

Kritische Betrachtungen über die Sterbeziffer der stationären Bevölkerung

Von Dr. Julius Wyler, Bern

I.

Aus den Sterbetafeln lassen sich bekanntlich die sogenannten biometrischen Werte gewinnen, die häufig von Mathematikern auf ihre formalen Eigenschaften geprüft und von Statistikern zur Beurteilung empirischer Mortalitätsverhältnisse herangezogen werden. Besonders beliebte Messkoeffizienten sind die mittlere Lebenserwartung des Nulljährigen und deren reziproker Wert: die ideelle oder reine Sterbeziffer.

Die Absterbeordnung geht aus von einer fiktiven Zahl (zum Beispiel 10 000 oder 100 000) der Geborenen und sagt, wieviele das erste, das zweite und jedes folgende Altersjahr erreichen, bis die Anfangsgeneration erloschen ist. Man bezeichnet mit l_0 die Gesamtheit dieser Neugeborenen, mit l_x die Zahl der Lebenden im Alter x , mit l_w die Besetzung im höchsten vorkommenden Alter. Die Summe aller l_x , ausgedrückt durch die Gleichung

$$\sum_0^w l_x = l_0 + l_1 + l_2 + \dots l_w, \quad (1)$$

hat nun einen doppelten Sinn. Einmal bedeutet sie die von den Geborenen bis zu ihrem Aussterben verlebte Gesamtzeit; denn jedes Leben wird so oft gezählt, als es in ein höheres Altersjahr gelangt. Sodann ist aber die Summe der in jedem Altersjahr Lebenden gleich der stationären Bevölkerung (Sterbetafelbevölkerung), das heisst einer Personengesamtheit, die zeitlich unverändert bleibt, weil ebensoviele Menschen geboren werden wie sterben.

Bezieht man die verlebte Zeit auf einen Neugeborenen, so erhält man die mittlere Lebenserwartung des Nulljährigen, die gleich ist dem mittleren Sterbealter in der stationären Bevölkerung. Die Formel für diese durchschnittliche Lebensdauer lautet demnach ¹⁾:

¹⁾ Ganz genau ist allerdings diese Formel nicht; denn ihr liegt die Annahme zugrunde, dass die Sterbefälle erst am Ende und nicht während der einzelnen Altersjahre erfolgen. Die exakte Gleichung lautet:

$$e_0 = \frac{\sum_0^w l_x}{l_0} - \frac{1}{2}$$

Für die nachstehenden Ableitungen grundsätzlicher Natur genügt jedoch der weniger scharfe Ausdruck e_0 . Die gleiche Bemerkung gilt auch für die folgenden, nicht ganz korrekten Formeln (5) bis (9).

$$e_0 = \frac{\sum_0^w l_x}{l_0} = \frac{\sum_0^w (x+1) d_x}{\sum_0^w d_x} \quad (2)$$

Darin bedeutet l_x die Überlebenden und d_x die Gestorbenen im Alter x . Dass beide wiedergegebenen Formeln für e_0 identisch sind, geht aus folgender Ableitung hervor:

$$\sum_0^w d_x = l_0$$

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

somit ist

$$\sum_0^w (x+1) d_x = \sum_0^w (x+1) (l_x - l_{x+1}) =$$

$$1 (l_0 - l_1) + 2 (l_1 - l_2) + (w+1) l_w =$$

$$l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_w = \sum_0^w l_x$$

Folglich ist

$$\frac{\sum_0^w (x+1) d_x}{\sum_0^w d_x} = \frac{\sum_0^w l_x}{l_0},$$

was zu beweisen war.

Führt die verlebte Zeit auf die mittlere Lebenserwartung des Neugeborenen, so die stationäre Bevölkerung auf die ideelle oder reine Sterbeziffer. Diese Verhältniszahl ist, wie überhaupt, auch in diesem Fall, gleich der Zahl der Sterbefälle, dividiert durch die Bevölkerungszahl. Ferner bedeutet die Ziffer das gewogene arithmetische Mittel der einzelnen Sterbenswahrscheinlichkeiten. Darum gilt folgende Gleichung:

$$M(q_x) = \frac{l_0}{\sum_0^w l_x} = \frac{l_0 q_0 + l_1 q_1 + \dots + l_w q_w}{l_0 + l_1 + l_2 + \dots + l_w} \quad (3)$$

q_x ist die einjährige Sterblichkeit im Alter x und wird durch die Formel

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

bestimmt. Daraus ergibt sich $q_x l_x = d_x$ und weiter

$$l_0 q_0 + l_1 q_1 + \dots + l_w q_w = \sum_0^w d_x = l_0$$

womit die Gleichung (3) bewiesen ist. Die reine Sterbeziffer ist auch der reziproke Wert der mittleren Lebenserwartung des Neugeborenen.

Die mittlere Lebensdauer lässt sich nicht nur für den Nulljährigen bestimmen, sondern für jedes Alter, und zwar durch die allgemeine Formel

$$e_x = \frac{\sum_x^w l_x}{l_x} \quad (4)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die das Alter x überschreitenden Lebenden im Durchschnitt noch e_x Jahre alt werden, also beim Tode $x + e_x$ Jahre durchlebt haben werden. Der reziproke Wert von e_x gibt die Sterblichkeit jenes Bevölkerungsteils an, der aus allen mindestens x -jährigen besteht.

II.

Wenn nun die vorstehenden Formeln mit Inhalt gefüllt werden sollen, so dürfen dafür folgende Nachweise über die schweizerische Bevölkerung genügen ¹⁾:

Schweizerische Sterbetafel	e_0 Jahre	$M(q_x)$ ‰
Männliches Geschlecht		
1876—1880	40,6	24,4
1901—1910	49,2	20,3
1929—1932	59,2	16,7
Weibliches Geschlecht		
1876—1880	43,2	23,1
1901—1910	52,2	19,2
1929—1932	63,0	15,8

Die Übersicht zeigt den bekannten Vorsprung des weiblichen Geschlechts und die bedeutende Lebensverlängerung im Laufe eines halben Jahrhunderts.

¹⁾ Siehe schweizerische Volkssterbetafeln 1876—1932. Eidgenössisches Statistisches Amt, Beiträge zur schweizerischen Statistik; Heft 4. Bern 1935.

Es liegt nun nahe, die reinen Sterbeziffern der stationären Bevölkerung nicht nur unter sich zu vergleichen, sondern auch mit den entsprechenden Ziffern für die Wohnbevölkerung. Dabei kommt als typische Entwicklung zum Ausdruck: beide Koeffizienten fielen vor einigen Jahrzehnten sozusagen zusammen, entfernten sich aber seither immer mehr von einander, weil die «rohe» Sterbeziffer der faktischen Bevölkerung stärker sank als die reine der stationären. Das ist, wie folgende Reihen beweisen, auch für die Schweiz der Fall.

Jahre	Sterbeziffer in Promille	
	reine	rohe
1876—1880	23,6	23,7
1901—1910	19,5	16,8
1929—1932	16,2	12,2

Da die beiden einander gegenübergestellten Gesamtsterbeziffern das mit der Altersbesetzung gewogene Mittel der grundsätzlich identischen Alterssterbenswahrscheinlichkeiten bedeuten, so kann ihr unterschiedlicher Verlauf lediglich in der ungleichen Verschiebung der Altersgliederung beider untersuchter Bevölkerungen liegen: der Sterbetafelbevölkerung einerseits, der faktischen schweizerischen Wohnbevölkerung anderseits. Diese Strukturveränderungen sind in folgender Übersicht dargestellt:

Altersverteilung in Promille

Alter in Jahren	Sterbetafelbevölkerung der Schweiz		Schweizerische Wohnbevölkerung	
	1876—1880	1929—1932	1880	1930
0—4	97	77	118	80
5—19	253	224	296	255
20—39	300	284	289	329
40—59	233	251	209	228
60 und mehr . . .	117	164	88	108
Total	1000	1000	1000	1000

Entsprechend der Lebensverbesserung seit 1876—1880 hat sich die stationäre Bevölkerung stetig veraltet; dagegen verzeichnete die tatsächliche Wohnbevölkerung keine eindeutige Veränderung ihrer Altersstruktur. Gewachsen ist wohl der Anteil der höhern Altersklassen auf Kosten der Kinder wie der Jugendlichen, aber die gewichtigen Mitteljahre treten ebenfalls mehr hervor. Indessen ist innerhalb der Wohnbevölkerung die Quote der 0—4jährigen stärker gefallen und der Greisenanteil in schwächerem Masse gestiegen als innerhalb der stationären. Dafür hat sich der Anteil der 20—39jährigen an der faktischen Bevölkerung besonders kräftig gehoben. Deren Sterblichkeit ist vergleichsweise gering, jene der 0—4jährigen wie auch der über 60jährigen hoch. Somit ist statistisch erklärt, warum die «rohe» Sterbeziffer heftiger sinken musste als die reine.

Unverständlich bleibt die Übereinstimmung beider Koeffizienten in den Jahren 1876—1880, unbegreiflich deshalb, weil in diesem Zeitraum die Altersgliederung der Sterbetafel mit der faktischen gar nicht zusammenfällt. Im Vergleich zur stationären Bevölkerung traten in der wirklichen die unter zwanzig Jahren mehr hervor, die übrigen Altersklassen also zurück. Wenn aber trotzdem die beiden Sterbeziffern damals nahe beieinander waren, so müssen die verschiedenen Besetzungen auf den einzelnen Altersstufen als Gewichte zusammen mit ihren besondern Sterbeziffern sich gegenseitig ausgeglichen haben. Das heisst aber, dass die Übereinstimmung beider Ziffern lediglich auf Zufall beruht.

III.

Mit den letzten Ausführungen ist die Tatsachenbeschreibung bereits in die Kritik übergegangen, die das Kernstück dieser Betrachtung bilden soll. Ein Blick auf die vorstehende Tabelle lässt erkennen, dass die Alterszusammensetzung der Sterbetafelbevölkerung ungleich sein kann für dasselbe Land in verschiedenen Zeitpunkten wie selbstverständlich auch für verschiedene Bevölkerungen in demselben Zeitpunkt. Somit scheint die reine Sterbeziffer gar kein vollkommenes Mortalitätsmass zu sein.

Von zwei Bevölkerungsgesamtheiten mit der gleichen Sterbeziffer hat jene die eigentlich geringere Mortalität, die verhältnismässig mehr ältere Leute aufweist, also ein höheres Durchschnittsalter der Lebenden besitzt. Das gleiche muss auch für die Sterbetafelbevölkerung gelten.

Das mittlere Alter der Lebenden einer stationären Bevölkerung darf nun nicht verwechselt werden mit dem Durchschnittsalter beim Tode, das seinerseits wieder identisch ist mit der Lebenserwartung des Nulljährigen. Die Formel für das mittlere Alter der Lebenden lautet ¹⁾:

$$M(l_x) = \frac{\sum_0^w (x+1) l_x}{\sum_0^w l_x} \quad (5)$$

$\sum_0^w (x+1) l_x$ kann auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} l_0 + 2 l_1 + 3 l_2 + \dots (w+1) l_w = \\ (l_0 + l_1 + l_2 + \dots l_w) l_0 + \\ \frac{(l_1 + l_2 + \dots l_w) l_0}{l_1} + \end{aligned}$$

¹⁾ Siehe zu den nachstehenden Ableitungen die Bemerkung auf S. 61.

$$\frac{(l_2 + l_3 + l_4 + \dots l_w) l_2}{l_2} +$$

.....

.....

Vorstehende Summanden bedeuten nun die mittleren Lebenserwartungen im Alter 0, 1, 2, usw., multipliziert mit der Besetzung des betreffenden Alters.

Deren Summe, dividiert durch $\sum_0^w l_x$ ergibt das gewogene arithmetische Mittel aller Lebenserwartungen. Dieser Durchschnitt ist gleich dem mittleren Alter der Sterbetafelbevölkerung.

Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{\sum_0^w (x+1) l_x}{\sum_0^w l_x} = \frac{\sum_0^w e_x l_x}{\sum_0^w l_x} \quad (6)$$

An einem konstruierten Beispiel sei der Zusammenhang zwischen der reinen Sterbeziffer und der mittleren Lebensdauer veranschaulicht. Die Geburtengenerationen der nachstehenden stationären Bevölkerungen A und B werden höchstens 6jährig. Gleich ist ferner die im ganzen wie die durchschnittlich verlebte Zeit und deshalb die reine Sterbeziffer von 33,3 Prozent. Ein Unterschied zwischen beiden Bevölkerungen besteht dagegen hinsichtlich der Sterblichkeit in den einzelnen Altersjahren, was nun in der Absterbeordnung selbst als auch im Durchschnittsalter der Lebenden zum Ausdruck kommt. $M(l_x)$ beträgt 2,25 Jahre für A und 2,63 Jahre für B.

X	Bevölkerung A		Bevölkerung B	
	l_x Jahre	q_x %	l_x Jahre	q_x %
0	1000	0,10	1000	0,40
1	900	0,33	600	0,17
2	600	0,42	500	0,10
3	350	0,63	450	0,22
4	120	0,75	350	0,71
5	30	1,00	100	1,00
$\sum_0^5 l_x$	3000	—	3000	—

Ganz allgemein muss bei übereinstimmender reiner Sterbeziffer $M(l_x)$ um so tiefer liegen, je günstiger die Mortalität in den jüngeren Altersjahren (Säuglingssterblichkeit!) ist.

Man kann gewiss das Durchschnittsalter der Sterbetafelbevölkerung zur Korrektur der reinen Sterbeziffer heranziehen. Das ist mathematisch wohl nicht ganz einwandfrei, aber einfach und für den statistischen Vergleich genügend. Es werden die ideellen Sterbeziffern so bereinigt, dass sie im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen wie die entsprechenden Werte des mittleren Alters. Das Ergebnis für die beiden Bevölkerungen lautet dann:

Sterbeziffern in ‰	Bevölkerung	
	A	B
Ursprungsziffern	3,33	3,33
Korrigierte Ziffer von B . . .	3,33	2,85
Korrigierte Ziffer von A . . .	3,91	3,33

Nach dieser Korrektur hat die Bevölkerung A eine um 22 Prozent höhere richtige Sterbeziffer als B und umgekehrt B eine um 17 Prozent tiefere als A.

Zu grundsätzlich gleichen, ja, genaueren Ergebnissen gelangt man durch Standardisierung; man multipliziert die Zahl der Überlebenden jeden Alters in der einen Bevölkerung mit den entsprechenden Sterbeziffern der andern. Diese Berechnung lässt sich wechselseitig vornehmen und führt zu zweifachen Ergebnissen, die bekanntlich nicht miteinander übereinstimmen ¹⁾. Die Zahlen für das vorstehende Beispiel sind in folgender Übersicht enthalten:

Reine Sterbeziffer in Promille		
Methode	Bevölkerung A	Bevölkerung B
(AB) ²⁾	333	272
(BA) ³⁾	385	333

Die Verwendung des Wertes für das mittlere Alter der Lebenden zur Bereinigung von Sterbetafelgrößen ist nicht etwa neu, hat doch bereits vor 6 Jahren Professor E. Gumbel mit seinem «Mass der Güte für die Sterbetafel» das gleiche Problem vorgeschwebt ⁴⁾. Dass er sich dabei mit e_0 beschäftigte und nicht mit der reinen Sterbeziffer spielt keine Rolle. Wichtiger ist hingegen seine folgende Ausgangsthese: «Bei Übereinstimmung der Lebenserwartungen eines Neugeborenen gilt diejenige Sterbetafel als günstiger, welche den kleinern Wert für das mittlere Alter der Lebenden aufweist» ⁵⁾. Mit dieser Behauptung

¹⁾ Siehe zu dieser Frage z. B. L. v. Bortkiewicz, Korrelationskoeffizient und Sterblichkeitsmass. Blätter für Versicherungsmathematik und angewandte Gebiete, I. Band, 1930, Seiten 87 ff. — Ferner sei auf die gesamte Indexliteratur verwiesen, die ja dasselbe formale Problem behandelt.

²⁾ A unverändert, für B Altersgliederung von A, Alterssterbeziffern von B.

³⁾ B unverändert, für A Altersgliederung von B, Alterssterbeziffern von A.

⁴⁾ Siehe «Ein Mass der Güte für die Sterbetafel». Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, I. Band, Berlin 1930, Seiten 416 ff.

⁵⁾ Siehe O. c. II. Band, Berlin 1933, Seiten 30 ff. Dieser Aufsatz ist eine Erwiderung auf eine Kritik des Mathematikers Dr. K. Freudentberg (O. c. Seite 27).

werden die Dinge auf den Kopf gestellt. Zweifellos besitzt die durchschnittlich ältere Bevölkerung günstigere Mortalitätsverhältnisse; denn durch die stärkere Besetzung der obern Altersklassen ist e_0 bereits gedrückt oder $M(q_x)$ überhöht. Würde daher die Altersgliederung dieser Bevölkerung jener der jüngern entsprechen, so müsste die Lebenserwartung des Nulljährigen steigen, die reine Sterbeziffer sinken. Die Begründung der Ansicht Gumbels fusst denn auch nicht in der Problematik der Sterblichkeitsmessung selbst, sondern in einem bevölkerungspolitischen Werturteil. Er weist auf die ungesunden Folgeerscheinungen der Vergreisung hin, die wahrlich mit der Sache nichts zu tun haben.

Infolge dieses falschen Startes bieten die übrigen Ausführungen Gumbels, wenigstens dem Statistiker, nicht viel Bedeutendes. «Das Mass der Güte für die gesamte Sterbetafel wird als das Verhältnis der Lebenserwartung eines Neugeborenen zum doppelten mittleren Alter aller Lebenden definiert.» Dieser Wert schwankt zwischen 0 und 1 und schwächt, gerade umgekehrt wie die vorstehende Bereinigung, die Unterschiede zwischen den Lebenserwartungen der verglichenen Sterbetafeln ab.

IV.

Nach der *quaestio facti* die *quaestio juris*! Die Standardisierung der reinen Sterbeziffer bietet technisch keine Schwierigkeiten — ist sie aber grundsätzlich berechtigt?

Die Standardisierung gibt Antwort auf die Frage, wie sich die Gesamtmortalität gestalten würde, wenn die eine Bevölkerung, gegeben durch eine bestimmte Altersgliederung, den Sterbeverhältnissen der andern Bevölkerung ausgesetzt wäre. Um aber diese Auskunft zu erlangen braucht nicht die Absterbeordnung herangezogen zu werden. Vollkommen genügend ist die altbewährte Berechnung auf Grund der Altersgliederung einer tatsächlichen Bevölkerung.

Die «Bereinigung» der reinen Sterbeziffer bedeutet aber nicht nur einen überflüssigen Umweg, sondern einen eigentlichen Widerspruch. Es ist klar, dass die «standardisierte» reine Sterbeziffer nicht mehr die «reine» ist, denn sie setzt die Sterblichkeit in Beziehung zu einer davon unabhängigen Altersgliederung. Das ist ja eben die doppelte Eigenschaft der stationären Bevölkerung, dass einmal ihre Gesamtsterblichkeit nur von der Altersverteilung bestimmt ist und ferner die Altersstruktur nur von den Alterssterbeziffern. Vollständig ausgeschaltet sind etwa die Einflüsse der Geburtenhäufigkeit und der Wanderungen. Vom genannten Zusammenhang ist die bereinigte Sterbeziffer der stationären Bevölkerung gelöst, sie hat keine Beziehung mehr zur Sterbetafel.

Aber der Widerspruch einer Korrektur dieses biometrischen Wertes ist nicht nur formaler Natur, sondern auch materieller. Um diesen Sachverhalt zu verstehen, sei an die Binsenwahrheit erinnert, dass alt werden das einzige Mittel ist, um lange zu leben. Je tiefer die Sterblichkeit sinkt, um so mehr Leute rücken in das höhere Alter; je stärker aber diese Altersklassen besetzt

sind, um so mehr wird die Verminderung der reinen Sterbeziffer gebremst. Somit ist die reine Sterbeziffer überhaupt kein Ausdruck der «wahren» Mortalität, will es gar nicht sein. Im Vergleich zu diesem bevölkerungsstatistischen «Ding an sich» muss sie in um so stärkerem Masse zu hoch sein, je tiefer sie steht. Jede Korrektur dieses Wertes darf daher als sinnwidrige Künstelei beurteilt werden.

Dieser negative Entscheid schliesst eine Untersuchung ab, die von der Betrachtung der Sterbetafeln ihren Ausgang genommen hat. Es wurde festgestellt, dass auch die stationäre Bevölkerung, genau wie die tatsächliche, veraltet. Das genügt, um beim wachsamem Statistiker den Gedanken an eine Standardisierung aufblitzen zu lassen. Dass indessen dieser Gedanke für die reine Sterbeziffer nicht vollziehbar ist, wurde in den vorstehenden Ausführungen nachgewiesen.

Die Kritik trifft selbstverständlich auch die Korrektur der reinen Sterbeziffer mit Hilfe des mittleren Alters der Lebenden. $M(l_x)$ steigt mit fallendem $M(q_x)$; beide Grössen stehen also in einem gegenseitigen Zusammenhang. Damit soll nicht gesagt sein, dass zwischen den beiden biometrischen Werten eine mathematisch ausdrückbare Funktionsbeziehung bestehe. Gegen eine solche Beziehung spricht, dass bei Übereinstimmung der mittleren Lebenserwartung des Neugeborenen in zwei Tafeln das mittlere Alter der Lebenden verschieden sein kann, wofür ein konstruiertes Beispiel gegeben wurde. Nur in diesem Fall kann die Bereinigung der reinen Sterbeziffer verantwortet werden. Indessen kennen wir keine Sterbetafeln, die diese Bedingungen erfüllen. Und wenn solche aufzufinden wären, dürften die Unterschiede von $M(l_x)$ so unbedeutend sein, dass sich die Anpassung von $M(q_x)$ gar nicht verlohnt. In der Regel besteht nun zwischen den Absterbeordnungen Ungleichheit sowohl für das Durchschnittsalter der Lebenden als auch hinsichtlich der Sterbeziffer. Dann aber folgt aus den Darlegungen über die Standardisierung, dass die reinen Sterbeziffern nicht korrigiert werden dürfen, soweit ihr Unterschied auf einem solchen des mittleren Alters der Lebenden beruht.

V.

Die reine Sterbeziffer wird nicht nur in den Dienst der Rückschau und des Ländervergleichs gestellt, sondern auch der Vorschau. Man sagt sich, dass in den kulturell fortgeschrittenen Ländern die Sterblichkeit künftig kaum mehr stark sinken und somit die Altersgliederung der stationären Bevölkerung ziemlich stabil bleiben wird. Dieser Altersstruktur wird sich aber jene der faktischen Bevölkerung nähern, weil die heute noch starken «mittelalterlichen» Klassen nachrücken und die jüngsten sich, infolge des Geburtenrückganges, weiter schwächen.

Die reine Sterbeziffer von heute antizipiert also die rohe Sterbeziffer von morgen. Sie kann daher als Kriterium der zukünftigen, virtuellen Sterblichkeit einer konkreten Wohnbevölkerung verwendet werden. Wiederum liegt eine Korrektur vor; jedoch nicht eine solche der reinen Sterbeziffer, sondern die Ersetzung der gewöhnlichen Sterbeziffer durch die reine. Namentlich

Direktor Burgdörfer hat in zahlreichen Arbeiten diesen Weg begangen ¹⁾, um vom Schein zur Wirklichkeit zu gelangen. Der Autor bereinigt ausserdem auch die Geburtenziffer und kann nach dieser zweiseitigen Operation für Deutschland und andere Staaten an Stelle des Geburtenüberschusses einen Bevölkerungsrückgang nachweisen. In das vorliegende Thema fällt nun lediglich das Problem der «bereinigten» Sterbeziffer.

Indessen, die Sterbeziffer der stationären Bevölkerung ist auch kein Mass der zukünftigen Mortalität einer konkreten Bevölkerung. Vor einigen Jahrzehnten deckten sich in vielen Staaten beide — die rohe und die ideelle Sterbeziffer — aber das war blosser Zufall. In einigen Jahrzehnten können beide Werte wiederum mehr oder weniger zusammenfallen — ebenfalls als Ergebnis des Zufalls. Jeder Statistiker weiss doch, dass zwei gleich grosse gewogene Durchschnitte nicht gleichwertig sein müssen. Diese Erkenntnis gab dem Problem der Standardisierung Leben und Sinn. Faktisch sind reine und rohe Sterbeziffern nie gleichwertig und werden es nie sein; denn die ihnen zugrunde liegenden Altersgliederungen gehen ihrem Wesen nach auseinander. Sie werden nämlich durch eine Geburtenziffer bestimmt, die in der Sterbetafel ex definitione mit der Sterbeziffer übereinstimmt, jedoch in der wirklichen Bevölkerung höher ist oder vielleicht kleiner sein kann als die Sterbeziffer, aber kaum längere Zeit gleich bleiben wird. Nach der Tabelle auf Seite 64 ist beispielsweise die Quote der 0—4jährigen im Jahre 1930 an der schweizerischen Wohnbevölkerung beinahe so gross wie an der Sterbetafelbevölkerung. Im Verlaufe einer kurzen Zeit wird daher die wirkliche Bevölkerung relativ weniger 0—4jährige zählen als die stationäre. Aber bereits damit ist die Brücke zwischen beiden Personengesamtheiten endgültig abgebrochen.

Die biometrischen Werte dienen der Sterblichkeitsmessung in ihrer besondern Weise; sie geben auf andere Fragen Antwort als die gewöhnlichen Sterbeziffern, weil sie sich eben auf eine andere Bevölkerung beziehen. Aus diesem Grund ist eine Vermengung beider statistischer Koeffizienten unzulässig. Der einwandfreien Berechnung der «virtuellen» Mortalität einer faktischen Wohnbevölkerung bleibt schliesslich nur der umständliche Weg offen, den jede mathematisch korrekte Bevölkerungsprognose einschlagen muss ²⁾.

VI.

Den Gebrauch der mittleren Lebenserwartung wie der reinen Sterbeziffer als Mortalitätsmass hat vor kurzem der bekannte deutsche Statistiker Professor E. Würzburger ³⁾ ebenfalls einer Kritik unterzogen.

Nach der Auffassung des Autors ist der reziproke Wert von e_0 nur die Sterbeziffer eines Nulljährigen oder im Augenblick der Geburt, nicht aber

¹⁾ Zum Beispiel: Der Geburtenrückgang und seine Bekämpfung. Berlin 1929. Volk ohne Jugend, 3. Auflage, 1935.

²⁾ Gedacht ist dabei namentlich an Methoden, die von den theoretischen Untersuchungen A. J. Lotkas ausgehen.

³⁾ Was lehrt die Sterblichkeitsstatistik? Revue de l'Institut International de Statistique 1935. II. Heft, Seiten 129 ff.

jene der gesamten stationären Bevölkerung. «Denn ebensowenig wie die Lebenserwartung a , die die Neugeborenen im Augenblick der Geburt — und nur in diesem Augenblick — besitzen, der der Gesamtheit aller Lebenserwartungen gleich ist, kann die durch das Verhältnis $100 : a$ errechnete jährliche Sterbehäufigkeit zugleich Gültigkeit für die Bevölkerung als Ganzes beanspruchen» ¹⁾.

Nicht auf die Lebenserwartung des Neugeborenen ist daher abzustellen, sondern auf das Mittel sämtlicher Lebenserwartungen, zuzüglich der bereits erreichten Altersjahre der Gesamtbevölkerung. Der reziproke Wert einer solchen mittleren Lebensdauer ist die einzig richtige Sterbeziffer der stationären Bevölkerung.

Wie folgendes Beispiel Würzburger zeigt, sind die von ihm berechneten Werte der Lebenserwartung höher, die entsprechenden Sterbeziffern niedriger als die üblichen.

	Deutsches Reich 1924—1926	Italien 1930—1932
Lebenserwartung in Jahren:		
Eines Neugeborenen	57,4	54,9
Methode Würzburger.	70,6	70,8
Sterbeziffer in Promille:		
Reine Sterblichkeit.	17,4	18,2
Methode Würzburger.	14,2	14,1

Die Kritik Würzburger zerfällt in einen negativen und in einen positiven Teil: in eine Beurteilung von e_0 und von $\frac{l}{e_0}$ sowie in der Anwendung von nach seiner Ansicht brauchbaren Koeffizienten. Entsprechend ist der Gang nachstehender Stellungnahme, die sich lediglich auf die dargelegten zentralen Gedanken des Autors beschränkt und auf andere, beiläufigere Bemerkungen nicht eingeht.

Der erste Teil der Gegenkritik ist rasch erledigt; denn im einleitenden Abschnitt dieser Arbeit wurde gesagt, dass erstens die mittlere Lebenserwartung des Neugeborenen das durchschnittliche Sterbealter der stationären Bevölkerung, zweitens dessen reziproker Wert das gewogene Mittel sämtlicher Alterssterbeziffern bedeutet. Beide Werte beziehen sich keineswegs ausschliesslich auf die Neugeborenen, sondern allgemein auf die ganze Sterbetafelbevölkerung.

Leider hat Würzburger auf die mathematische Darstellung und Ableitung seines Gedankens verzichtet, was der Klarheit seiner Ausführungen entschieden Abbruch tut. Indessen ist sein neues Mass der Sterblichkeit leicht in ein Symbol zu kleiden.

Würzburger geht aus vom mittleren Alter der Lebenden einer stationären Bevölkerung, das — wie Formel (6) sagt — gleich ist dem Durchschnitt der mittleren Lebenserwartungen aller Altersjahre ²⁾. Zu diesem Alter wird noch addiert

¹⁾ O. c. Seite 132.

²⁾ Der Ausdruck «Durchschnitt der Lebenswahrscheinlichkeiten sämtlicher einzelner Altersstufen» (Seite 132 O. c.) dürfte auf einem Versehen beruhen.

die im Mittel bereits verlebte Zeit. Diese Doppelsumme, dividiert durch die Zahl der Lebenden, ergibt die mittlere Lebensdauer. Die Formel lautet:

$$M(x + e_x) = \frac{\sum_0^w (x + 1 + e_x) l_x}{\sum_0^w l_x} \quad (7)$$

$$\sum_0^w (x + 1 + e_x) l_x = \sum_0^w (x + 1) l_x + \sum_0^w e_x l_x$$

Nach Formel (6) ist aber

$$\sum_0^w (x + 1) l_x = \sum_0^w e_x l_x$$

Somit gilt folgende Gleichung:

$$M(x + e_x) = \frac{2 \sum_0^w (x + 1) l_x}{\sum_0^w l_x} = 2 M(e_x) = 2 M(l_x) \quad (8)$$

Der von Würzburger verwendete Mittelwert ist gleich dem doppelten Betrag des mittleren Alters einer stationären Bevölkerung. Welche Bedeutung, welcher sinnvolle Inhalt kommt nun diesem $M(x + e_x)$ zu? Zweifellos drückt $M(x + e_x)$ das Alter aus, das die Lebenden einer stationären Bevölkerung beim Tode erreichen werden — aber nur unter einer Voraussetzung: dass keine Neugeborenen mehr hinzukommen. Gemeint ist damit das Durchschnittsalter beim Tode lediglich der in einem bestimmten Zeitpunkt Lebenden. In dieser Formel wird somit an Stelle der stationären Bevölkerung eine solche betrachtet, in der Leute nur noch sterben, aber keine Kinder mehr zur Welt kommen. Kurzum, $M(x + e_x)$ drückt also die mittlere Lebensdauer oder das Durchschnittsalter beim Tode für eine Sterbetafelbevölkerung aus, die noch in einem einzigen Jahr Geburtenzuwachs erhält, darauf aber ausstirbt. Ableiten lässt sich dieser Mittelwert in doppelter Weise: entweder als gewogenes Mittel des Alters der in jedem einzelnen Jahr Verstorbenen oder als durchschnittlich verlebte Zeit

der Bevölkerung. Man kann also sowohl von d_x ausgehen als auch von l_x . Jener wie dieser Weg führt zum gleichen Ziel, aber das zweite Verfahren ist einfacher. Bis zum Jahre 0 hat die noch vollständige Sterbetafelbevölkerung im ganzen

$\sum_0^w (x+1) l_x$ Jahre verlebt. Die in diesem Jahre Geborenen werden bis zu ihrem Tode $\sum_0^w l_x$ Jahre durchlaufen. Entsprechend beträgt die künftig verlebte Zeit der l_1 -Einjährigen $\sum_1^w l_x$ und jene der l_2 -Zweijährigen $\sum_2^w l_x$ usw.

$$\sum_0^w l_x + \sum_1^w l_x + \sum_2^w l_x + \dots + \sum_{w-1}^w l_x$$

ist aber nach Formeln (5) und (6) gleich

$$\sum_0^w (x+1) l_x = \sum_0^w e_x l_x$$

Hinzu kommt noch die bis zum Jahre 0 bereits verlebte Zeit $\sum_0^w (x+1) l_x$

Da die stationäre Bevölkerung erlischt, sterben vom Jahre 0 bis im ganzen $\sum_0^w l_x$ Personen, deren durchschnittlich verlebte Zeit oder mittleres Sterbealter ist also:

$$\frac{2 \sum_0^w e_x l_x}{\sum_0^w l_x} = M (x + e_x)$$

Das mittlere Alter beim Tode der aussterbenden Bevölkerung muss selbstverständlich das Doppelte des Alters der Lebenden einer stationären betragen; denn dem bereits erreichten Durchschnittsalter schliesst sich die gleiche Zahl von Lebensjahren an. Ebenso leuchtet ein, dass infolge der wachsenden Veralterung der erlöschenden Bevölkerung ihr mittleres Sterbealter den Wert e_0 übertreffen muss. Daraus folgt auch, dass die Sterbeziffer der erlöschenden

Bevölkerung höher ist als die reine. Ist aber $M(x + e_x)$ grösser als e_0 , so muss sein reziproker Wert kleiner als $M(q_x)$ sein. In der Tat hat auch Würzburger eine neue Sterbeziffer bestimmt, die unter jener der Sterbetafelbevölkerung steht.

Die Sterbeziffer der aussterbenden Bevölkerung wäre grösser und kleiner als $M(q_x)$! Hier liegt ein Widerspruch vor, der nur durch direkte Ableitung der mittleren Sterbeziffer einer aussterbenden stationären Bevölkerung gelöst werden kann. Die «Population» in den aufeinanderfolgenden Jahren ist gleich

$\sum_0^w (x + 1) l_x$ und damit die Sterbeziffer der aussterbenden Bevölkerung

$$* M(q_x) = \frac{\sum_0^w l_x}{\sum_0^w (x + 1) l_x} \quad (9)$$

Das ist aber der reziproke Wert des mittleren Alters der stationären Bevölkerung [siehe Formel (5)].

Dieses Ergebnis überrascht. Es beweist jedenfalls, dass das von Würzburger verwendete Mortalitätsmass nicht die Sterbeziffer der aussterbenden Bevölkerung bedeutet. Auf welche denkbare Personengesamtheit bezieht es

sich denn? $\sum_0^w (x + 1) l_x$ entspricht wohl einer vorstellbaren Menschengesamtheit, $2 \sum_0^w (x + 1) l_x$ aber nicht, sondern lediglich der verlebten Zeit, eben der Bevölkerung $\sum_0^w l_x$. Damit fällt auch der reziproke Wert des mittleren Alters

einer aussterbenden Menschengesamtheit als inhaltslos dahin. Der Koeffizient, der nach Würzburger die «richtige» Sterblichkeit ausdrücken soll, ist eine leere Hülle.

Die Kritik der Ausführungen von E. Würzburger hat ein doppeltes Ergebnis gezeitigt. Gewissermassen als Nebenprodukt wurde die «aussterbende stationäre» Bevölkerung entdeckt. Auf sie beziehen sich bestimmte biometrische Werte, die in der folgenden systematischen Übersicht den Grössen für die stationäre Bevölkerung gegenübergestellt werden. Der Vollständigkeit halber wurde dabei auch noch das Durchschnittsalter der Lebenden der aussterbenden Sterbetafelbevölkerung dargestellt ¹⁾.

¹⁾ Der Pfeil weist auf den reziproken Wert hin.

Bezeichnung des biometrischen Wertes	Stationäre Bevölkerung	Aussterbende stationäre Bevölkerung
Mittleres Alter der Lebenden	$\frac{\sum_0^w (x+1) l_x}{\sum_0^w l_x}$	$\frac{\sum_0^w (x+1)^2 l_x}{\sum_0^w (x+1) l_x}$
Mittleres Alter der Gestorbenen	$\frac{\sum_0^w l_x}{l_0}$	$\frac{2 \sum_0^w (x+1) l_x}{\sum_0^w l_x}$
Sterbeziffer	$\frac{l_0}{\sum_0^w l_x}$	$\frac{\sum_0^w l_x}{\sum_0^w (x+1) l_x}$

Grundsätzlichere Bedeutung dürfte jedoch die weitere Lehre aus vorstehender Kritik des Würzburgerschen Sterblichkeitsmasses beanspruchen, um so mehr, als die vorangegangenen Ausführungen die gleiche Einsicht ergeben: die Erkenntnis nämlich, dass bei der Behandlung des Problems der Sterblichkeitsmessung Formverständnis und Sachverständnis zusammenwirken müssen. Sowohl die mathematischen Beziehungen zwischen den einzelnen Werten klar zu erkennen als auch ihre realen Inhalte sich deutlich vorzustellen; beides ist unerlässlich. Ziffern einer Formel aber, deren Eigenschaften nicht erfasst werden, oder die keinem Gegenstand entsprechen, führen in die Irre.