 \cdot x + \gamma_2 \cdot x^2$ mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ als verfügbare Konstanten; α_2 sei 1; β_2 und γ_2 bestimmen wir so, dass

$$\sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x=1}^{n} Q_2 = 0;$$

die Normalgleichungen zweiten Grades reduzieren sich also auf:

$$\sum_{x=1}^{n} (a_0 - w_x) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 (a_1 \cdot Q_1 - w_x) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_2 (a_2 \cdot Q_2 - w_x) = 0, \quad \text{also}$$

$$a_0 = \frac{\sum_{x=1}^{n} w_x}{n}; \quad a_1 = \frac{\sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot w_x}{\sum_{1}^{n} \overline{Q}_1^{\,2}}; \quad a_2 = \frac{\sum_{x=1}^{n} Q_2 \cdot w_x}{\sum_{1}^{n} \overline{Q}_2^{\,2}} \quad \text{etc.}$$

Beim Trend n. Grades wählen wir Q_n so, dass

$$\sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_n = 0, \ \sum_{x=1}^{n} Q_2 \cdot Q_n = 0 \ \ldots \ \sum_{x=1}^{n} Q_{n-1} \cdot Q_n = 0 \ \text{und} \ \sum_{x=1}^{n} Q_n = 0;$$

wenn $Q_n = \alpha_n + \beta_n\, x + \gamma_n\, x^2 + \ldots$ und $\alpha_n = 1$, so reichen die noch verfügbaren n-Konstanten $\beta_n, \gamma_n \ldots$ gerade aus, um diese n-Bedingungen zu erfüllen, und a_n erhält darum den Wert:

$$a_n = \frac{\sum_{x=1}^{n} Q_n \cdot w_x}{\sum_{x=1}^{n} \overline{Q}_n^{\,2}}. \tag{2}$$

Man bemerkt, dass beim Übergang zu einer Parabel höheren Grades bloss die neu hinzutretenden Koeffizienten a zu berechnen sind, und dass diese Koeffizienten einfach dargestellt und darum auch unschwer berechnet und kontrolliert werden können.

Nun verbleibt aber noch die Berechnung der orthogonalen Funktionen Q, resp. ihrer Koeffizienten, welche für alle Wirtschaftsreihen dieselben Werte besitzen und darum in Tafeln zusammengestellt werden können. Die bisherigen Entwicklungen dürfen als bekannt vorausgesetzt werden; sie waren aber der Vollständigkeit halber notwendig. In den nachfolgenden Berechnungen der Funktionen Q gehen wir eigene Wege, indem ihre Bestimmungsgleichungen (sie sind vom 1. Grad in den unbekannten Koeffizienten α, β, γ ...) nach bekannten elementaren Methoden direkt aufgelöst werden; die hierbei sich bietenden Schwierigkeiten sind keineswegs so gross, wie man vermuten könnte, weil die vorhandenen Kontrollmöglichkeiten ein sicheres Rechnen ermöglichen. Auch ein langer Weg kann ohne Verirrungen begangen werden, sobald es nicht an Wegweisern fehlt.

In der Entwicklung $Q_n = \alpha_n + \beta_n x + \gamma_n x^2 + \dots$ haben wir $\alpha_n = 1$ gesetzt und damit $Q_0 = 1$; weiter ist $Q_1 = 1 + \beta_1 x$ und

$$\sum_{x=1}^{n} Q_1 = 0 = n + \beta_1 \frac{n(n+1)}{2}, \text{ also } \beta_1 = -\frac{2}{n+1}, \text{ und } \underline{Q_1 = 1 - \frac{2 \cdot x}{n+1}}. \tag{3}$$

Q_2 bestimmt sich aus

$$\sum_{x=1}^{n} Q_2 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_2 = 0$$

oder $$\sum_{x=1}^{n} (1 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} x(1 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2) = 0$$

oder $$n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \beta_2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \gamma_2 = 0$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \beta_2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \cdot \gamma_2 = 0$$

oder $$\begin{array}{l|c} 1 + \frac{n+1}{2} \cdot \beta_2 + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \gamma_2 = 0 & -n \\ 1 + \frac{2n+1}{3} \cdot \beta_2 + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \gamma_2 = 0 & \frac{2n+1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Hieraus ergeben sich nach elementaren Methoden β_2 und γ_2 (z. B. β_2 durch Multiplik. der 1. Gleichung mit $-n$ und der zweiten mit $\frac{2n+1}{3}$ und Addition der Produkte):

$$\beta_2 = -\frac{6}{2+n}; \quad \gamma_2 = \frac{6}{(n+1)(n+2)};$$

darum ist: $$\underline{Q_2 = 1 - \frac{6(n+1)}{(n+1)(n+2)} x + \frac{6x^2}{(n+1)(n+2)}}. \tag{4}$$

Unerlässlich zur Durchführung der gestellten Aufgabe sind die Summen:

$$\sum_{x=1}^{n} x; \quad \sum_{x=1}^{n} x^2; \quad \sum_{x=1}^{n} x^3; \quad \sum_{x=1}^{n} x^4 \dots;$$

sie lassen sich elementar, mittels des binomischen Satzes, durch Rekursion ableiten, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$$(1+1)^2 = 1 + 2 \cdot 1 + 1^2;\ (1+2)^2 = 1 + 2 \cdot 2 + 2^2;\ (1+3)^2 = 1 + 2 \cdot 3 + 3^2;$$
$$(1+4)^2 = 1 + 2 \cdot 4 + 4^2;\ \ldots\ (1+n)^2 = 1 + 2 \cdot n + n^2.$$

Hieraus durch Summation und Reduktion:

$$(1+n)^2 = n + 1 + 2\sum_{x=1}^{n} x \quad \text{oder} \quad \underline{\sum_{x=1}^{n} x = \frac{(n+1)\,n}{2}}; \tag{5}$$

$$(1+1)^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3;\ (1+2)^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3;$$
$$(1+3)^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3;\ \ldots\ (1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3.$$

Hieraus durch Summation und Reduktion:

$$(1+n)^3 = n + 1 + 3\sum_{x=1}^{n} x + 3\sum_{x=1}^{n} x^2 \quad \text{oder} \quad 3\sum_{x=1}^{n} x^2 = (1+n)^3 - n - 1 - 3\sum_{x=1}^{n} x =$$
$$= \frac{(n+1)}{2}\,[2n^2 + 4n + 2 - 2 - 3n] = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}$$

und
$$\underline{\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}. \tag{6}$$

$$(1+1)^4 = 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^3 + 1^4;\ (1+2)^4 = 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 2^4;$$
$$(1+3)^4 = 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 3^4;\ \ldots\ (1+n)^4 = 1 + 4 \cdot n + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n^3 + n^4;$$

woraus, wie vorhin:

$$(1+n)^4 = n + 1 + 4\sum_{x=1}^{n} x + 6\sum_{x=1}^{n} x^2 + 4\sum_{x=1}^{n} x^3;$$

hieraus folgt:

$$4\sum_{x=1}^{n} x^3 = (1+n)^4 - n - 1 - 4\sum_{x=1}^{n} x - 6\sum_{x=1}^{n} x^2, \qquad \text{oder}$$
$$= (1+n)^4 - n - 1 - 2\,(n+1) \cdot n - n\,(n+1)\,(2n+1)$$
$$= (n+1)\,[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n]$$
$$= (n+1)\,n^2 \cdot (n+1) = n^2 \cdot (n+1)^2; \quad \text{somit} \quad \underline{\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}}. \tag{7}$$

In analoger Weise findet man:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{x=1}^{n} x^4 = \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}; \quad \sum_{x=1}^{n} x^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}; \\
\sum_{x=1}^{n} x^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}; \\
\sum_{x=1}^{n} x^7 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2 (3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}; \\
\sum_{x=1}^{n} x^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90}; \\
\sum_{x=1}^{n} x^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20}; \\
\ldots\ldots
\end{array}\right\} \quad (8)$$

Fahren wir nunmehr mit der Ausmittlung der Funktionen Q weiter. $Q_3 = 1 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + \delta_3 x^3$ bestimmt sich vermittels:

$$\sum_{x=1}^{n} Q_3 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_3 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_2 \cdot Q_3 = 0 \qquad \text{oder}$$

$$\sum_{x=1}^{n} (1 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + \delta_3 \cdot x^3) = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} x (1 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + \delta_3 \cdot x^3) = 0;$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 (1 + \beta_3 \cdot x + \gamma_3 \cdot x^2 + \delta_3 \cdot x^3) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$n + \beta_3 \sum_{x=1}^{n} x + \gamma_3 \sum_{x=1}^{n} x^2 + \delta_3 \sum_{x=1}^{n} x^3 = 0;$$

$$\sum_{x=1}^{n} x + \beta_3 \sum_{x=1}^{n} x^2 + \gamma_3 \sum_{x=1}^{n} x^3 + \delta_3 \sum_{x=1}^{n} x^4 = 0;$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 + \beta_3 \sum_{x=1}^{n} x^3 + \gamma_3 \sum_{x=1}^{n} x^4 + \delta_3 \sum_{x=1}^{n} x^5 = 0.$$

Setzt man hier die berechneten Summenwerte ein, so ergeben diese drei Gleichungen ohne Schwierigkeiten β_3, γ_3, δ_3, nämlich:

$$\beta_3 = -\frac{12n^2 + 30n + 22}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad \gamma_3 = \frac{30(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$\delta_3 = -\frac{20}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

und darum:

$$Q_3 = 1 - \frac{12n^2 + 30n + 22}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,x + \frac{30(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,x^2 - \frac{20}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot x^3. \tag{9}$$

$Q_4 = 1 + \beta_4\,x + \gamma_4\,x^2 + \delta_4\,x^3 + \varepsilon_4\,x^4$ hat die Bestimmungsgleichungen

$$\sum_{x=1}^{n} Q_4 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_4 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_2 \cdot Q_4 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_3 \cdot Q_4 = 0, \qquad \text{oder}$$

$$\sum 1 + \beta_4 \cdot x + \gamma_4 \cdot x^2 + \delta_4 \cdot x^3 + \varepsilon_4 \cdot x^4 = 0;$$

$$\sum x\,(1 + \beta_4\,x + \gamma_4\,x^2 + \delta_4\,x^3 + \varepsilon_4\,x^4) = 0;$$

$$\sum x^2\,(1 + \beta_4\,x + \gamma_4\,x^2 + \delta_4\,x^3 + \varepsilon_4\,x^4) = 0;$$

$$\sum x^3\,(1 + \beta_4\,x + \gamma_4\,x^2 + \delta_4\,x^3 + \varepsilon_4 \cdot x^4) = 0$$

oder auch:

$$n + \beta_4 \sum x + \gamma_4 \sum x^2 + \delta_4 \sum x^3 + \varepsilon_4 \sum x^4 = 0;$$

$$\sum x + \beta_4 \sum x^2 + \gamma_4 \sum x^3 + \delta_4 \sum x^4 + \varepsilon_4 \sum x^5 = 0;$$

$$\sum x^2 + \beta_4 \sum x^3 + \gamma_4 \sum x^4 + \delta_4 \sum x^5 + \varepsilon_4 \sum x^6 = 0;$$

$$\sum x^3 + \beta_4 \sum x^4 + \gamma_4 \sum x^5 + \delta_4 \sum x^6 + \varepsilon_4 \sum x^7 = 0.$$

Nach Substituierung der berechneten Summenwerte erhält man aus diesen vier Gleichungen:

$$\beta_4 = -\frac{10(n+1)(2n^2 + 7n + 10)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}; \quad \gamma_4 = \frac{10(9n^2 + 21n + 17)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)};$$

$$\delta_4 = -\frac{140\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}; \quad \varepsilon_4 = \frac{70}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$$

und darum:

$$\begin{aligned} Q_4 = 1 &- \frac{10\,(n+1)\,(2n^2+7n+10)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}\,x + \frac{10\,(9n^2+21n+17)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}\,x^2 \\ &- \frac{140\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}\,x^3 + \frac{70}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}\,x^4. \end{aligned} \tag{10}$$

$Q_5 = 1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5 \cdot x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5$ ist bestimmt durch die Beziehungen:

$$\sum_{x=1}^{n} Q_5 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_1 \cdot Q_5 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_2 \cdot Q_5 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_3 \cdot Q_5 = 0; \quad \sum_{x=1}^{n} Q_4 \cdot Q_5 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &\sum (1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5\,x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5) = 0; \\ &\sum x\,(1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5\,x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5) = 0; \\ &\sum x^2\,(1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5\,x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5) = 0; \\ &\sum x^3\,(1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5\,x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5) = 0; \\ &\sum x^4\,(1 + \beta_5\,x + \gamma_5\,x^2 + \delta_5\,x^3 + \varepsilon_5\,x^4 + \varphi_5\,x^5) = 0 \end{aligned}$$

oder auch:

$$\begin{aligned} n + \beta_5 \sum x + \gamma_5 \sum x^2 + \delta_5 \sum x^3 + \varepsilon_5 \sum x^4 + \varphi_5 \sum x^5 &= 0; \\ \sum x + \beta_5 \sum x^2 + \gamma_5 \sum x^3 + \delta_5 \sum x^4 + \varepsilon_5 \sum x^5 + \varphi_5 \sum x_6 &= 0; \\ \sum x^2 + \beta_5 \sum x^3 + \gamma_5 \sum x^4 + \delta_5 \sum x^5 + \varepsilon_5 \sum x^6 + \varphi_5 \sum x^7 &= 0; \\ \sum x^3 + \beta_5 \sum x^4 + \gamma_5 \sum x^5 + \delta_5 \sum x^6 + \varepsilon_5 \sum x^7 + \varphi_5 \sum x^8 &= 0; \\ \sum x^4 + \beta_5 \sum x^5 + \gamma_5 \sum x^6 + \delta_5 \sum x^7 + \varepsilon_5 \sum x^8 + \varphi_5 \sum x^9 &= 0. \end{aligned}$$

Nach Ersetzung der Summen durch die berechneten Werte folgt nach längern, aber unter stetiger Kontrolle stehenden Operationen:

$$\beta_5 = -\frac{30n^4 + 210n^3 + 730n^2 + 1050n + 548}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}$$

$$\gamma_5 = \frac{210\,(n+1)\,(n^2+3n+5)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)};$$

$$\delta_5 = -\frac{140\,(4n^2+9n+8)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)};$$

$$\varepsilon_5 = \frac{630\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)};$$

$$\varphi_5 = -\frac{252}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}$$

und Q_5 ist somit bestimmt durch:

$$\begin{aligned} Q_5 = 1 - \frac{30n^4+210n^3+730n^2+1050n+548}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\,x \,+ \\ + \frac{210\,(n+1)\,(n^2+3n+5)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\,x^2 \\ - \frac{140\,(4n^2+9n+8)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\,x^3 \,+ \\ + \frac{630\,(n+1)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\,x^4 \\ - \frac{252}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\,x^5. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Funktionen Q stimmen mit den Funktionen q von Professor Charles Jordan, bis auf einen konstanten Faktor, identisch überein, sobald man in den Entwicklungen für $q \ldots \xi$ durch $x - 1$ ersetzt [1]). Der Unterschied im konstanten Faktor rührt daher, dass bei der Ermittlung der Funktionen Q und q über eine überzählige Konstante willkürlich verfügt werden kann, und diese Konstante haben wir eben anders gewählt als Professor Jordan. Die Beziehungen zwischen Q und q sind die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} -2 \cdot q_1 = Q_1 \cdot (n+1); \quad 4 \cdot q_2 = Q_2 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \\ -8 \cdot q_3 = Q_3\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3); \quad 16 \cdot q_4 = Q_4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4) \\ -32 \cdot q_5 = Q_5 \cdot (n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Funktionen Q (und damit auch q) haben eine sehr wichtige Eigenschaft, welche gestattet, die zu ihrer Berechnung erforderliche Arbeit um die Hälfte zu verkürzen. Man sieht nämlich ohne weiteres ein, dass

$$\sum_{x=1}^{n} x^m = \sum_{x=n}^{1} (n+1-x)^m;$$

---

[1]) Charles Jordan, Statistique Mathématique, Paris 1927, S. 32; q_5 ist mit einem Druckfehler behaftet, statt $+ 525\,n$ muss $- 525\,n$ stehen.

hieraus folgt, dass z. B. die Gleichung:

$$n + \beta_2 \sum_{x=1}^{n} x + \gamma_2 \sum_{x=1}^{n} x^2 = 0$$

durch diese Umgestaltung (Ersetzung von x durch $n + 1 - x$) unverändert bleibt; allgemein bleiben dabei alle Gleichungssysteme zur Bestimmung der Q (oder q) unverändert und daher auch die Funktionen Q (oder q) selbst; dies ist aber nur möglich, wenn z. B. die Funktion $Q_2 = 1 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2$ durch die Substitution $n + 1 - x$ an Stelle von x wieder in $1 + \beta_2 x + \gamma_2 x^2$ übergeht; für eine ungerade Funktion, z. B. $Q_3 = 1 + \beta_3 x + \gamma_3 x^2 + \delta_3 x^3$, wird dadurch Q_3 zu $-1 - \beta_2 \cdot x - \gamma_2 x^2 - \delta_3 x^3$; allgemein gilt:

$$\left.\begin{aligned} &Q_m(x) = (-1)^m Q_m(n + 1 - x) \quad \text{und} \\ &q_m(\xi + 1) = (-1)^m q_m(n - \xi) \\ &q_m(\xi) = (-1)^m \cdot q_m(n - 1 - \xi). \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Hier wollen wir mit der Theorie abbrechen und zu einem praktischen Beispiel übergehen. Es soll der Trend für die Vollarbeitslosen in der Schweiz von 1920—1931 bestimmt werden; zuvor wollen wir aber an einen Ausdruck erinnern, welcher den Anpassungsgrad des Trend an die gegebene Wirtschaftsreihe widerspiegelt. Dieser Ausdruck ist:

$$\sum_{x=1}^{n} (y_x - w_x)^2 = \sum_{x=1}^{n} w_x^2 + \sum_{x=1}^{n} y_x^2 - 2 \sum_{x=1}^{n} y_x \cdot w_x;$$

$\sum w_x^2$ ist zum vorneherein gegeben; in den beiden andern Summen müssen die berechneten Werte für die Koeffizienten a und die Eigenschaften der Funktionen Q (oder q) berücksichtigt werden:

$$\sum y_x^2 = \sum (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + a_3 \cdot Q_3 + \ldots)^2 =$$

$$= a_0^2 \cdot n + a_1^2 \sum Q_1^2 + a_2^2 \sum Q_2^2 + a_3^2 \sum Q_3^2 + \ldots$$

$$+ 2a_0 \cdot a_1 \sum q_1 + 2a_0 a_2 \sum q_2 + 2a_0 a_3 \sum q_3 + 2a_1 a_2 \sum q_1 \cdot q_2 + 2a_1 a_3 \sum q_1 \cdot q_3 + \ldots$$

oder
$$\sum y_x^2 = a_0^2 \cdot n + a_1^2 \sum Q_1^2 + a_2^2 \sum Q_2^2 + a_3^2 \sum Q_3^2 + \ldots$$

$$= a_0 \sum w_x + a_1 \sum w_x \cdot Q_1 + a_2 \sum w_x \cdot Q_2 + a_3 \sum w_x \cdot Q_3 + \ldots;$$

$$-2 \sum y_x \cdot w_x = -2a_0 \sum w_x - 2a_1 \sum w_x \cdot Q_1 - 2 a_2 \sum w_x \cdot Q_2 - 2 a_3 \sum w_x \cdot Q_3 - \ldots;$$

darum ist:

$$\sum_{x=1}^{n}(y_x-w_x)^2=\sum w_x^2-a_0\sum w_x-a_1\sum w_x\cdot Q_1-a_2\sum w_x\cdot Q_2-a_3\sum w_x\cdot Q_3-\ldots \quad (14)$$

Auch hier muss beim Übergang zum Trend des nächst höhern Grades nur das letzte Glied neu berechnet werden; und nun zu unserm Beispiel; um die Tafeln von Jordan benützen zu können, rechnen wir mit den Funktionen $q_\xi = q_{x-1}$ und benützen folgende Daten:

Jahr	Vollarbeitslose im Monatsdurchschnitt in 1000	ξ	$w^2_{(\xi)}$	Jahr	Vollarbeitslose im Monatsdurchschnitt in 1000	ξ	$w^2_{(\xi)}$
1920	6,5	0	42,25	1926	14,1	6	198,81
1921	58,5	1	3422,25	1927	11,8	7	139,24
1922	67,0	2	4489,00	1928	8,4	8	70,56
1923	32,6	3	1062,76	1929	8,1	9	65,61
1924	14,7	4	216,09	1930	12,9	10	166,41
1925	11,1	5	123,21	1931	24,2	11	585,64
					$\sum w_x=269,9$		$\sum w_x^2=10.581,83$

Hieraus folgt: $\underline{a_0} = \frac{\sum w}{12} = \underline{22,49}$ und für den Trend 0. Grades

$$\underline{\sum(y-w)^2} = \sum w^2 - a_0\sum w = 10.581,83 - 6070,05 = \underline{4511,78}.$$

Die Bestimmung von a_1 entnimmt man der folgenden Darstellung:

ξ	$w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}$	$q_{1(\xi)}$ [1]	$q_{1(\xi)}\,[w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}]$
0	— 17,7	— 5,5	+ 97,35
1	45,6	— 4,5	— 205,20
2	58,9	— 3,5	— 206,15
3	24,2	— 2,5	— 60,50
4	2,9	— 1,5	— 4,35
5	— 3,0	— 0,5	+ 1,50
			$\sum q_1 \cdot w_{(\xi)} = -377,35$

[1]) Charles Jordan, op. cit. S. 27 u. ff., siehe auch S. 270 u. ff.

somit $a_1 = \dfrac{\sum q_1 \cdot w_{(\xi)}}{\sum q_1^2} = -\dfrac{377,35}{143} = -2,64$ und für den Trend 1. Grades:

$$\sum (y - w)^2 = 4511,78 - 2,64 \cdot 377,35 = \underline{3515,58};$$ analog hat man für a_2:

ξ	$w_{(\xi)} + w_{(11-\xi)}$	$q_{2\,(\xi)}$	$q_{2\,(\xi)} \left[w_{(\xi)} + w_{(11-\xi)}\right]$
0	30,7	27,5	844,25
1	71,4	12,5	892,50
2	75,1	0,5	37,55
3	41,0	— 8,5	— 348,50
4	26,5	— 14,5	— 384,25
5	25,2	— 17,5	— 441,00
			$\sum q_2 \cdot w_{(\xi)} = 600,55$

somit $\underline{a_2} = \dfrac{\sum q_2 \cdot w_\xi}{\sum q_2^2} = \dfrac{600,55}{3003} = \underline{0,20}$ und für den Trend 2. Grades:

$$\underline{\sum (y - w)^2} = 3515,58 - 0,2 \cdot 600,55 = \underline{3395,47};$$

entsprechend findet man für a_3:

ξ	$w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}$	$q_{3\,(\xi)}$	$q_{3\,(\xi)} \left[w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}\right]$
0	— 17,7	— 123,75	2190,37
1	45,6	11,25	513,00
2	58,9	78,75	4638,38
3	24,2	93,75	2268,75
4	2,9	71,75	208,07
5	— 3,0	26,25	— 78,75
			$\sum q_3 \cdot w_{(\xi)} = 9739,82$

und $a_3 = \dfrac{\sum q_3 \cdot w_{(\xi)}}{\sum q_3^2} = \dfrac{9739,82}{72.393,75} = 0,1345$ und für den Trend 3. Grades

$$\underline{\sum (y - w)^2} = 3395,47 - 0,1345 \cdot 9739,82 = \underline{2085,46}.$$

Berechnung von a_4:

ξ	$w_{(\xi)} + w_{(11-\xi)}$	$q_{4(\xi)}$	$q_{4(\xi)}\left[w_{(\xi)} + w_{(11-\xi)}\right]$
0	30,7	495	+ 15.196,5
1	71,4	— 405	— 28.917,0
2	75,1	— 495	— 37.174,5
3	41,0	— 195	— 7.995,0
4	26,5	180	+ 4.770,0
5	25,2	420	+ 10.584,0
			$\sum q_4 \cdot w_{(\xi)} = -43.536{,}0$

und $\underline{a_4} = \dfrac{\sum q_4 \cdot w_{(\xi)}}{\sum q_4^2} = -\dfrac{43.536{,}0}{1.801.800} = \underline{-0{,}02416}$; für den Trend 4. Grades ist:

$$\sum (y - w)^2 = 2085{,}46 - 0{,}02416 \cdot 43.536 = \underline{1033{,}63}.$$

Berechnung von a_5:

ξ	$w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}$	$q_{5(\xi)}$	$q_{5(\xi)}\left[w_{(\xi)} - w_{(11-\xi)}\right]$
0	— 17,7	— 1732,5	30.665,25
1	45,6	2992,5	136.458,00
2	58,9	1102,5	64.937,25
3	24,2	— 1522,5	— 38.844,50
4	2,9	— 2310,0	— 669,90
5	— 3,0	— 1050,0	+ 3.150,00
			$\sum q_5 \cdot w_{(\xi)} = 195.696{,}10$

$\underline{a_5} = \dfrac{\sum q_5 \cdot w_{(\xi)}}{\sum q_5^2} = \dfrac{195.696{,}10}{43.857.450} = \underline{0{,}004462}$; für den Trend 5. Grades ist:

$$\underline{\sum (y - w)^2} = 1033{,}63 - 0{,}004462 \cdot 195.696{,}1 = \underline{160{,}43}.$$

Mit steigendem Grad des Trend wächst also seine Anpassung an die gegebene Wirtschaftsreihe. Der Trend 5. Grades kann also dargestellt werden durch:

$$\underline{y = 22{,}49 - 2{,}64 \cdot q_1 + 0{,}20\, q_2 + 0{,}1345 \cdot q_3 - 0{,}02416 \cdot q_4 + 0{,}004462\, q_5.} \quad (15)$$

Durch Weglassen von einem Glied, zwei, drei, vier oder fünf Gliedern gehen hieraus ohne weiteres die Trends vierten, dritten, zweiten, ersten und nullten Grades hervor. Die den beobachteten Wirtschaftswerten entsprechenden Werte von y ergeben sich unter Berücksichtigung der Jordanschen Tabellen für q_1, q_2, q_3, q_4 und q_5. Will man aber y als Funktion von ξ ausdrücken, so muss dasselbe für q geschehen. In Verbindung mit (3), (4), (9), (10), (11) und (12) ergeben sich für $q_{(\xi)}$ die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
&q_1 = \xi + \frac{1}{2}(1-n);\quad q_2 = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}(n-1)\,\xi + \frac{1}{4}(n^2-3\,n+2);\\
&q_3 = \frac{5}{2}\xi^3 - \frac{15}{4}(n-1)\,\xi^2 + \frac{1}{4}(6n^2-15n+11)\,\xi - \frac{1}{8}(n^3-6n^2+11n-6);\\
&q_4 = \frac{35}{8}\xi^4 - \frac{35}{4}(n-1)\,\xi^3 + \frac{5}{8}(qn^2-21\,n+17)\,\xi^2 -\\
&\quad - \frac{5}{8}(2n^3-9\,n^2+17\,n-10)\,\xi + \frac{1}{16}(n^4-10\,n^3+35\,n^2-50\,n+24);\\
&q_5 = \frac{63}{8}\xi^5 - \frac{315}{16}(n-1)\,\xi^4 + \frac{35}{8}(4\,n^2-qn+8)\,\xi^3 -\\
&\quad - \frac{105}{16}(n^3-4n^2+8n-5)\,\xi^2 + \frac{1}{16}(15n^4-105n^3+365n^2-525n+274)\,\xi -\\
&\quad - \frac{1}{32}(n^5-15\,n^4+85\,n^3-225\,n^2+274\,n-120);
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

wir erinnern daran, dass ξ läuft von 0 bis $n-1$, während x die Werte von 1 bis n annehmen kann. Die Trendlinien 1. und 2. Grades für das herangezogene Beispiel lauten demnach:

$$\underline{y} = 22{,}49 - 2{,}64\left[\xi - \frac{11}{2}\right] = \underline{37{,}01 - 2{,}64\,\xi} \qquad \text{und}$$

$$\underline{y} = 37{,}01 - 2{,}64\,\xi + \frac{3}{10}\xi^2 - \frac{3}{10}\cdot 11\cdot\xi + \frac{1}{20}\cdot 110 = \underline{42{,}51 - 5{,}94\,\xi + 0{,}3\,\xi^2.}$$

Der Trend 1. Grades fällt mit wachsendem ξ gegen die Abszissenachse, gibt aber weder das Maximum noch das Minimum der Arbeitslosigkeit. Der Trend 2. Grades spiegelt den Hauptverlauf der Arbeitslosigkeit bedeutend besser; mit wachsendem ξ fällt er zunächst gegen die Abszissenachse, erreicht bei $\xi = 10$ das Minimum, um dann wieder zu steigen; will man unter allen Umständen im Trend auch das Maximum der gegebenen Wirtschaftsreihe zum Ausdruck bringen, so geht man zum Trend dritten Grades über:

$$\underline{y = 25{,}87 + 17{,}43\,\xi - 5{,}248\,\xi^2 + 0{,}336\,\xi^3;}$$

derselbe steigt anfänglich mit wachsendem ξ, um bei $\xi = 2$ (1922) ein Maximum zu erreichen, sodann fällt er stetig bis $\xi = 8$ (1928), um dann wieder zu steigen; er gibt darum den Hauptverlauf der Wirtschaftsreihe in völlig genügender Weise. Zur Kontrolle der Rechnung kann die Bedingung verwendet werden

$$\sum (y - w) = 0,$$

welche aus der 1. Normalgleichung für jede Tendenzkurve hervorgeht; diese Bedingungen sind tatsächlich in zufriedenstellender Weise erfüllt. Ausserdem kann für jeden Trend

$$\sum (y - w)^2$$

berechnet und mit den nach (14) bestimmten Werten verglichen werden; auch hier finden wir eine hinreichende Übereinstimmung [1]).

[1]) Das Material zu dem gerechneten Beispiel findet sich im Statistischen Jahrbuch der Schweiz für das Jahr 1931, S. 121.

Es soll noch nachgetragen werden, dass die Herleitung der Normalgleichungen, z. B. zu

$$\sum (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w)^2 = \text{Min.},$$

ganz elementar geschehen kann; kleine, aber sonst unabhängige Änderungen von $a_0, a_1, a_2, \ldots$ seien mit $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$ bezeichnet, dann ist nach dem Begriff des Minimums oder Maximums:

$$\sum \Big[(a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w + \triangle_0 + \triangle_1 \cdot Q_1 + \triangle_2 \cdot Q_2 + \cdots)^2 - \\ - (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w)^2\Big] = 0_1$$

oder

$$\sum \Big[\triangle_0 \cdot (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w) + \triangle_1 \cdot Q_1 (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \ldots - w) + \\ + \triangle_2 \cdot Q_2 (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w) + \cdots\Big] = 0$$

mit Auslassung kleiner Grössen der 2. Ordnung; da $\triangle_0, \triangle_1, \triangle_2, \ldots$ voneinander unabhängig sind, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\sum (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w) = 0; \quad \sum Q_1 (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w) = 0$$

$$\sum Q_2 (a_0 + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 + \cdots - w) = 0, \ldots;$$

dies sind die Normalgleichungen.